made by Mansy

صلى ع النبى وإدعيلى دعوة حلوة

#دفعة المنوفية 2022

#قناة تالتة ثانوى 2022


أكثروا من
الصلاة على النبي



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المعاصر

الرياضيات البحتة

الجبر و الهندسة الفراغية

الشرح و التمارين



3 ثانوى



مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقى-الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤

بطاقة فهرسة

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية

المعاصر فى الرياضيات البحتة : الجبر والهندسة الفراغية /
إعداد نخبة من خبراء التعليم. -
القاهرة : مكتبة الطلبة ، ٢٠٢١.
٣ مج ؛ ٢٤ سم.
الصف الثالث الثانوى
المحتويات : جـ١. الشرح والتمارين.-
جـ٢. المراجعة المستمرة.-
جـ٣. الجزء الخاص بالإجابات.
تدمك : ٩ - ٥٤١ - ٨٣٩ - ٩٧٧ - ٩٧٨
١ - الجبر - تعليم وتدريس.
٢ - الهندسة الفراغية - تعليم وتدريس.
٣ - التعليم الثانوى.

٥١٢,٧

رقم الإيداع : ١١٥٩٤ / ٢٠٢١

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذى وفقنا لتقديم هذا الكتاب من مجموعة كتب «المعاصر» فى الرياضيات... نقدمه إلى أبنائنا الطلبة آملين أن يجدوا فيه المعلم والموجه الذى يعينهم على فهم كل صعب، ويذلل أمامهم كل مغلق وغامض، ويأخذ بأيديهم إلى طريق النجاح والتفوق.

ونقدمه إلى إخواننا المدرسين ليكون لهم عونًا على أداء رسالتهم الشاقة، ونافذة يطلون منها على خبرات إخوة لهم أمضوا قرابة الثلاثين عامًا فى حقل التدريس والتوجيه.

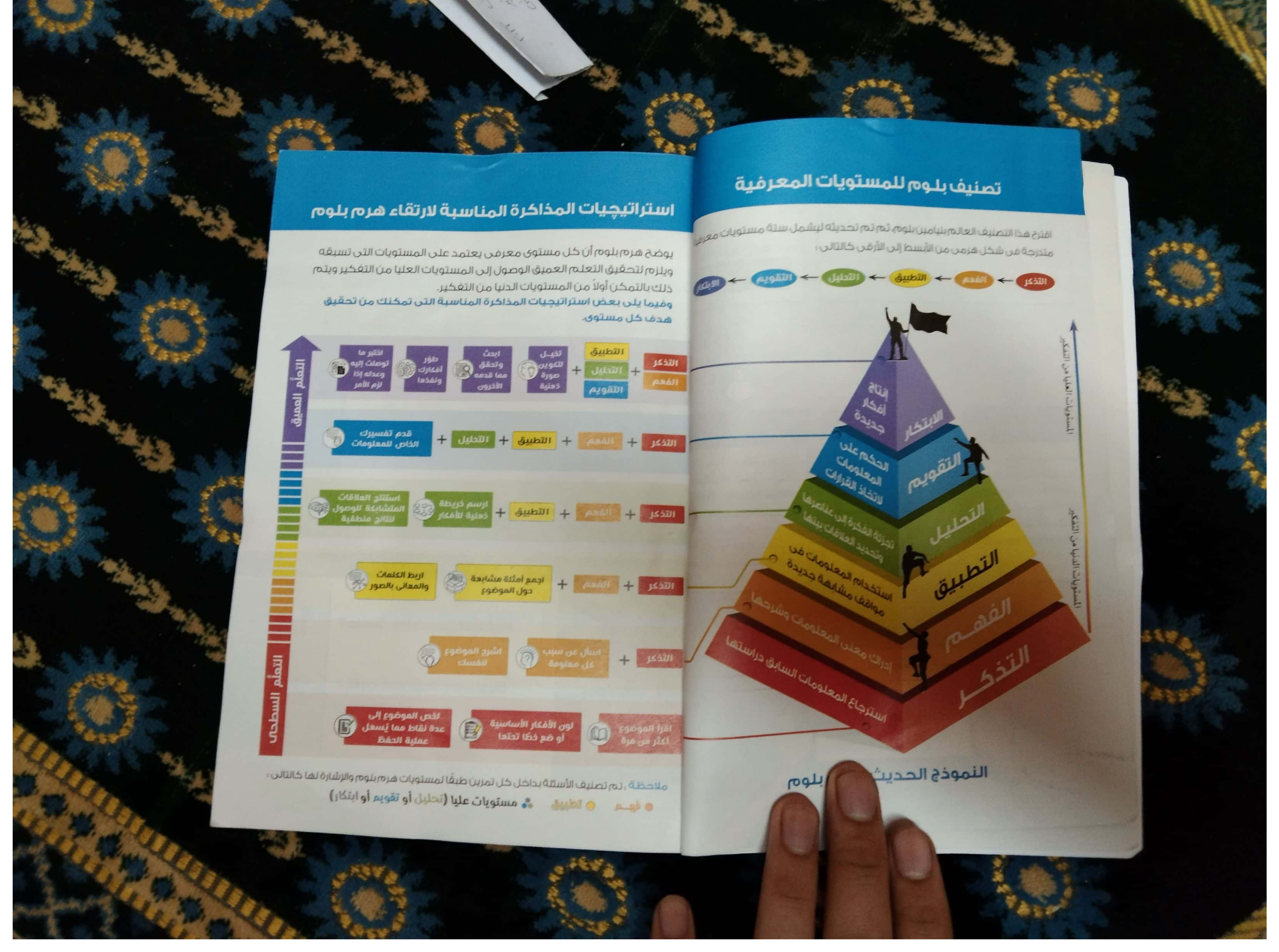
ونحن لن نلجأ - فى هذا التقديم - إلى تقييم عملنا وجهدنا من خلال سرد لمزايا هذا الكتاب وما استحدث فيه، ولكننا نترك ذلك لكل من يطوى صفحة منه أو يقرأ سطرًا فيه، لكى يبدى فيه رأيًا ... إن كان نقدًا فنحن نرحب به ... وإن كانت كلمة ثناء فهى خير مقابل نرجوه، وأعز وسام نضعه على صدورنا.

والله لا يضيع أجر من أحسن عملاً، وهو ولى التوفيق.

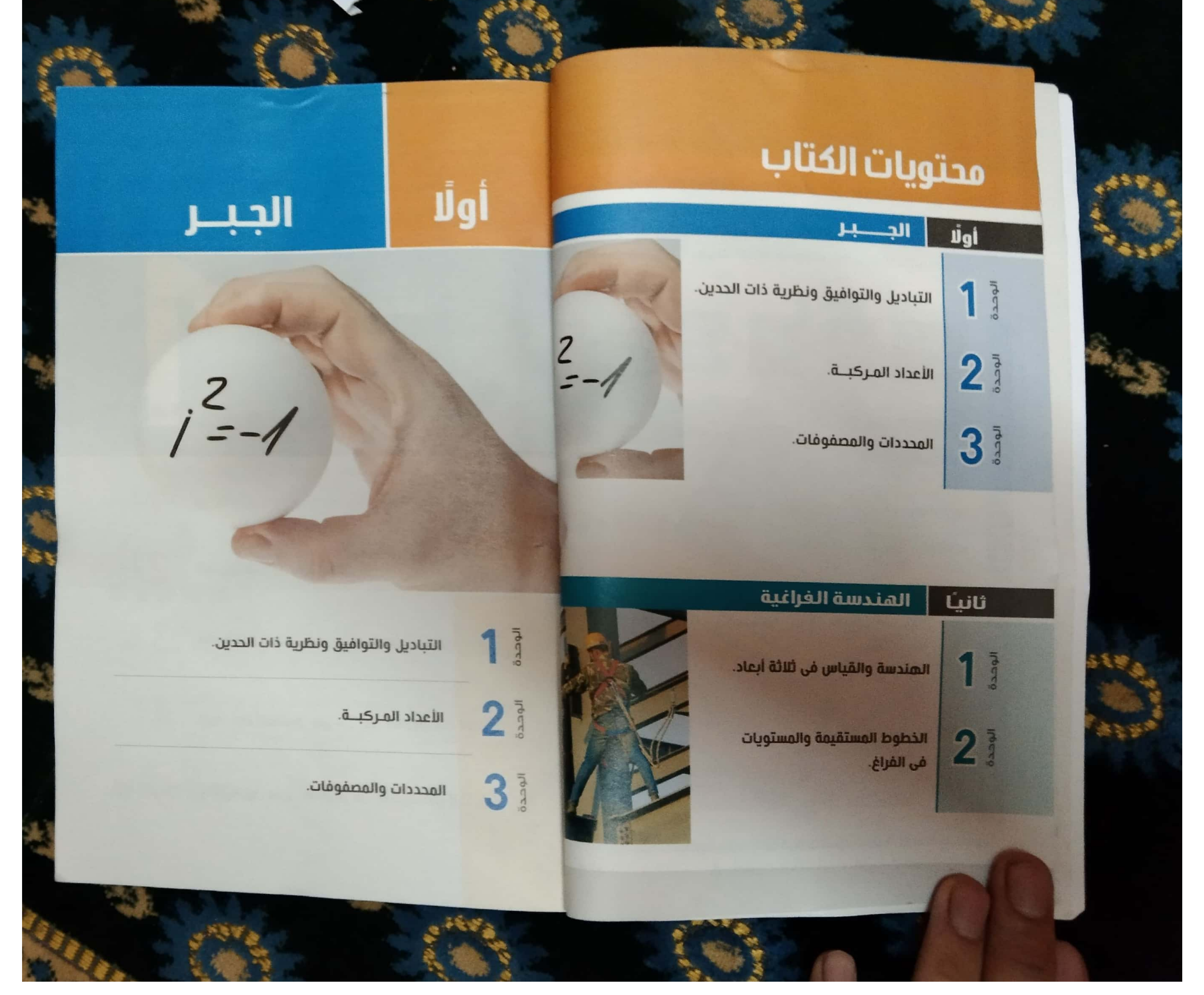
« المؤلفون »



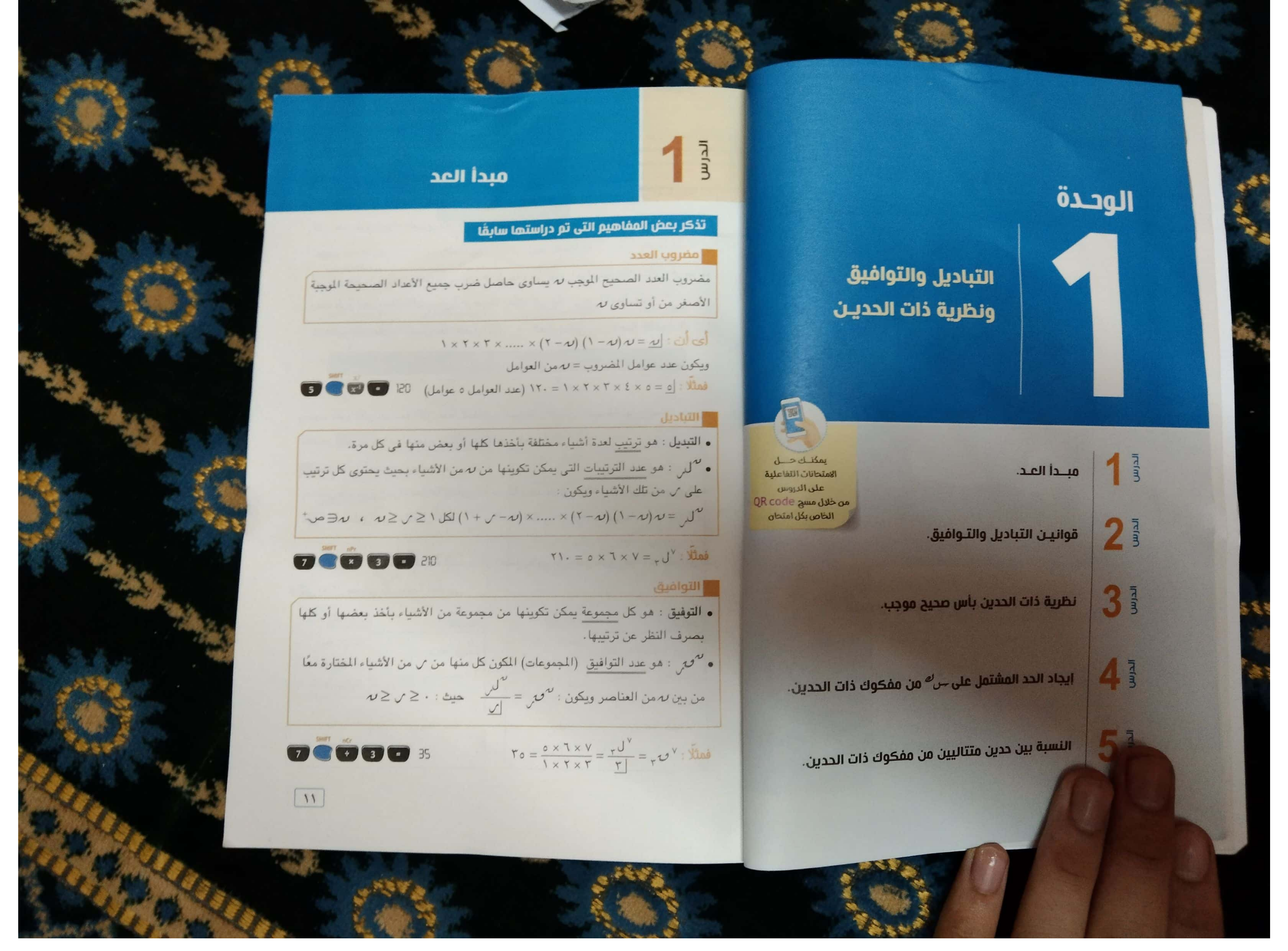
كيفية استخدام التطبيق
١
قُم بتنزيل التطبيق من
GET IT ON
Google Play
٢
قُم بإنشاء الحساب الخاص بك
٣
أدخل كودك الشخصى "الموجود على ظهر الغلاف" أو امسح علامة الباركود من خلال التطبيق
حساب طالب
• شرح الدروس بأحدث وسائل الإيضاح
• اختبارات وامتحانات تفاعلية
• تقارير وإحصائيات
• اسأل المعاصر - الامتحان
• ألعاب وأنشطة تعليمية
• مزايا متعددة طوال العام
حساب ولى أمر
• تابع مستوى أولادك من خلال تقارير أنشطتهم على التطبيق
• تعرف على كل جديد فى العملية التعليمية
حساب معلم
• تواصل مع مجموعة من طلابك وأرسل لهم مواد تعليمية واختبارات خاصة بك
• قيم مستوى طلابك من خلال متابعة أنشطتهم وتواصلهم المباشر معك
جديد
التطبيق التفاعلى للتعلم عن بُعد
معاك
Ma3ak App
استمتع
بتجربة التعلم التفاعلى لجميع المواد الدراسية
واحصل مجانًا على جميع مزايا التطبيق من...
المعاصر
الامتحان



تصنيف بلوم للمستويات المعرفية
اقترح هذا التصنيف العالم بنيامين بلوم، ثم تم تحديثه ليشمل ستة مستويات
متدرجة فى شكل هرمى من الأبسط إلى الأرقى كالتالى:
التذكر ← الفهم ← التطبيق ← التحليل ← التقويم ← الابتكار
الابتكار
إنتاج أفكار جديدة
التقويم
الحكم على المعلومات لاتخاذ القرارات
التحليل
تجزئة الفكرة إلى عناصرها وتحديد العلاقات بينها
التطبيق
استخدام المعلومات فى مواقف مشابهة جديدة
الفهـم
إدراك معنى المعلومات وشرحها
التذكـر
استرجاع المعلومات السابق دراستها
المستويات العليا من التفكير
المستويات الدنيا من التفكير
النموذج الحديث
بلوم
استراتيچيات المذاكرة المناسبة لارتقاء هرم بلوم
يوضح هرم بلوم أن كل مستوى معرفى يعتمد على المستويات التى تسبقه
ويلزم لتحقيق التعلم العميق الوصول إلى المستويات العليا من التفكير ويتم
ذلك بالتمكن أولاً من المستويات الدنيا من التفكير.
وفيما يلى بعض استراتيچيات المذاكرة المناسبة التى تمكنك من تحقيق
هدف كل مستوى.
التذكر + الفهم + التطبيق + التحليل + التقويم
تخيل لتكوين صورة ذهنية
ابحث وتحقق مما قدمه الآخرون
طوّر أفكارك ونفذها
اختبر ما توصلت إليه وعدله إذا لزم الأمر
التذكر + الفهم + التطبيق + التحليل +
قدم تفسيرك الخاص للمعلومات
التذكر + الفهم + التطبيق +
ارسم خريطة ذهنية للأفكار
استنتج العلاقات المتشابكة للوصول لنتائج منطقية
التذكر + الفهم +
اجمع أمثلة مشابهة حول الموضوع
اربط الكلمات والمعانى بالصور
التذكر +
اسأل عن سبب كل معلومة
اشرح الموضوع لنفسك
اقرأ الموضوع أكثر من مرة
لون الأفكار الأساسية أو ضع خطًا تحتها
لخص الموضوع إلى عدة نقاط مما يُسهل عملية الحفظ
التعلُّم العميق
التعلُّم السطحى
ملاحظة: تم تصنيف الأسئلة بداخل كل تمرين طبقًا لمستويات هرم بلوم والإشارة لها كالتالى:
فهـم
تطبيق
مستويات عليا (تحليل أو تقويم أو ابتكار)



أولًا
الجبـــر
الوحدة 1 التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين.
الوحدة 2 الأعداد المركبـة.
الوحدة 3 المحددات والمصفوفات.
محتويات الكتاب
أولًا الجبـــر
الوحدة 1 التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين.
الوحدة 2 الأعداد المركبـة.
الوحدة 3 المحددات والمصفوفات.
ثانيًا الهندسة الفراغية
الوحدة 1 الهندسة والقياس فى ثلاثة أبعاد.
الوحدة 2 الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ.



الوحدة 1

التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 مبدأ العد

تذكر بعض المفاهيم التى تم دراستها سابقًا

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب $ن$ يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى $ن$

أى أن : $\underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢) \times \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$

ويكون عدد عوامل المضروب = $ن$ من العوامل

فمثلًا : $\underline{|٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$ (عدد العوامل ٥ عوامل) 5 SHIFT x^{-1} = 120

التباديل

- **التبديل** : هو ترتيب لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعض منها فى كل مرة.
- $^{ن}ل_{ر}$: هو عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من $ن$ من الأشياء بحيث يحتوى كل ترتيب على $ر$ من تلك الأشياء ويكون :

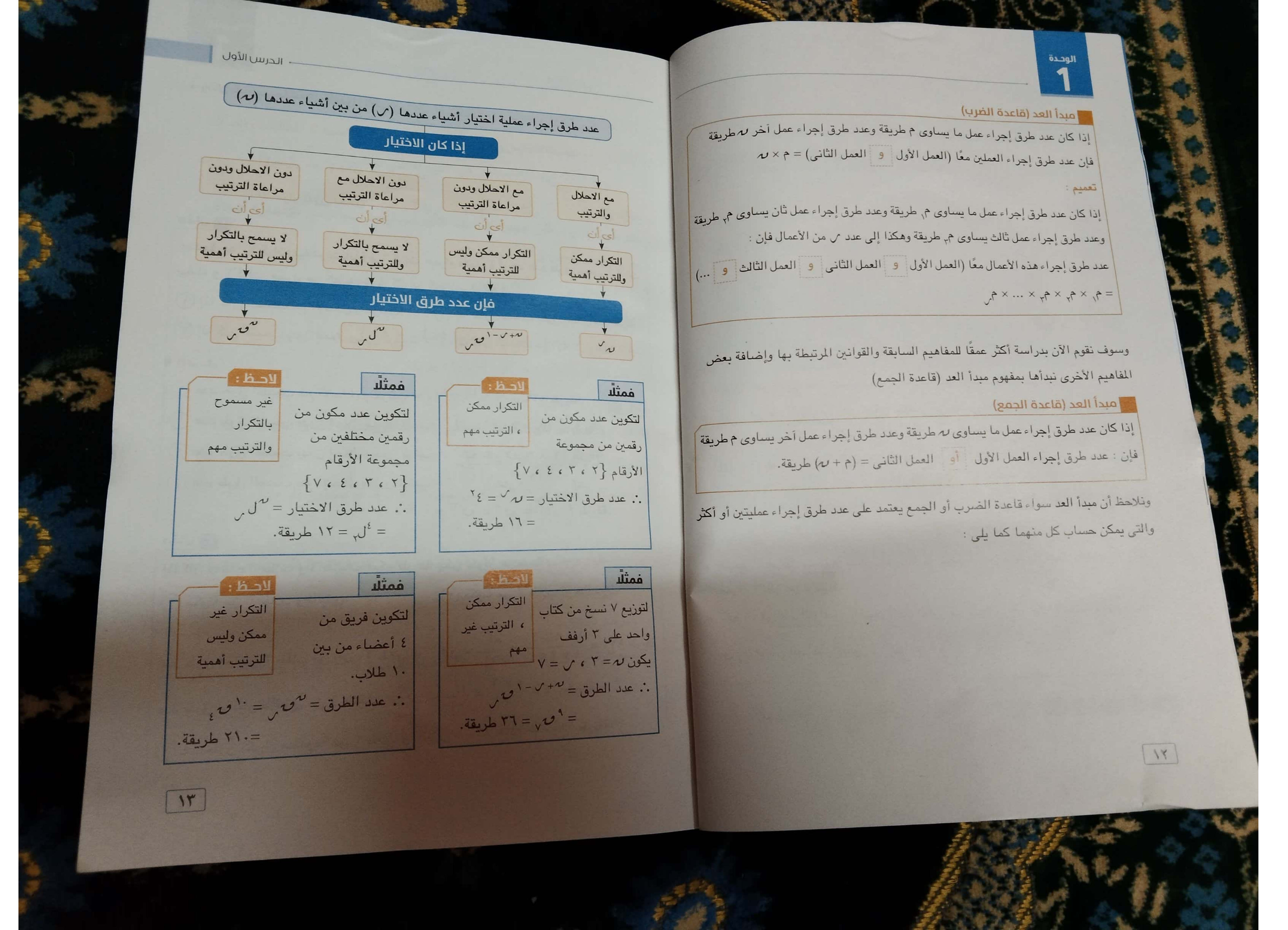
$$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \times \dots \times (ن-ر+١) \text{ لكل } ١ \le ر \le ن ، ن \in ص^{+}$$

فمثلًا : $^{٧}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$ 7 SHIFT nPr 3 = 210

التوافيق

- **التوفيق** : هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.
- $^{ن}ق_{ر}$: هو عدد التوافيق (المجموعات) المكون كل منها من $ر$ من الأشياء المختارة معًا من بين $ن$ من العناصر ويكون : $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ حيث : $٠ \le ر \le ن$

فمثلًا : $^{٧}ق_{٣} = \frac{^{٧}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$ 7 SHIFT nCr 3 = 35



مبدأ العد (قاعدة الضرب)

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى م طريقة وعدد طرق إجراء عمل آخر ن طريقة

فإن عدد طرق إجراء العملين معًا (العمل الأول و العمل الثانى) = م × ن

تعميم :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_١$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان يساوى $م_٢$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث يساوى $م_٣$ طريقة وهكذا إلى عدد ر من الأعمال فإن :

عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا (العمل الأول و العمل الثانى و العمل الثالث و ...)

$= م_١ × م_٢ × م_٣ × ... × م_ر$

وسوف نقوم الآن بدراسة أكثر عمقًا للمفاهيم السابقة والقوانين المرتبطة بها وإضافة بعض المفاهيم الأخرى نبدأها بمفهوم مبدأ العد (قاعدة الجمع)

مبدأ العد (قاعدة الجمع)

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة

فإن : عدد طرق إجراء العمل الأول أو العمل الثانى = (م + ن) طريقة.

ونلاحظ أن مبدأ العد سواء قاعدة الضرب أو الجمع يعتمد على عدد طرق إجراء عمليتين أو أكثر والتى يمكن حساب كل منهما كما يلى :

عدد طرق إجراء عملية اختيار أشياء عددها (ر) من بين أشياء عددها (ن)

إذا كان الاختيار

مع الاحلال والترتيب	مع الاحلال ودون مراعاة الترتيب	دون الاحلال مع مراعاة الترتيب	دون الاحلال ودون مراعاة الترتيب
أى أن	أى أن	أى أن	أى أن
التكرار ممكن وللترتيب أهمية	التكرار ممكن وليس للترتيب أهمية	لا يسمح بالتكرار وللترتيب أهمية	لا يسمح بالتكرار وليس للترتيب أهمية

فإن عدد طرق الاختيار

$ن^ر$	$^{ن+ر-١}ق_ر$	$^{ن}ل_ر$	$^{ن}ق_ر$

فمثلًا

لتكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧}

لاحظ : التكرار ممكن ، الترتيب مهم

∴ عدد طرق الاختيار = $ن^ر = ٤^٢$

= ١٦ طريقة.

فمثلًا

لتكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧}

لاحظ : غير مسموح بالتكرار والترتيب مهم

∴ عدد طرق الاختيار = $^{ن}ل_ر$

$= {}^{٤}ل_٢ = ١٢$ طريقة.

فمثلًا

لتوزيع ٧ نسخ من كتاب واحد على ٣ أرفف

لاحظ : التكرار ممكن ، الترتيب غير مهم

يكون ن = ٣ ، ر = ٧

∴ عدد الطرق = $^{ن+ر-١}ق_ر$

$= {}^{٩}ق_٧ = ٣٦$ طريقة.

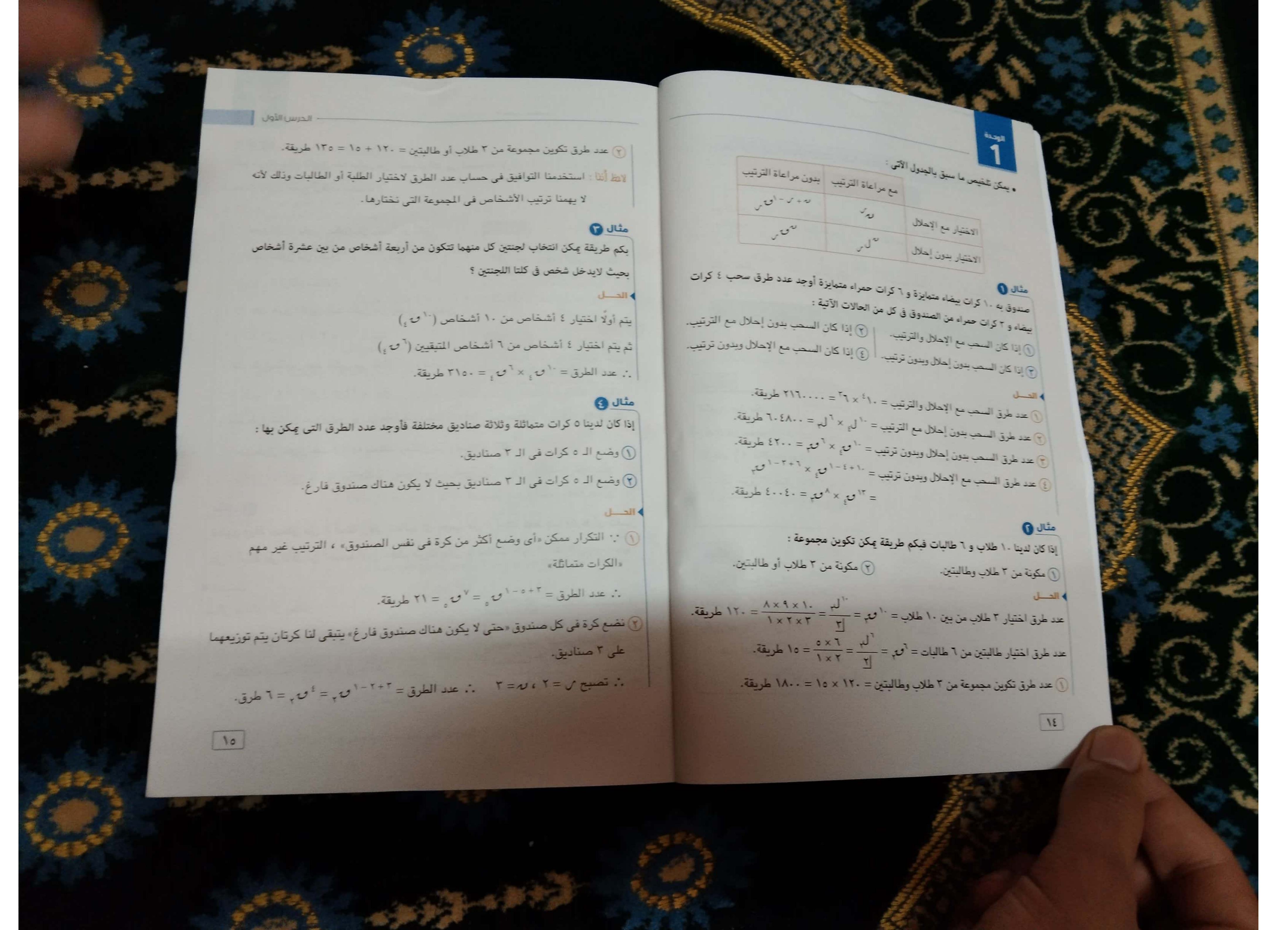
فمثلًا

لتكوين فريق من ٤ أعضاء من بين ١٠ طلاب.

لاحظ : التكرار غير ممكن وليس للترتيب أهمية

∴ عدد الطرق = $^{ن}ق_ر = {}^{١٠}ق_٤$

=٢١٠ طريقة.



الوحدة 1

- يمكن تلخيص ما سبق بالجدول الآتى :

	مع مراعاة الترتيب	بدون مراعاة الترتيب
الاختيار مع الإحلال	$\text{ن}^{\text{ر}}$	$^{\text{ن}+\text{ر}-1}\text{ق}_{\text{ر}}$
الاختيار بدون إحلال	$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$	$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

مثال ١

صندوق به ١٠ كرات بيضاء متمايزة و ٦ كرات حمراء متمايزة أوجد عدد طرق سحب ٤ كرات بيضاء و ٢ كرات حمراء من الصندوق فى كل من الحالات الآتية :

① إذا كان السحب مع الإحلال والترتيب.
② إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.
③ إذا كان السحب بدون إحلال وبدون ترتيب.
④ إذا كان السحب مع الإحلال وبدون ترتيب.

الحل

① عدد طرق السحب مع الإحلال والترتيب = $10^4 \times 6^2 = 2160000$ طريقة.

② عدد طرق السحب بدون إحلال مع الترتيب = $^{10}\text{ل}_4 \times {}^{6}\text{ل}_2 = 6048000$ طريقة.

③ عدد طرق السحب بدون إحلال وبدون ترتيب = $^{10}\text{ق}_4 \times {}^{6}\text{ق}_2 = 4200$ طريقة.

④ عدد طرق السحب مع الإحلال وبدون ترتيب = $^{10+4-1}\text{ق}_4 \times {}^{6+2-1}\text{ق}_2$
$= {}^{13}\text{ق}_4 \times {}^{8}\text{ق}_2 = 40040$ طريقة.

مثال ٢

إذا كان لدينا ١٠ طلاب و ٦ طالبات فبكم طريقة يمكن تكوين مجموعة :

① مكونة من ٣ طلاب وطالبتين.
② مكونة من ٣ طلاب أو طالبتين.

الحل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ١٠ طلاب = $^{10}\text{ق}_3 = \frac{^{10}\text{ل}_3}{\underline{|3}} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ طريقة.

عدد طرق اختيار طالبتين من ٦ طالبات = $^{6}\text{ق}_2 = \frac{^{6}\text{ل}_2}{\underline{|2}} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ طريقة.

① عدد طرق تكوين مجموعة من ٣ طلاب وطالبتين = $120 \times 15 = 1800$ طريقة.

② عدد طرق تكوين مجموعة من ٣ طلاب أو طالبتين = $120 + 15 = 135$ طريقة.

لاحظ أننا : استخدمنا التوافيق فى حساب عدد الطرق لاختيار الطلبة أو الطالبات وذلك لأنه لا يهمنا ترتيب الأشخاص فى المجموعة التى نختارها.

مثال ٣

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لايدخل شخص فى كلتا اللجنتين ؟

الحل

يتم أولًا اختيار ٤ أشخاص من ١٠ أشخاص ($^{10}\text{ق}_4$)

ثم يتم اختيار ٤ أشخاص من ٦ أشخاص المتبقين ($^{6}\text{ق}_4$)

∴ عدد الطرق = $^{10}\text{ق}_4 \times {}^{6}\text{ق}_4 = 3150$ طريقة.

مثال ٤

إذا كان لدينا ٥ كرات متماثلة وثلاثة صناديق مختلفة فأوجد عدد الطرق التى يمكن بها :

① وضع الـ ٥ كرات فى الـ ٣ صناديق.
② وضع الـ ٥ كرات فى الـ ٣ صناديق بحيث لا يكون هناك صندوق فارغ.

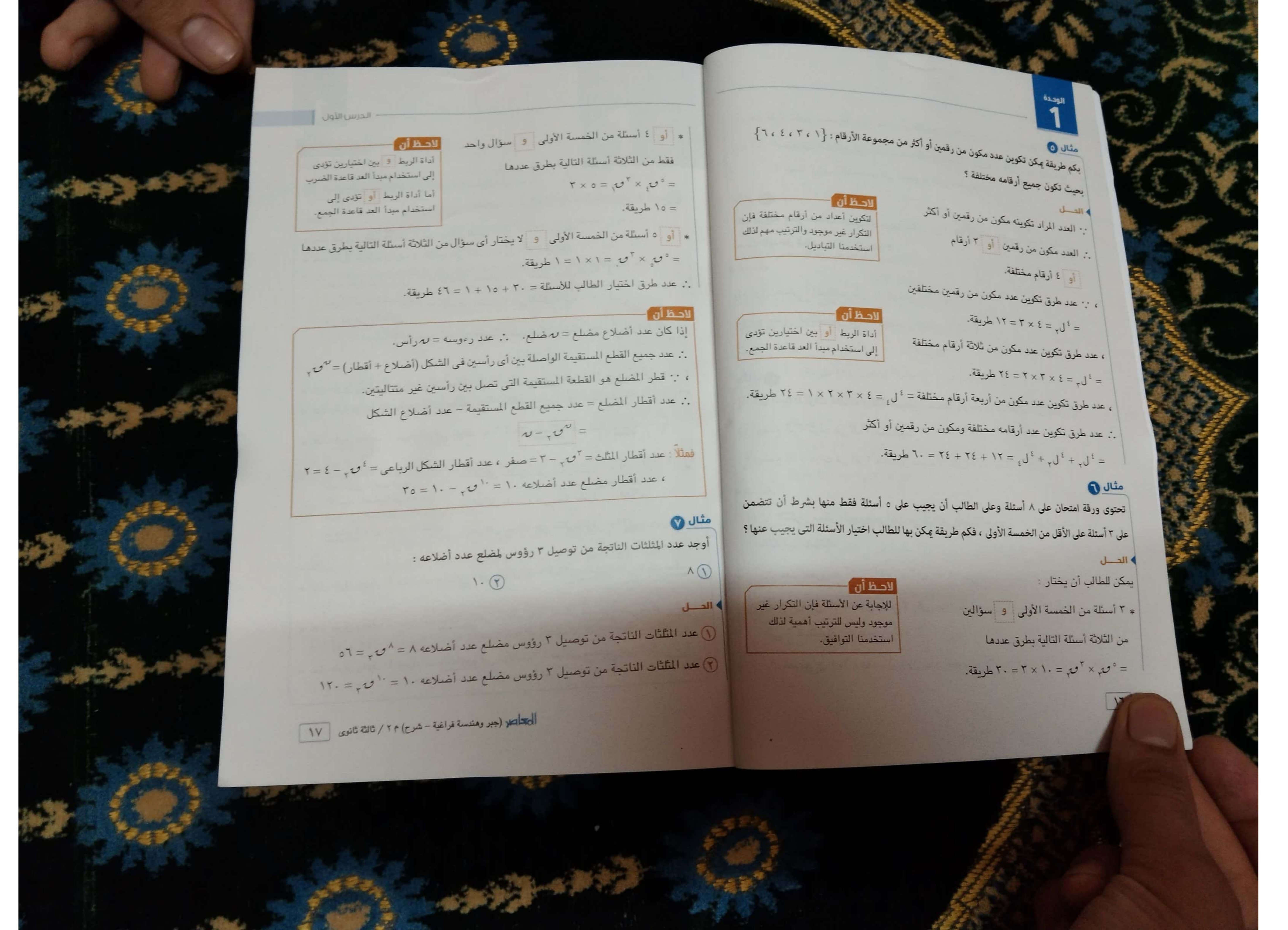
الحل

① ∵ التكرار ممكن «أى وضع أكثر من كرة فى نفس الصندوق» ، الترتيب غير مهم «الكرات متماثلة»

∴ عدد الطرق = $^{3+5-1}\text{ق}_5 = {}^{7}\text{ق}_5 = 21$ طريقة.

② نضع كرة فى كل صندوق «حتى لا يكون هناك صندوق فارغ» يتبقى لنا كرتان يتم توزيعهما على ٣ صناديق.

∴ تصبح ر = ٢ ، ن = ٣ ∴ عدد الطرق = $^{3+2-1}\text{ق}_2 = {}^{4}\text{ق}_2 = 6$ طرق.



مثال ٥

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين أو أكثر من مجموعة الأرقام : {١ ، ٣ ، ٤ ، ٦}
بحيث تكون جميع أرقامه مختلفة ؟

الحل

∵ العدد المراد تكوينه مكون من رقمين أو أكثر

∴ العدد مكون من رقمين **أو** ٣ أرقام

أو ٤ أرقام مختلفة.

∵ عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين

$= {}^{٤}ل_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$ طريقة.

، عدد طرق تكوين عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة

$= {}^{٤}ل_{٣} = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$ طريقة.

، عدد طرق تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة $= {}^{٤}ل_{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$ طريقة.

∴ عدد طرق تكوين عدد أرقامه مختلفة ومكون من رقمين أو أكثر

$= {}^{٤}ل_{٢} + {}^{٤}ل_{٣} + {}^{٤}ل_{٤} = ١٢ + ٢٤ + ٢٤ = ٦٠$ طريقة.

> **لاحظ أن**
> لتكوين أعداد من أرقام مختلفة فإن التكرار غير موجود والترتيب مهم لذلك استخدمنا التباديل.

> **لاحظ أن**
> أداة الربط **أو** بين اختيارين تؤدى إلى استخدام مبدأ العد قاعدة الجمع.

مثال ٦

تحتوى ورقة امتحان على ٨ أسئلة وعلى الطالب أن يجيب على ٥ أسئلة فقط منها بشرط أن تتضمن على ٣ أسئلة على الأقل من الخمسة الأولى ، فكم طريقة يمكن بها للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها ؟

الحل

يمكن للطالب أن يختار :

* ٣ أسئلة من الخمسة الأولى **و** سؤالين

من الثلاثة أسئلة التالية بطرق عددها

$= {}^{٥}ق_{٣} \times {}^{٣}ق_{٢} = ١٠ \times ٣ = ٣٠$ طريقة.

> **لاحظ أن**
> للإجابة عن الأسئلة فإن التكرار غير موجود وليس للترتيب أهمية لذلك استخدمنا التوافيق.

* **أو** ٤ أسئلة من الخمسة الأولى **و** سؤال واحد

فقط من الثلاثة أسئلة التالية بطرق عددها

$= {}^{٥}ق_{٤} \times {}^{٣}ق_{١} = ٥ \times ٣$

$= ١٥$ طريقة.

> **لاحظ أن**
> أداة الربط **و** بين اختيارين تؤدى إلى استخدام مبدأ العد قاعدة الضرب
> أما أداة الربط **أو** تؤدى إلى استخدام مبدأ العد قاعدة الجمع.

* **أو** ٥ أسئلة من الخمسة الأولى **و** لا يختار أى سؤال من الثلاثة أسئلة التالية بطرق عددها

$= {}^{٥}ق_{٥} \times {}^{٣}ق_{٠} = ١ \times ١ = ١$ طريقة.

∴ عدد طرق اختيار الطالب للأسئلة $= ٣٠ + ١٥ + ١ = ٤٦$ طريقة.

> **لاحظ أن**
> إذا كان عدد أضلاع مضلع = ن ضلع. ∴ عدد رءوسه = ن رأس.
> ∴ عدد جميع القطع المستقيمة الواصلة بين أى رأسين فى الشكل (أضلاع + أقطار) $= {}^{ن}ق_{٢}$
> ، ∵ قطر المضلع هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليين.
> ∴ عدد أقطار المضلع = عدد جميع القطع المستقيمة − عدد أضلاع الشكل
> $= {}^{ن}ق_{٢} - ن$
> **فمثلاً** : عدد أقطار المثلث $= {}^{٣}ق_{٢} - ٣ =$ صفر ، عدد أقطار الشكل الرباعى $= {}^{٤}ق_{٢} - ٤ = ٢$
> ، عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه $١٠ = {}^{١٠}ق_{٢} - ١٠ = ٣٥$

مثال ٧

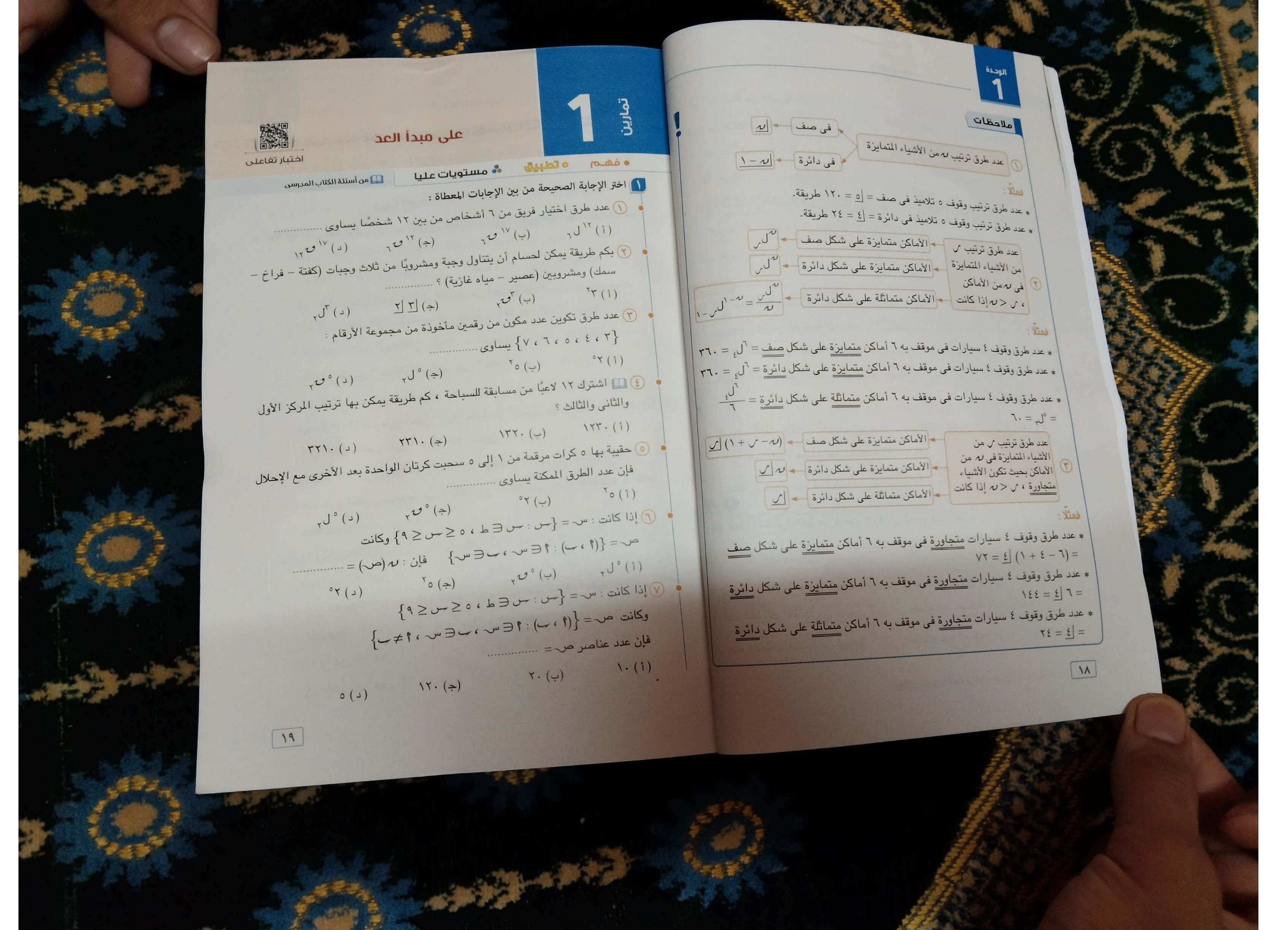
أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه :

① ٨ ② ١٠

الحل

① عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس مضلع عدد أضلاعه $٨ = {}^{٨}ق_{٣} = ٥٦$

② عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس مضلع عدد أضلاعه $١٠ = {}^{١٠}ق_{٣} = ١٢٠$



الوحدة 1

ملاحظات

① عدد طرق ترتيب ن من الأشياء المتمايزة:
- في صف ← $|ن$
- في دائرة ← $|ن - ١$

مثلاً :
* عدد طرق ترتيب وقوف ٥ تلاميذ في صف = $|٥$ = ١٢٠ طريقة.
* عدد طرق ترتيب وقوف ٥ تلاميذ في دائرة = $|٤$ = ٢٤ طريقة.

② عدد طرق ترتيب ر من الأشياء المتمايزة في ن من الأماكن ، ر < ن إذا كانت:
- الأماكن متمايزة على شكل صف ← $^{ن}ل_{ر}$
- الأماكن متمايزة على شكل دائرة ← $^{ن}ل_{ر}$
- الأماكن متماثلة على شكل دائرة ← $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ن} = {}^{ن-١}ل_{ر-١}$

مثلاً :
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات في موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل صف = $^{٦}ل_{٤}$ = ٣٦٠
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات في موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل دائرة = $^{٦}ل_{٤}$ = ٣٦٠
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات في موقف به ٦ أماكن متماثلة على شكل دائرة = $\frac{^{٦}ل_{٤}}{٦}$ = $^{٥}ل_{٣}$ = ٦٠

③ عدد طرق ترتيب ر من الأشياء المتمايزة في ن من الأماكن بحيث تكون الأشياء متجاورة ، ر < ن إذا كانت:
- الأماكن متمايزة على شكل صف ← $(ن - ر + ١)\ |ر$
- الأماكن متمايزة على شكل دائرة ← $ن\ |ر$
- الأماكن متماثلة على شكل دائرة ← $|ر$

مثلاً :
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل صف = $(٦ - ٤ + ١)\ |٤$ = ٧٢
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في موقف به ٦ أماكن متمايزة على شكل دائرة = $٦\ |٤$ = ١٤٤
* عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في موقف به ٦ أماكن متماثلة على شكل دائرة = $|٤$ = ٢٤

على مبدأ العد

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد طرق اختيار فريق من ٦ أشخاص من بين ١٢ شخصًا يساوى .....
(أ) $^{١٢}ل_{٦}$ (ب) $^{١٧}ق_{٦}$ (ج) $^{١٢}ق_{٦}$ (د) $^{١٧}ق_{١٢}$

② بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة – فراخ – سمك) ومشروبين (عصير – مياه غازية) ؟ .....
(أ) $٣^{٢}$ (ب) $^{٣}ق_{٢}$ (ج) $|٣\ |٢$ (د) $^{٣}ل_{٢}$

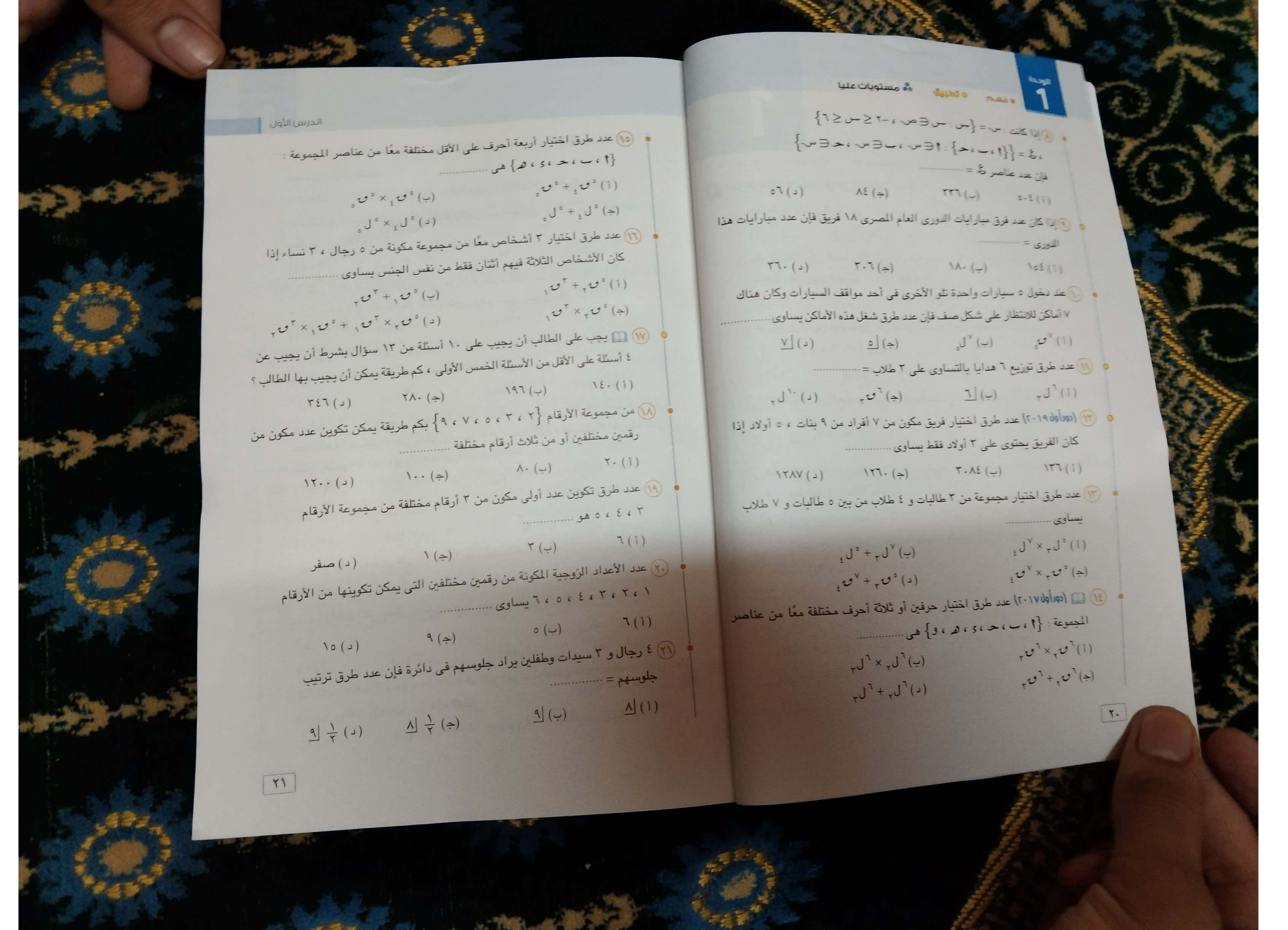
③ عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين مأخوذة من مجموعة الأرقام : {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} يساوى .....
(أ) $٢^{٥}$ (ب) $٥^{٢}$ (ج) $^{٥}ل_{٢}$ (د) $^{٥}ق_{٢}$

④ اشترك ١٢ لاعبًا من مسابقة للسباحة ، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثاني والثالث ؟
(أ) ١٢٣٠ (ب) ١٣٢٠ (ج) ٢٣١٠ (د) ٣٢١٠

⑤ حقيبة بها ٥ كرات مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال فإن عدد الطرق الممكنة يساوى .....
(أ) $٥^{٢}$ (ب) $٢^{٥}$ (ج) $^{٥}ق_{٢}$ (د) $^{٥}ل_{٢}$

⑥ إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩} وكانت ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س} فإن : ن(ص) = ...
(أ) $^{٥}ل_{٢}$ (ب) $^{٥}ق_{٢}$ (ج) $٥^{٢}$ (د) $٢^{٥}$

⑦ إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩} وكانت ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فإن عدد عناصر ص = ...
(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ١٢٠ (د) ٥



(٨) إذا كانت: س = {س : س ∈ ص ، -٢ ≤ س ≤ ٦}

ع = {{أ} ، {ب ، حـ} : أ ∈ س ، ب ∈ س ، حـ ∈ س}

فإن عدد عناصر ع = ...

(أ) ٥٠٤ (ب) ٣٣٦ (جـ) ٨٤ (د) ٥٦

(٩) إذا كان عدد فرق مباريات الدورى العام المصرى ١٨ فريق فإن عدد مباريات هذا الدورى = ...

(أ) ١٥٤ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٠٦ (د) ٣٦٠

(١٠) عند دخول ٥ سيارات واحدة تلو الأخرى فى أحد مواقف السيارات وكان هناك ٧ أماكن للانتظار على شكل صف فإن عدد طرق شغل هذه الأماكن يساوى ....

(أ) $^{٧}ق_{٥}$ (ب) $^{٧}ل_{٥}$ (جـ) ٥! (د) ٧!

(١١) عدد طرق توزيع ٦ هدايا بالتساوى على ٣ طلاب = ...

(أ) $^{٦}ل_{٢}$ (ب) ٦! (جـ) $^{٦}ق_{٢}$ (د) $^{١٠}ل_{٢}$

(١٢) (دور أول ٢٠١٩) عدد طرق اختيار فريق مكون من ٧ أفراد من ٩ بنات ، ٥ أولاد إذا كان الفريق يحتوى على ٣ أولاد فقط يساوى ....

(أ) ١٣٦ (ب) ٣٠٨٤ (جـ) ١٢٦٠ (د) ١٢٨٧

(١٣) عدد طرق اختيار مجموعة من ٣ طالبات و ٤ طلاب من بين ٥ طالبات و ٧ طلاب يساوى ....

(أ) $^{٥}ل_{٣} \times {}^{٧}ل_{٤}$ (ب) $^{٧}ل_{٣} + {}^{٥}ل_{٤}$

(جـ) $^{٥}ق_{٣} \times {}^{٧}ق_{٤}$ (د) $^{٥}ق_{٣} + {}^{٧}ق_{٤}$

(١٤) (دور أول ٢٠١٧) عدد طرق اختيار حرفين أو ثلاثة أحرف مختلفة معًا من عناصر المجموعة : {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و} هى ....

(أ) $^{٦}ق_{٢} \times {}^{٦}ق_{٣}$ (ب) $^{٦}ل_{٢} \times {}^{٦}ل_{٣}$

(جـ) $^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣}$ (د) $^{٦}ل_{٢} + {}^{٦}ل_{٣}$

(١٥) عدد طرق اختيار أربعة أحرف على الأقل مختلفة معًا من عناصر المجموعة : {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ} هى ....

(أ) $^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥}$ (ب) $^{٥}ق_{٤} \times {}^{٥}ق_{٥}$

(جـ) $^{٥}ل_{٤} + {}^{٥}ل_{٥}$ (د) $^{٥}ل_{٤} \times {}^{٥}ل_{٥}$

(١٦) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص معًا من مجموعة مكونة من ٥ رجال ، ٣ نساء إذا كان الأشخاص الثلاثة فيهم اثنان فقط من نفس الجنس يساوى ....

(أ) $^{٥}ق_{٢} + {}^{٣}ق_{١}$ (ب) $^{٥}ق_{١} + {}^{٣}ق_{٢}$

(جـ) $^{٥}ق_{٢} \times {}^{٣}ق_{١}$ (د) $^{٥}ق_{٢} \times {}^{٣}ق_{١} + {}^{٥}ق_{١} \times {}^{٣}ق_{٢}$

(١٧) يجب على الطالب أن يجيب على ١٠ أسئلة من ١٣ سؤال بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى ، كم طريقة يمكن أن يجيب بها الطالب ؟

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (جـ) ٢٨٠ (د) ٣٤٦

(١٨) من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين أو من ثلاث أرقام مختلفة ....

(أ) ٢٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠٠

(١٩) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو ....

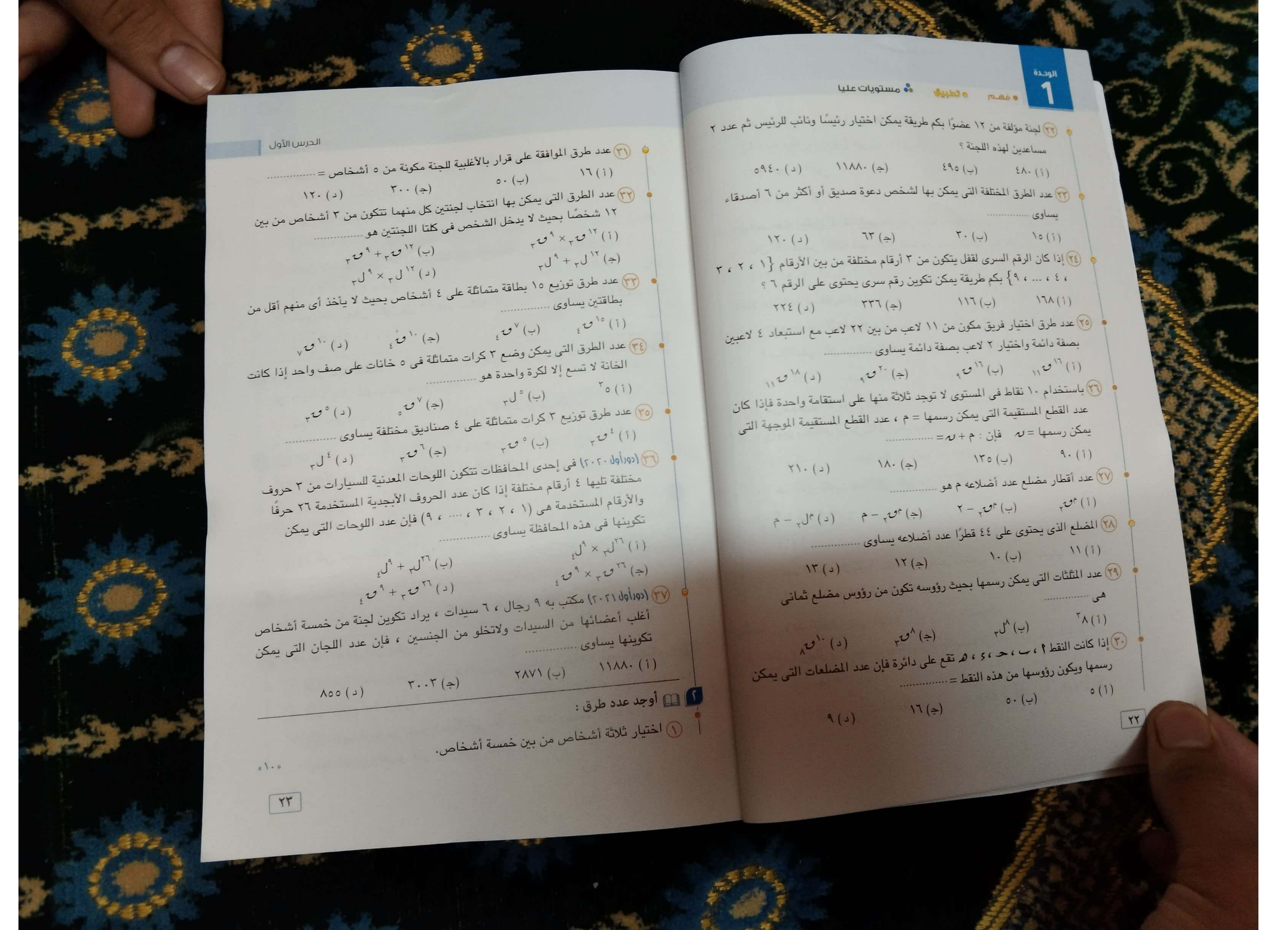
(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٠) عدد الأعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين التى يمكن تكوينها من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٥

(٢١) ٤ رجال و ٣ سيدات وطفلين يراد جلوسهم فى دائرة فإن عدد طرق ترتيب جلوسهم = ...

(أ) ٨! (ب) ٩! (جـ) $\frac{1}{2}$ ٨! (د) $\frac{1}{2}$ ٩!



(٢٢) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا بكم طريقة يمكن اختيار رئيسًا ونائب للرئيس ثم عدد ٢ مساعدين لهذه اللجنة ؟

(أ) ٤٨٠ (ب) ٤٩٥ (جـ) ١١٨٨٠ (د) ٥٩٤٠

(٢٣) عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها لشخص دعوة صديق أو أكثر من ٦ أصدقاء يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٣ (د) ١٢٠

(٢٤) إذا كان الرقم السرى لقفل يتكون من ٣ أرقام مختلفة من بين الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ٩} بكم طريقة يمكن تكوين رقم سرى يحتوى على الرقم ٦ ؟

(أ) ١٦٨ (ب) ١١٦ (جـ) ٣٣٦ (د) ٢٢٤

(٢٥) عدد طرق اختيار فريق مكون من ١١ لاعب من بين ٢٢ لاعب مع استبعاد ٤ لاعبين بصفة دائمة واختيار ٢ لاعب بصفة دائمة يساوى ....

(أ) $^{١٦}\text{ق}_{١١}$ (ب) $^{١٦}\text{ق}_{٩}$ (جـ) $^{٢٠}\text{ق}_{٩}$ (د) $^{١٨}\text{ق}_{١١}$

(٢٦) باستخدام ١٠ نقاط في المستوى لا توجد ثلاثة منها على استقامة واحدة فإذا كان عدد القطع المستقيمة التي يمكن رسمها = م ، عدد القطع المستقيمة الموجهة التي يمكن رسمها = ن فإن : م + ن = ...

(أ) ٩٠ (ب) ١٣٥ (جـ) ١٨٠ (د) ٢١٠

(٢٧) عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه م هو ....

(أ) $^{م}\text{ق}_{٢}$ (ب) $^{م}\text{ق}_{٢}$ − ٢ (جـ) $^{م}\text{ق}_{٢}$ − م (د) $^{م}\text{ل}_{٢}$ − م

(٢٨) المضلع الذي يحتوى على ٤٤ قطرًا عدد أضلاعه يساوى ....

(أ) ١١ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢٩) عدد المثلثات التي يمكن رسمها بحيث رؤوسه تكون من رؤوس مضلع ثماني هي ....

(أ) $٨^{٣}$ (ب) $^{٨}\text{ل}_{٣}$ (جـ) $^{٨}\text{ق}_{٣}$ (د) $^{١٠}\text{ق}_{٨}$

(٣٠) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ تقع على دائرة فإن عدد المضلعات التي يمكن رسمها ويكون رؤوسها من هذه النقط = ...

(أ) ٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٦ (د) ٩

(٣١) عدد طرق الموافقة على قرار بالأغلبية للجنة مكونة من ٥ أشخاص = ...

(أ) ١٦ (ب) ٥٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ١٢٠

(٣٢) عدد الطرق التي يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل الشخص في كلتا اللجنتين هو ....

(أ) $^{١٢}\text{ق}_{٣} \times {}^{٩}\text{ق}_{٣}$ (ب) $^{١٢}\text{ق}_{٣} + {}^{٩}\text{ق}_{٣}$ (جـ) $^{١٢}\text{ل}_{٣} + {}^{٩}\text{ل}_{٣}$ (د) $^{١٢}\text{ل}_{٣} \times {}^{٩}\text{ل}_{٣}$

(٣٣) عدد طرق توزيع ١٥ بطاقة متماثلة على ٤ أشخاص بحيث لا يأخذ أي منهم أقل من بطاقتين يساوى ....

(أ) $^{١٥}\text{ق}_{٤}$ (ب) $^{٧}\text{ق}_{٤}$ (جـ) $^{١٠}\text{ق}_{٤}$ (د) $^{١٠}\text{ق}_{٧}$

(٣٤) عدد الطرق التي يمكن وضع ٣ كرات متماثلة في ٥ خانات على صف واحد إذا كانت الخانة لا تسع إلا لكرة واحدة هو ....

(أ) $٥^{٣}$ (ب) $^{٥}\text{ل}_{٣}$ (جـ) $^{٧}\text{ق}_{٥}$ (د) $^{٥}\text{ق}_{٣}$

(٣٥) عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق مختلفة يساوى ....

(أ) $^{٤}\text{ق}_{٣}$ (ب) $^{٥}\text{ق}_{٣}$ (جـ) $^{٦}\text{ق}_{٣}$ (د) $^{٤}\text{ل}_{٣}$

(٣٦) (دور أول ٢٠٢٠) في إحدى المحافظات تتكون اللوحات المعدنية للسيارات من ٣ حروف مختلفة تليها ٤ أرقام مختلفة إذا كان عدد الحروف الأبجدية المستخدمة ٢٦ حرفًا والأرقام المستخدمة هي (١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ٩) فإن عدد اللوحات التي يمكن تكوينها في هذه المحافظة يساوى ....

(أ) $^{٢٦}\text{ل}_{٣} \times {}^{٩}\text{ل}_{٤}$ (ب) $^{٢٦}\text{ل}_{٣} + {}^{٩}\text{ل}_{٤}$ (جـ) $^{٢٦}\text{ق}_{٣} \times {}^{٩}\text{ق}_{٤}$ (د) $^{٢٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٩}\text{ق}_{٤}$

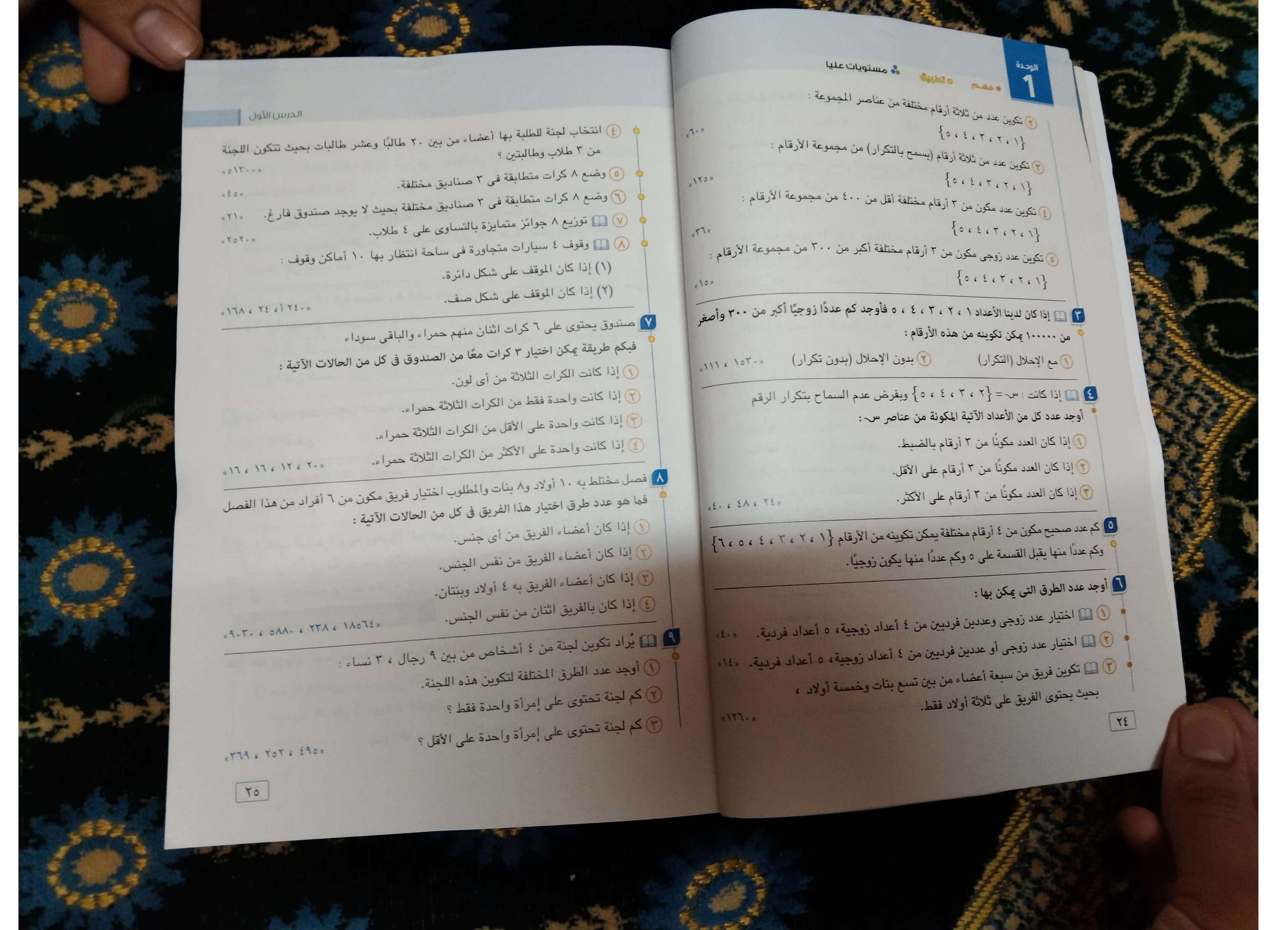
(٣٧) (دور أول ٢٠٢١) مكتب به ٩ رجال ، ٦ سيدات ، يراد تكوين لجنة من خمسة أشخاص أغلب أعضائها من السيدات ولاتخلو من الجنسين ، فإن عدد اللجان التي يمكن تكوينها يساوى ....

(أ) ١١٨٨٠ (ب) ٢٨٧١ (جـ) ٣٠٠٢ (د) ٨٥٥

٢ أوجد عدد طرق :

(١) اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص.

«١٠»



② تكوين عدد من ثلاثة أرقام مختلفة من عناصر المجموعة :
{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} «٦٠»

③ تكوين عدد من ثلاثة أرقام (يسمح بالتكرار) من مجموعة الأرقام :
{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} «١٢٥»

④ تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة أقل من ٤٠٠ من مجموعة الأرقام :
{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} «٣٦»

⑤ تكوين عدد زوجى مكون من ٣ أرقام مختلفة أكبر من ٣٠٠ من مجموعة الأرقام :
{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} «١٥»

٣ إذا كان لدينا الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فأوجد كم عددًا زوجيًا أكبر من ٣٠٠ وأصغر من ١٠٠٠٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام :
① مع الإحلال (التكرار) ② بدون الإحلال (بدون تكرار) «١٥٣٠٠ ، ١١١»

٤ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} وبفرض عدم السماح بتكرار الرقم
أوجد عدد كل من الأعداد الآتية المكونة من عناصر س :
① إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام بالضبط.
② إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأقل.
③ إذا كان العدد مكونًا من ٣ أرقام على الأكثر. «٢٤ ، ٤٨ ، ٤٠»

٥ كم عدد صحيح مكون من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
وكم عددًا منها يقبل القسمة على ٥ وكم عددًا منها يكون زوجيًا.

٦ أوجد عدد الطرق التى يمكن بها :
① اختيار عدد زوجى وعددين فرديين من ٤ أعداد زوجية، ٥ أعداد فردية. «٤٠»
② اختيار عدد زوجى أو عددين فرديين من ٤ أعداد زوجية، ٥ أعداد فردية. «١٤»
③ تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات وخمسة أولاد ، بحيث يحتوى الفريق على ثلاثة أولاد فقط. «١٢٦٠»

④ انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالبًا وعشر طالبات بحيث تتكون اللجنة من ٣ طلاب وطالبتين ؟ «٥١٣٠٠»

⑤ وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة. «٤٥»

⑥ وضع ٨ كرات متطابقة فى ٣ صناديق مختلفة بحيث لا يوجد صندوق فارغ. «٢١»

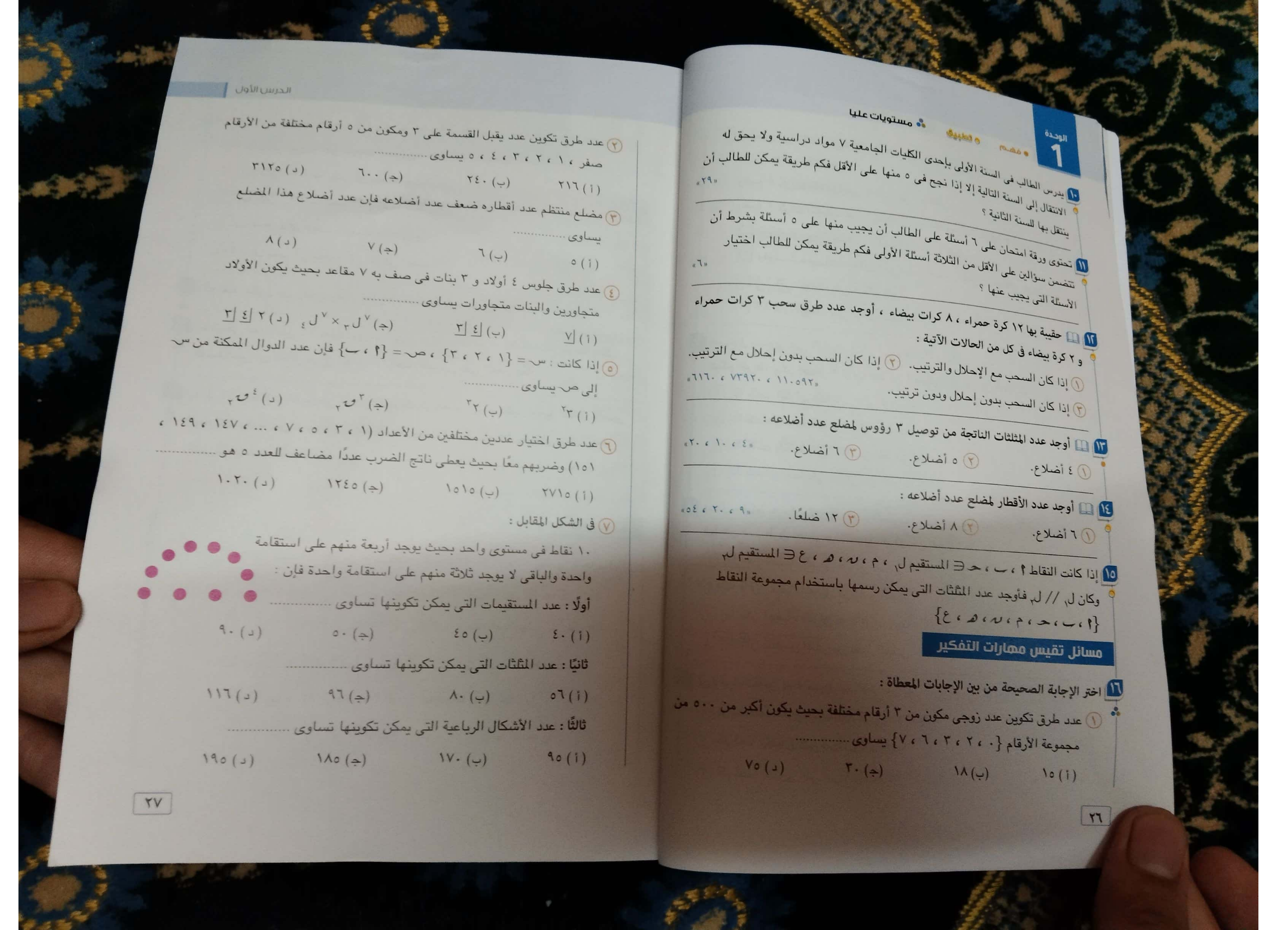
⑦ توزيع ٨ جوائز متمايزة بالتساوى على ٤ طلاب. «٢٥٢٠»

⑧ وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف :
(١) إذا كان الموقف على شكل دائرة.
(٢) إذا كان الموقف على شكل صف. «٢٤٠ ، ٢٤ ، ١٦٨»

٧ صندوق يحتوى على ٦ كرات اثنان منهم حمراء والباقى سوداء
فبكم طريقة يمكن اختيار ٣ كرات معًا من الصندوق فى كل من الحالات الآتية :
① إذا كانت الكرات الثلاثة من أى لون.
② إذا كانت واحدة فقط من الكرات الثلاثة حمراء.
③ إذا كانت واحدة على الأقل من الكرات الثلاثة حمراء.
④ إذا كانت واحدة على الأكثر من الكرات الثلاثة حمراء. «٢٠ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٦»

٨ فصل مختلط به ١٠ أولاد و٨ بنات والمطلوب اختيار فريق مكون من ٦ أفراد من هذا الفصل فما هو عدد طرق اختيار هذا الفريق فى كل من الحالات الآتية :
① إذا كان أعضاء الفريق من أى جنس.
② إذا كان أعضاء الفريق من نفس الجنس.
③ إذا كان أعضاء الفريق به ٤ أولاد وبنتان.
④ إذا كان بالفريق اثنان من نفس الجنس. «١٨٥٦٤ ، ٢٣٨ ، ٥٨٨٠ ، ٩٠٣٠»

٩ يُراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء :
① أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة.
② كم لجنة تحتوى على إمرأة واحدة فقط ؟
③ كم لجنة تحتوى على إمرأة واحدة على الأقل ؟
«٤٩٥ ، ٢٥٢ ، ٣٦٩»



الوحدة 1 • فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا

١٠ يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٧ مواد دراسية ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح فى ٥ منها على الأقل فكم طريقة يمكن للطالب أن ينتقل بها للسنة الثانية ؟ «٢٩»

١١ تحتوى ورقة امتحان على ٦ أسئلة على الطالب أن يجيب منها على ٥ أسئلة بشرط أن تتضمن سؤالين على الأقل من الثلاثة أسئلة الأولى فكم طريقة يمكن للطالب اختيار الأسئلة التى يجيب عنها ؟ «٦»

١٢ حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء ، أوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء و ٢ كرة بيضاء فى كل من الحالات الآتية :

① إذا كان السحب مع الإحلال والترتيب. ② إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب.

③ إذا كان السحب بدون إحلال ودون ترتيب. «١١٠٥٩٢ ، ٧٣٩٢٠ ، ٦١٦٠»

١٣ أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه :

① ٤ أضلاع. ② ٥ أضلاع. ③ ٦ أضلاع. «٤ ، ١٠ ، ٢٠»

١٤ أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه :

① ٦ أضلاع. ② ٨ أضلاع. ③ ١٢ ضلعًا. «٩ ، ٢٠ ، ٥٤»

١٥ إذا كانت النقاط أ ، ب ، حـ ∈ المستقيم $ل_1$ ، م ، ن ، هـ ، ع ∈ المستقيم $ل_2$ وكان $ل_1$ // $ل_2$ فأوجد عدد المثلثات التى يمكن رسمها باستخدام مجموعة النقاط {أ ، ب ، حـ ، م ، ن ، هـ ، ع}

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد طرق تكوين عدد زوجى مكون من ٣ أرقام مختلفة بحيث يكون أكبر من ٥٠٠ من مجموعة الأرقام {٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧} يساوى ....

(أ) ١٥ (ب) ١٨ (جـ) ٣٠ (د) ٧٥

② عدد طرق تكوين عدد يقبل القسمة على ٣ ومكون من ٥ أرقام مختلفة من الأرقام صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ يساوى ....

(أ) ٢١٦ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٦٠٠ (د) ٣١٢٥

③ مضلع منتظم عدد أقطاره ضعف عدد أضلاعه فإن عدد أضلاع هذا المضلع يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

④ عدد طرق جلوس ٤ أولاد و ٣ بنات فى صف به ٧ مقاعد بحيث يكون الأولاد متجاورين والبنات متجاورات يساوى ....

(أ) $\underline{|7}$ (ب) $\underline{|4}\ \underline{|3}$ (جـ) $^7ل_3 \times {}^7ل_4$ (د) $2\ \underline{|4}\ \underline{|3}$

⑤ إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣} ، ص = {أ ، ب} فإن عدد الدوال الممكنة من س إلى ص يساوى ....

(أ) 3^2 (ب) 2^3 (جـ) $ع_2^3$ (د) $ع_2^4$

⑥ عدد طرق اختيار عددين مختلفين من الأعداد (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ١٤٧ ، ١٤٩ ، ١٥١) وضربهم معًا بحيث يعطى ناتج الضرب عددًا مضاعف للعدد ٥ هو ....

(أ) ٢٧١٥ (ب) ١٥١٥ (جـ) ١٢٤٥ (د) ١٠٢٠

⑦ فى الشكل المقابل :

١٠ نقاط فى مستوى واحد بحيث يوجد أربعة منهم على استقامة واحدة والباقى لا يوجد ثلاثة منهم على استقامة واحدة فإن :

أولًا : عدد المستقيمات التى يمكن تكوينها تساوى ....

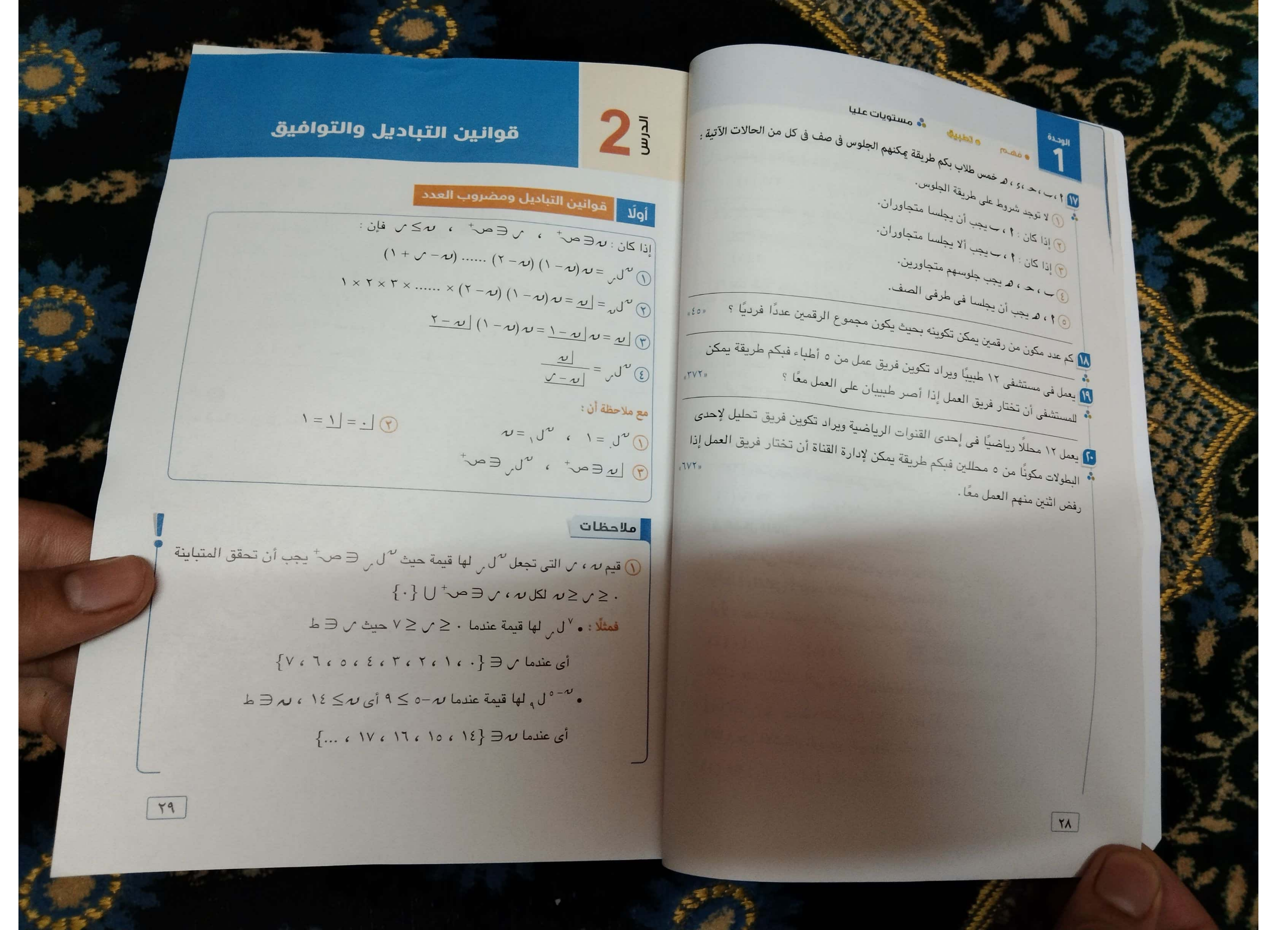
(أ) ٤٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٥٠ (د) ٩٠

ثانيًا : عدد المثلثات التى يمكن تكوينها تساوى ....

(أ) ٥٦ (ب) ٨٠ (جـ) ٩٦ (د) ١١٦

ثالثًا : عدد الأشكال الرباعية التى يمكن تكوينها تساوى ....

(أ) ٩٥ (ب) ١٧٠ (جـ) ١٨٥ (د) ١٩٥



● مهم ● تطبيق ⁘ مستويات عليا

أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمس طلاب بكم طريقة يمكنهم الجلوس فى صف فى كل من الحالات الآتية :

١٧ ① لا توجد شروط على طريقة الجلوس.

② إذا كان : أ ، ب يجب أن يجلسا متجاوران.

③ إذا كان : أ ، ب يجب ألا يجلسا متجاوران.

④ ب ، حـ ، هـ يجب جلوسهم متجاورين.

⑤ أ ، هـ يجب أن يجلسا فى طرفى الصف.

١٨ كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه بحيث يكون مجموع الرقمين عددًا فرديًا ؟ «٤٥»

١٩ يعمل فى مستشفى ١٢ طبيبًا ويراد تكوين فريق عمل من ٥ أطباء فبكم طريقة يمكن للمستشفى أن تختار فريق العمل إذا أصر طبيبان على العمل معًا ؟ «٣٧٢»

٢٠ يعمل ١٢ محللًا رياضيًا فى إحدى القنوات الرياضية ويراد تكوين فريق تحليل لإحدى البطولات مكونًا من ٥ محللين فبكم طريقة يمكن لإدارة القناة أن تختار فريق العمل إذا رفض اثنين منهم العمل معًا. «٦٧٢»

الدرس 2 قوانين التباديل والتوافيق

أولًا قوانين التباديل ومضروب العدد

إذا كان : $ن \in ص^+$ ، $ر \in ص^+$ ، $ن \geq ر$ فإن :

① $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \ldots\ldots (ن-ر+١)$

② $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-١)(ن-٢) \times \ldots\ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$

③ $\underline{|ن} = ن\underline{|ن-١} = ن(ن-١)\underline{|ن-٢}$

④ $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

مع ملاحظة أن :

① $^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$

② $\underline{|٠} = \underline{|١} = ١$

③ $\underline{|ن} \in ص^+$ ، $^{ن}ل_{ر} \in ص^+$

ملاحظات

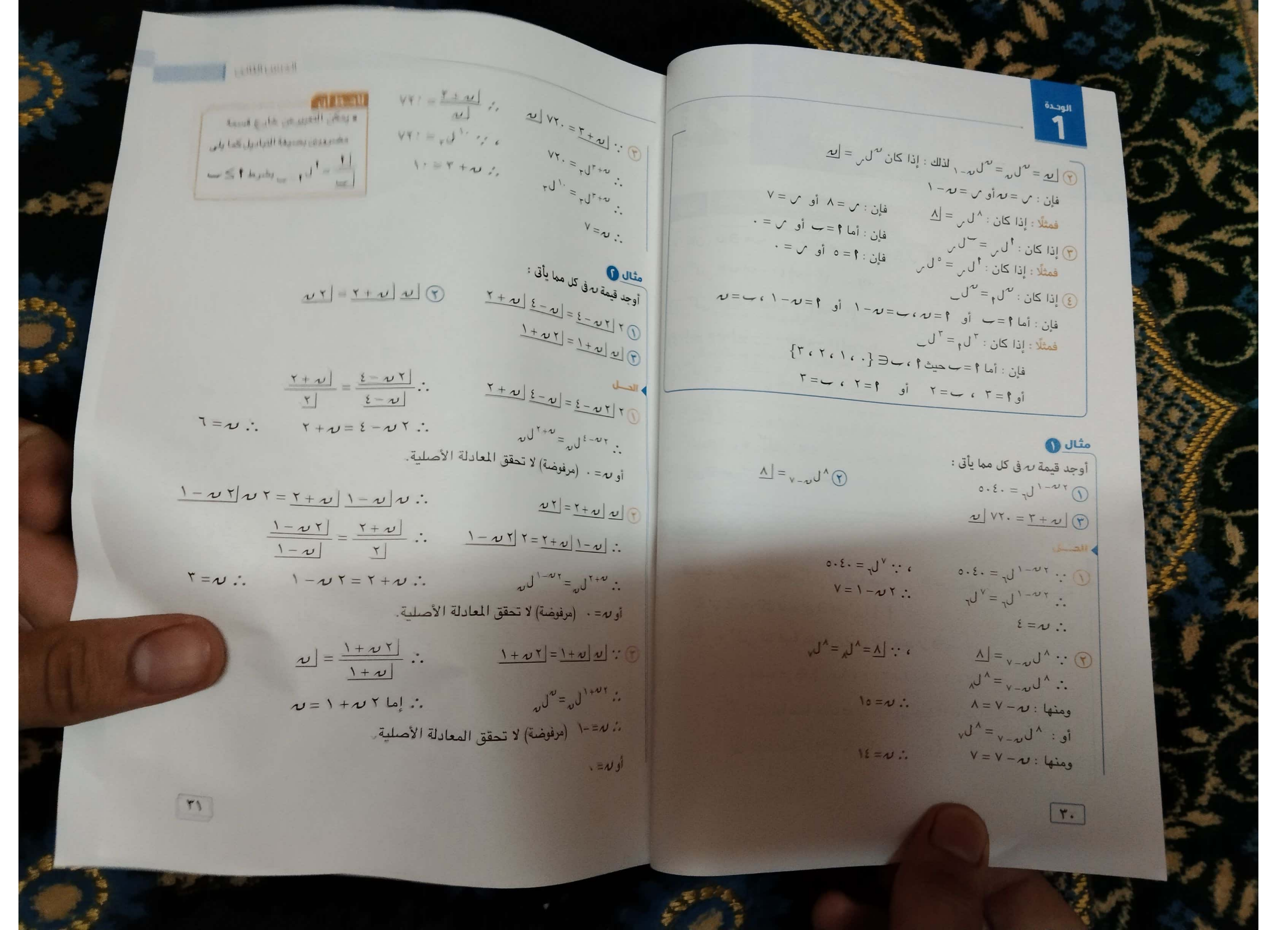
① قيم ن ، ر التى تجعل $^{ن}ل_{ر}$ لها قيمة حيث $^{ن}ل_{ر} \in ص^+$ يجب أن تحقق المتباينة $٠ \leq ر \leq ن$ لكل $ن ، ر \in ص^+ \cup \{٠\}$

فمثلًا : • $^{٧}ل_{ر}$ لها قيمة عندما $٠ \leq ر \leq ٧$ حيث $ر \in ط$

أى عندما $ر \in \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$

• $^{ن-٥}ل_{٩}$ لها قيمة عندما $ن-٥ \geq ٩$ أى $ن \geq ١٤$ ، $ن \in ط$

أى عندما $ن \in \{١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، \ldots\}$



الوحدة 1

(٢) $\lfloor ن = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١}$ لذلك : إذا كان ${}^{ن}ل_{ر} = \lfloor ن$

فإن : ر = ن أو ر = ن − ١

فمثلاً : إذا كان : ${}^{٨}ل_{ر} = \lfloor ٨$ فإن : ر = ٨ أو ر = ٧

(٣) إذا كان : ${}^{أ}ل_{ر} = {}^{ب}ل_{ر}$ فإن : أما أ = ب أو ر = ٠ .

فمثلاً : إذا كان : ${}^{أ}ل_{ر} = {}^{٥}ل_{ر}$ فإن : أ = ٥ أو ر = ٠ .

(٤) إذا كان : ${}^{ن}ل_{أ} = {}^{ن}ل_{ب}$

فإن : أما أ = ب أو أ = ن ، ب = ن − ١ أو أ = ن − ١ ، ب = ن

فمثلاً : إذا كان : ${}^{٣}ل_{أ} = {}^{٣}ل_{ب}$

فإن : أما أ = ب حيث أ ، ب ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

أو أ = ٣ ، ب = ٢ أو أ = ٢ ، ب = ٣

مثال 1

أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

(١) ${}^{٢ن-١}ل_{٦} = ٥٠٤٠$ (٢) ${}^{٨}ل_{ن-٧} = \lfloor ٨$

(٣) $\lfloor ن+٣ = ٧٢٠ \lfloor ن$

الحل

(١) ∵ ${}^{٢ن-١}ل_{٦} = ٥٠٤٠$ ، ∵ ${}^{٧}ل_{٦} = ٥٠٤٠$

∴ ${}^{٢ن-١}ل_{٦} = {}^{٧}ل_{٦}$ ∴ ٢ن − ١ = ٧

∴ ن = ٤

(٢) ∵ ${}^{٨}ل_{ن-٧} = \lfloor ٨$ ، ∵ $\lfloor ٨ = {}^{٨}ل_{٨} = {}^{٨}ل_{٧}$

∴ ${}^{٨}ل_{ن-٧} = {}^{٨}ل_{٨}$

ومنها : ن − ٧ = ٨ ∴ ن = ١٥

أو : ${}^{٨}ل_{ن-٧} = {}^{٨}ل_{٧}$

ومنها : ن − ٧ = ٧ ∴ ن = ١٤

(٣) ∵ $\lfloor ن+٣ = ٧٢٠ \lfloor ن$ ∴ $\frac{\lfloor ن+٣}{\lfloor ن} = ٧٢٠$

∴ ${}^{ن+٣}ل_{٣} = ٧٢٠$ ، ∵ ${}^{١٠}ل_{٣} = ٧٢٠$

∴ ${}^{ن+٣}ل_{٣} = {}^{١٠}ل_{٣}$ ∴ ن + ٣ = ١٠

∴ ن = ٧

• يمكن التعبير عن خارج قسمة مضروبين بصيغة التباديل كما يلي
$\frac{\lfloor أ}{\lfloor ب} = {}^{أ}ل_{أ-ب}$ بشرط أ ≥ ب

مثال 2

أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

(١) $٢ \lfloor ٢ن-٤ = \lfloor ن-٤ \lfloor ن+٢$ (٢) $\lfloor ن \lfloor ن+٢ = \lfloor ٢ن$

(٣) $\lfloor ن \lfloor ن+١ = \lfloor ٢ن+١$

الحل

(١) $٢ \lfloor ٢ن-٤ = \lfloor ن-٤ \lfloor ن+٢$ ∴ $\frac{\lfloor ٢ن-٤}{\lfloor ن-٤} = \frac{\lfloor ن+٢}{\lfloor ٢}$

∴ ${}^{٢ن-٤}ل_{ن} = {}^{ن+٢}ل_{ن}$ ∴ ٢ن − ٤ = ن + ٢ ∴ ن = ٦

أو ن = ٠ (مرفوضة) لا تحقق المعادلة الأصلية.

(٢) $\lfloor ن \lfloor ن+٢ = \lfloor ٢ن$ ∴ $ن \lfloor ن-١ \lfloor ن+٢ = ٢ن \lfloor ٢ن-١$

∴ $\lfloor ن-١ \lfloor ن+٢ = ٢ \lfloor ٢ن-١$ ∴ $\frac{\lfloor ن+٢}{\lfloor ٢} = \frac{\lfloor ٢ن-١}{\lfloor ن-١}$

∴ ${}^{ن+٢}ل_{ن} = {}^{٢ن-١}ل_{ن}$ ∴ ن + ٢ = ٢ن − ١ ∴ ن = ٣

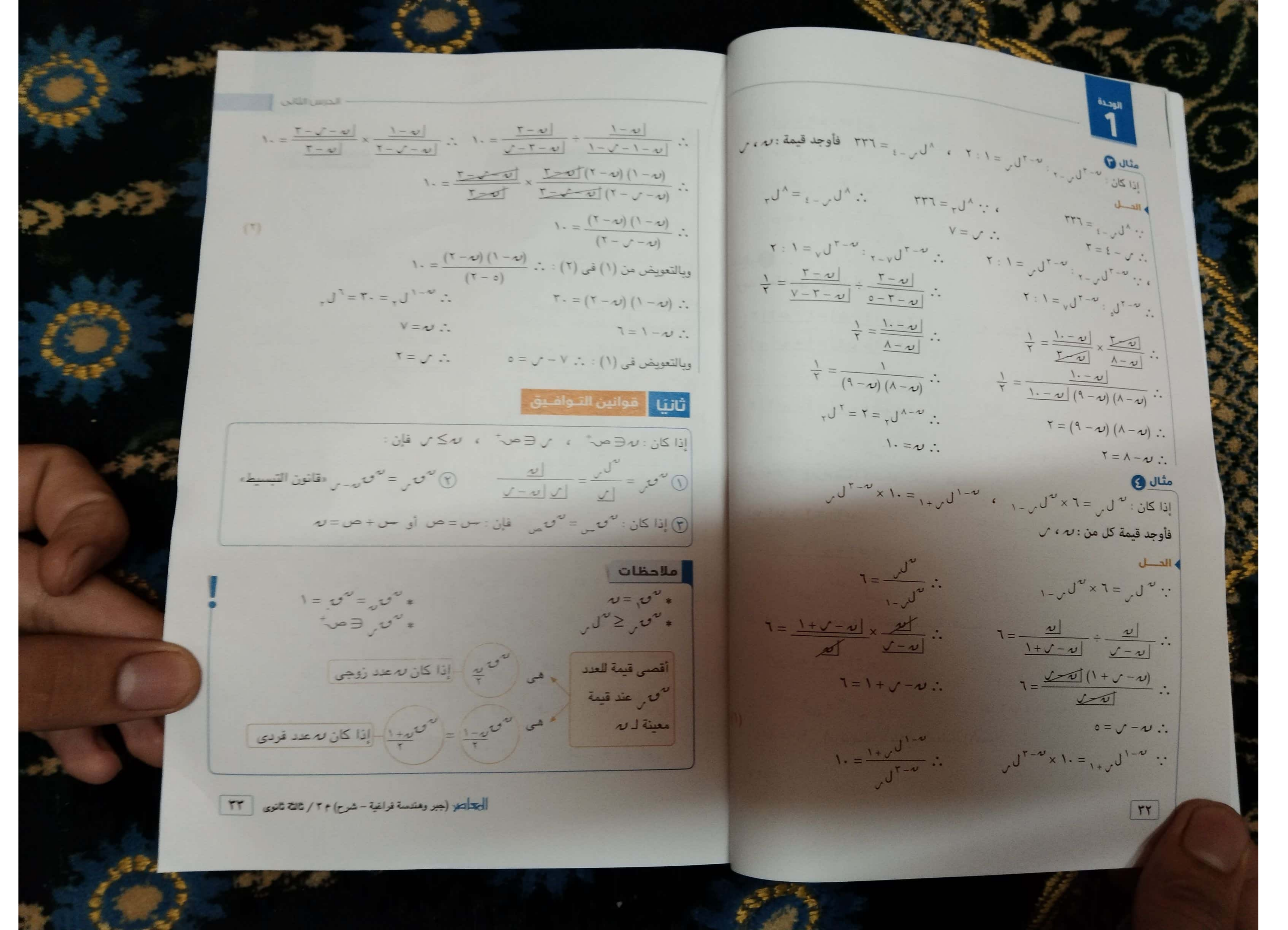
أو ن = ٠ (مرفوضة) لا تحقق المعادلة الأصلية.

(٣) ∵ $\lfloor ن \lfloor ن+١ = \lfloor ٢ن+١$ ∴ $\frac{\lfloor ٢ن+١}{\lfloor ن+١} = \lfloor ن$

∴ ${}^{٢ن+١}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن}$ ∴ إما ٢ن + ١ = ن

∴ ن = −١ (مرفوضة) لا تحقق المعادلة الأصلية.

أو ن = ٠



مثال ٣ إذا كان: $^{ن-٢}ل_{ر-٢} : {}^{ن-٢}ل_{ر} = ١ : ٢$ ، $^{٨}ل_{ر-٤} = ٣٣٦$ فأوجد قيمة: ن ، ر

الحل

$\because {}^{٨}ل_{ر-٤} = ٣٣٦$ ، $\because {}^{٨}ل_{٣} = ٣٣٦$ $\therefore {}^{٨}ل_{ر-٤} = {}^{٨}ل_{٣}$

$\therefore ر - ٤ = ٣$ $\therefore ر = ٧$

، $\because {}^{ن-٢}ل_{ر-٢} : {}^{ن-٢}ل_{ر} = ١ : ٢$ $\therefore {}^{ن-٢}ل_{٧-٢} : {}^{ن-٢}ل_{٧} = ١ : ٢$

$\therefore {}^{ن-٢}ل_{٥} : {}^{ن-٢}ل_{٧} = ١ : ٢$ $\therefore \frac{|ن-٣}{|ن-٣-٥} \div \frac{|ن-٣}{|ن-٣-٧} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{\cancel{|ن-٣}}{|ن-٨} \times \frac{|ن-١٠}{\cancel{|ن-٣}} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \frac{|ن-١٠}{|ن-٨} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{|ن-١٠}{(ن-٨)(ن-٩)|ن-١٠} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \frac{١}{(ن-٨)(ن-٩)} = \frac{١}{٢}$

$\therefore (ن-٨)(ن-٩) = ٢$ $\therefore {}^{ن-٨}ل_{٢} = ٢ = {}^{٢}ل_{٢}$

$\therefore ن - ٨ = ٢$ $\therefore ن = ١٠$

مثال ٤ إذا كان: $^{ن}ل_{ر} = ٦ \times {}^{ن}ل_{ر-١}$ ، $^{ن-١}ل_{ر+١} = ١٠ \times {}^{ن-٢}ل_{ر}$

فأوجد قيمة كل من: ن ، ر

الحل

$\because {}^{ن}ل_{ر} = ٦ \times {}^{ن}ل_{ر-١}$ $\therefore \frac{^{ن}ل_{ر}}{^{ن}ل_{ر-١}} = ٦$

$\therefore \frac{|ن}{|ن-ر} \div \frac{|ن}{|ن-ر+١} = ٦$ $\therefore \frac{\cancel{|ن}}{|ن-ر} \times \frac{|ن-ر+١}{\cancel{|ن}} = ٦$

$\therefore \frac{(ن-ر+١)\cancel{|ن-ر}}{\cancel{|ن-ر}} = ٦$ $\therefore ن - ر + ١ = ٦$

$\therefore ن - ر = ٥$

$\because {}^{ن-١}ل_{ر+١} = ١٠ \times {}^{ن-٢}ل_{ر}$ $\therefore \frac{^{ن-١}ل_{ر+١}}{^{ن-٢}ل_{ر}} = ١٠$

$\therefore \frac{|ن-١}{|ن-١-ر-١} \div \frac{|ن-٢}{|ن-٢-ر} = ١٠$ $\therefore \frac{|ن-١}{|ن-ر-٢} \times \frac{|ن-ر-٢}{|ن-٢} = ١٠$

$\therefore \frac{(ن-١)(ن-٢)\cancel{|ن-٣}}{(ن-ر-٢)\cancel{|ن-ر-٣}} \times \frac{\cancel{|ن-ر-٣}}{\cancel{|ن-٣}} = ١٠$

$\therefore \frac{(ن-١)(ن-٢)}{(ن-ر-٢)} = ١٠$ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢): $\therefore \frac{(ن-١)(ن-٢)}{(٥-٢)} = ١٠$

$\therefore (ن-١)(ن-٢) = ٣٠$ $\therefore {}^{ن-١}ل_{٢} = ٣٠ = {}^{٦}ل_{٢}$

$\therefore ن - ١ = ٦$ $\therefore ن = ٧$

وبالتعويض في (١): $\therefore ٧ - ر = ٥$ $\therefore ر = ٢$

ثانيًا قوانين التوافيق

إذا كان: $ن \in ص^{+}$ ، $ر \in ص^{+}$ ، $ن \ge ر$ فإن:

① $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|ر} = \frac{|ن}{|ر\ |ن-ر}$ ② $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ «قانون التبسيط»

③ إذا كان: $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن: س = ص أو س + ص = ن

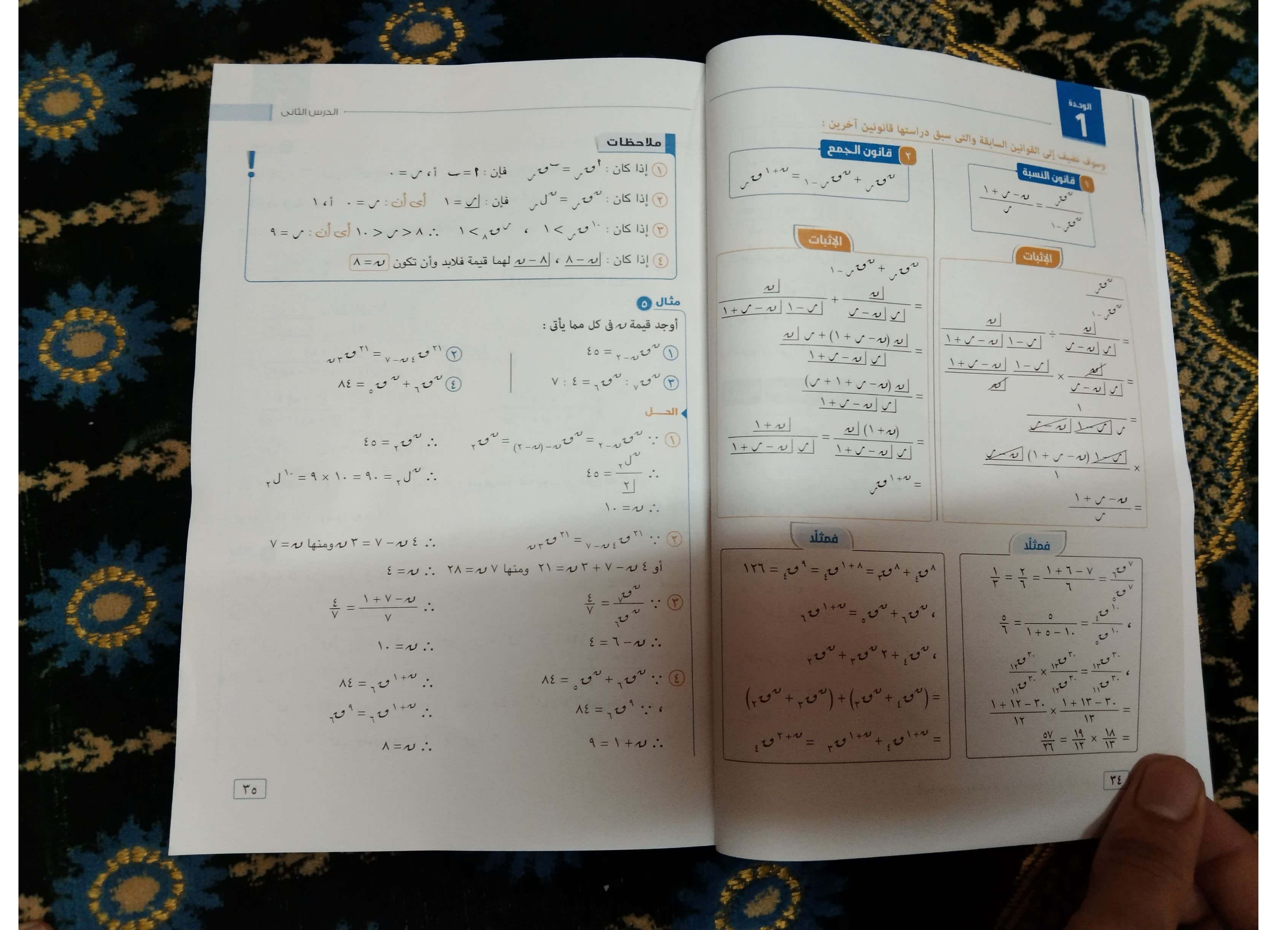
ملاحظات

* $^{ن}ق_{١} = ن$
* $^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$
* $^{ن}ق_{ر} \le {}^{ن}ل_{ر}$
* $^{ن}ق_{ر} \in ص^{+}$

أقصى قيمة للعدد $^{ن}ق_{ر}$ عند قيمة معينة لـ ن

هي $^{ن}ق_{\frac{ن}{٢}}$ إذا كان ن عدد زوجي

هي $^{ن}ق_{\frac{ن-١}{٢}} = {}^{ن}ق_{\frac{ن+١}{٢}}$ إذا كان ن عدد فردي



الوحدة 1

وسوف نضيف إلى القوانين السابقة والتى سبق دراستها قانونين آخرين :

١ قانون النسبة

$$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{ن-ر+1}{ر}$$

الإثبات

$\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن-ر} \div \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 \lfloor ن-ر+1}$

$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن-ر} \times \frac{\lfloor ر-1 \lfloor ن-ر+1}{\lfloor ن}$

$= \frac{1}{ر \lfloor ر-1 \lfloor ن-ر} \times \frac{\lfloor ر-1 \,(ن-ر+1) \lfloor ن-ر}{1}$

$= \frac{ن-ر+1}{ر}$

٢ قانون الجمع

$$^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$$

الإثبات

$^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن-ر} + \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر-1 \lfloor ن-ر+1}$

$= \frac{\lfloor ن\,(ن-ر+1) + ر \lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن-ر+1}$

$= \frac{\lfloor ن\,(ن-ر+1+ر)}{\lfloor ر \lfloor ن-ر+1}$

$= \frac{(ن+1)\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن-ر+1} = \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر \lfloor ن-ر+1}$

$= {}^{ن+1}ق_{ر}$

فمثلًا

$\frac{^{7}ق_{6}}{^{7}ق_{5}} = \frac{7-6+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

، $\frac{^{10}ق_{4}}{^{10}ق_{5}} = \frac{5}{10-5+1} = \frac{5}{6}$

، $\frac{^{30}ق_{13}}{^{30}ق_{11}} = \frac{^{30}ق_{13}}{^{30}ق_{12}} \times \frac{^{30}ق_{12}}{^{30}ق_{11}}$

$= \frac{30-13+1}{13} \times \frac{30-12+1}{12}$

$= \frac{18}{13} \times \frac{19}{12} = \frac{57}{26}$

فمثلًا

$^{8}ق_{4} + {}^{8}ق_{3} = {}^{8+1}ق_{4} = {}^{9}ق_{4} = 126$

، $^{ن}ق_{6} + {}^{ن}ق_{5} = {}^{ن+1}ق_{6}$

، $^{ن}ق_{4} + 2\,{}^{ن}ق_{3} + {}^{ن}ق_{2}$

$= ({}^{ن}ق_{4} + {}^{ن}ق_{3}) + ({}^{ن}ق_{3} + {}^{ن}ق_{2})$

$= {}^{ن+1}ق_{4} + {}^{ن+1}ق_{3} = {}^{ن+2}ق_{4}$

ملاحظات

١ إذا كان : $^{أ}ق_{ر} = {}^{ب}ق_{ر}$ فإن : أ = ب ، ر = ٠

٢ إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ فإن : $\lfloor ر = 1$ أى أن : ر = ٠ ، ١

٣ إذا كان : $^{10}ق_{ر} > 1$ ، $^{ر}ق_{8} > 1$ ∴ $8 < ر < 10$ أى أن : ر = ٩

٤ إذا كان : $\lfloor ن-8$ ، $\lfloor 8-ن$ لهما قيمة فلابد وأن تكون ن = ٨

مثال ٥

أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى :

١ $^{ن}ق_{ن-2} = 45$

٢ $^{21}ق_{4ن-7} = {}^{21}ق_{3ن}$

٣ $^{ن}ق_{7} : {}^{ن}ق_{6} = 4 : 7$

٤ $^{ن}ق_{6} + {}^{ن}ق_{5} = 84$

الحل

١ ∵ $^{ن}ق_{ن-2} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-2)} = {}^{ن}ق_{2}$ ∴ $^{ن}ق_{2} = 45$

∴ $\frac{^{ن}ل_{2}}{\lfloor 2} = 45$ ∴ $^{ن}ل_{2} = 90 = 10 \times 9 = {}^{10}ل_{2}$

∴ ن = ١٠

٢ ∵ $^{21}ق_{4ن-7} = {}^{21}ق_{3ن}$ ∴ ٤ن − ٧ = ٣ن ومنها ن = ٧

أو ٤ن − ٧ + ٣ن = ٢١ ومنها ٧ن = ٢٨ ∴ ن = ٤

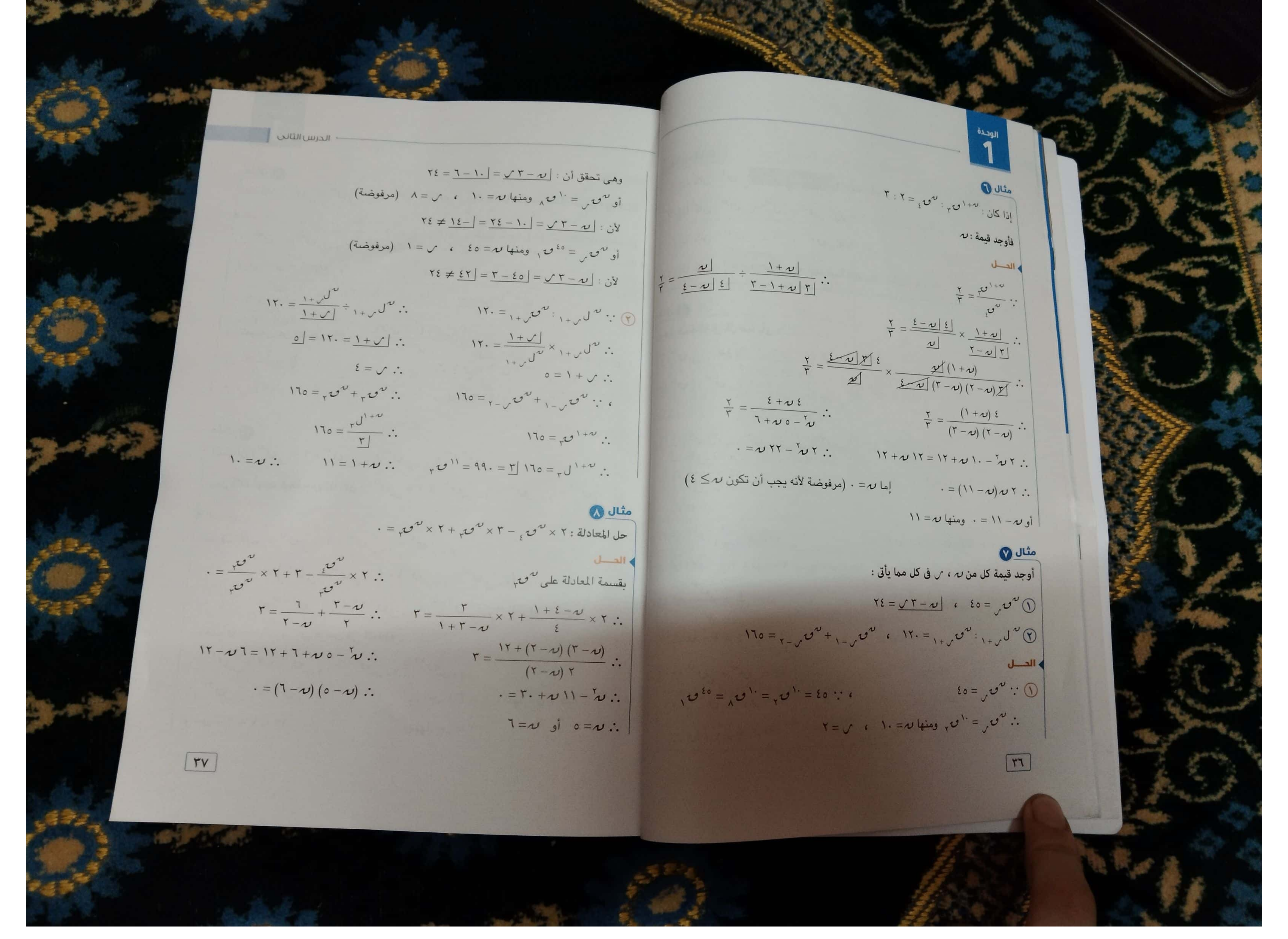
٣ ∵ $\frac{^{ن}ق_{7}}{^{ن}ق_{6}} = \frac{4}{7}$ ∴ $\frac{ن-7+1}{7} = \frac{4}{7}$

∴ ن − ٦ = ٤ ∴ ن = ١٠

٤ ∵ $^{ن}ق_{6} + {}^{ن}ق_{5} = 84$ ∴ $^{ن+1}ق_{6} = 84$

، ∵ $^{9}ق_{6} = 84$ ∴ $^{ن+1}ق_{6} = {}^{9}ق_{6}$

∴ ن + ١ = ٩ ∴ ن = ٨



مثال ٦

إذا كان : $^{ن+١}ق_{٣} : {}^{ن}ق_{٤} = ٢ : ٣$

فأوجد قيمة : ن

الحل

$\therefore \frac{^{ن+١}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٤}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|٣}\ \underline{|ن+١-٣}} \div \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٤}\ \underline{|ن-٤}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|٣}\ \underline{|ن-٢}} \times \frac{\underline{|٤}\ \underline{|ن-٤}}{\underline{|ن}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{(ن+١)\ \underline{|ن}}{\underline{|٣}\ (ن-٢)(ن-٣)\ \underline{|ن-٤}} \times \frac{٤\ \underline{|٣}\ \underline{|ن-٤}}{\underline{|ن}} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{٤(ن+١)}{(ن-٢)(ن-٣)} = \frac{٢}{٣}$ $\qquad$ $\therefore \frac{٤ن+٤}{ن^{٢}-٥ن+٦} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore ٢ن^{٢} - ١٠ن + ١٢ = ١٢ن + ١٢$ $\qquad$ $\therefore ٢ن^{٢} - ٢٢ن = ٠$

$\therefore ٢ن(ن-١١) = ٠$ $\qquad$ إما $ن = ٠$ (مرفوضة لأنه يجب أن تكون $ن \geq ٤$)

أو $ن - ١١ = ٠$ ومنها $ن = ١١$

مثال ٧

أوجد قيمة كل من ن ، ر فى كل مما يأتى :

(١) $^{ن}ق_{ر} = ٤٥$ ، $\underline{|ن-٣ر} = ٢٤$

(٢) $^{ن}ل_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢} = ١٦٥$

الحل

(١) $\because {}^{ن}ق_{ر} = ٤٥$ ، $\because ٤٥ = {}^{١٠}ق_{٢} = {}^{١٠}ق_{٨} = {}^{٤٥}ق_{١}$

$\therefore {}^{ن}ق_{ر} = {}^{١٠}ق_{٢}$ ومنها $ن = ١٠$ ، $ر = ٢$

وهى تحقق أن : $\underline{|ن-٣ر} = \underline{|١٠-٦} = ٢٤$

أو $^{ن}ق_{ر} = {}^{١٠}ق_{٨}$ ومنها $ن = ١٠$ ، $ر = ٨$ (مرفوضة)

لأن : $\underline{|ن-٣ر} = \underline{|١٠-٢٤} = \underline{|-١٤} \neq ٢٤$

أو $^{ن}ق_{ر} = {}^{٤٥}ق_{١}$ ومنها $ن = ٤٥$ ، $ر = ١$ (مرفوضة)

لأن : $\underline{|ن-٣ر} = \underline{|٤٥-٣} = \underline{|٤٢} \neq ٢٤$

(٢) $\because {}^{ن}ل_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٢٠$ $\qquad$ $\therefore {}^{ن}ل_{ر+١} \div \frac{^{ن}ل_{ر+١}}{\underline{|ر+١}} = ١٢٠$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر+١} \times \frac{\underline{|ر+١}}{^{ن}ل_{ر+١}} = ١٢٠$ $\qquad$ $\therefore \underline{|ر+١} = ١٢٠ = \underline{|٥}$

$\therefore ر + ١ = ٥$ $\qquad$ $\therefore ر = ٤$

، $\because {}^{ن}ق_{ر-١} + {}^{ن}ق_{ر-٢} = ١٦٥$ $\qquad$ $\therefore {}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢} = ١٦٥$

$\therefore {}^{ن+١}ق_{٣} = ١٦٥$ $\qquad$ $\therefore \frac{^{ن+١}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ١٦٥$

$\therefore {}^{ن+١}ل_{٣} = ١٦٥\ \underline{|٣} = ٩٩٠ = {}^{١١}ل_{٣}$ $\qquad$ $\therefore ن + ١ = ١١$ $\qquad$ $\therefore ن = ١٠$

مثال ٨

حل المعادلة : $٢ \times {}^{ن}ق_{٤} - ٣ \times {}^{ن}ق_{٣} + ٢ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٠$

الحل

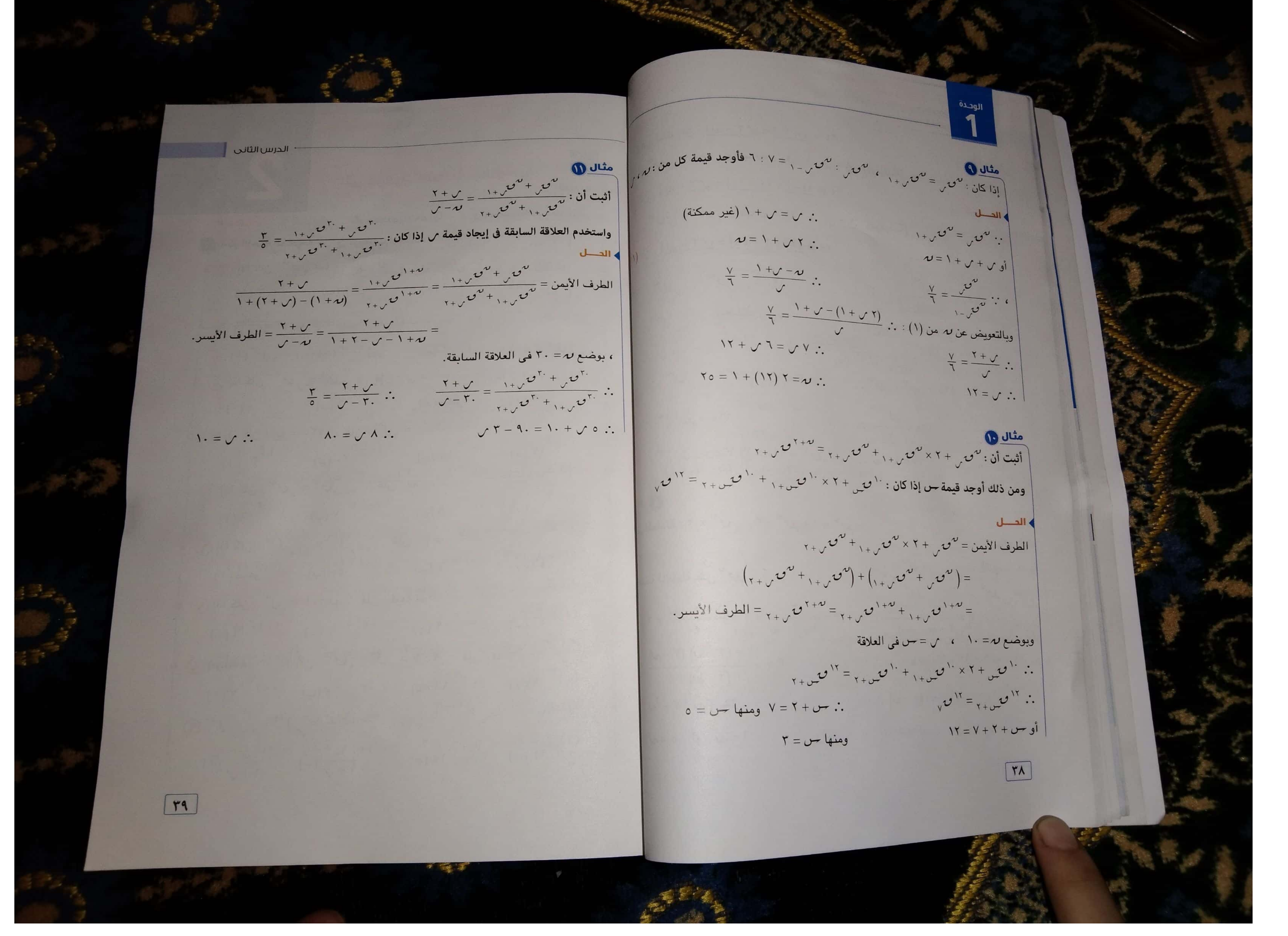
بقسمة المعادلة على $^{ن}ق_{٣}$ $\qquad$ $\therefore ٢ \times \frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن}ق_{٣}} - ٣ + ٢ \times \frac{^{ن}ق_{٢}}{^{ن}ق_{٣}} = ٠$

$\therefore ٢ \times \frac{ن-٤+١}{٤} + ٢ \times \frac{٣}{ن-٣+١} = ٣$ $\qquad$ $\therefore \frac{ن-٣}{٢} + \frac{٦}{ن-٢} = ٣$

$\therefore \frac{(ن-٣)(ن-٢)+١٢}{٢(ن-٢)} = ٣$ $\qquad$ $\therefore ن^{٢} - ٥ن + ٦ + ١٢ = ٦ن - ١٢$

$\therefore ن^{٢} - ١١ن + ٣٠ = ٠$ $\qquad$ $\therefore (ن-٥)(ن-٦) = ٠$

$\therefore ن = ٥$ أو $ن = ٦$



مثال ٩

إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$ ، ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧ : ٦$ فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحل

$\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+١}$

$\therefore ر = ر + ١$ (غير ممكنة)

أو $ر + ر + ١ = ن$

$\therefore ٢ر + ١ = ن$ (١)

، $\because \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٦}$

وبالتعويض عن ن من (١) : $\therefore \frac{(٢ر + ١) - ر + ١}{ر} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore \frac{ر + ٢}{ر} = \frac{٧}{٦}$

$\therefore ٧ر = ٦ر + ١٢$

$\therefore ر = ١٢$

$\therefore ن = ٢(١٢) + ١ = ٢٥$

مثال ١٠

أثبت أن : ${}^{ن}ق_{ر} + ٢ \times {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$

ومن ذلك أوجد قيمة س إذا كان : ${}^{١٠}ق_{س} + ٢ \times {}^{١٠}ق_{س+١} + {}^{١٠}ق_{س+٢} = {}^{١٢}ق_{٧}$

الحل

الطرف الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + ٢ \times {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}$

$= \left({}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}\right) + \left({}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}\right)$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$ = الطرف الأيسر.

وبوضع ن = ١٠ ، ر = س فى العلاقة

$\therefore {}^{١٠}ق_{س} + ٢ \times {}^{١٠}ق_{س+١} + {}^{١٠}ق_{س+٢} = {}^{١٢}ق_{س+٢}$

$\therefore {}^{١٢}ق_{س+٢} = {}^{١٢}ق_{٧}$

$\therefore س + ٢ = ٧$ ومنها س = ٥

أو $س + ٢ + ٧ = ١٢$

ومنها س = ٣

مثال ١١

أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}} = \frac{ر + ٢}{ن - ر}$

واستخدم العلاقة السابقة فى إيجاد قيمة ر إذا كان : $\frac{{}^{٣٠}ق_{ر} + {}^{٣٠}ق_{ر+١}}{{}^{٣٠}ق_{ر+١} + {}^{٣٠}ق_{ر+٢}} = \frac{٣}{٥}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢}} = \frac{{}^{ن+١}ق_{ر+١}}{{}^{ن+١}ق_{ر+٢}} = \frac{ر + ٢}{(ن + ١) - (ر + ٢) + ١}$

$= \frac{ر + ٢}{ن + ١ - ر - ٢ + ١} = \frac{ر + ٢}{ن - ر}$ = الطرف الأيسر.

، بوضع ن = ٣٠ فى العلاقة السابقة.

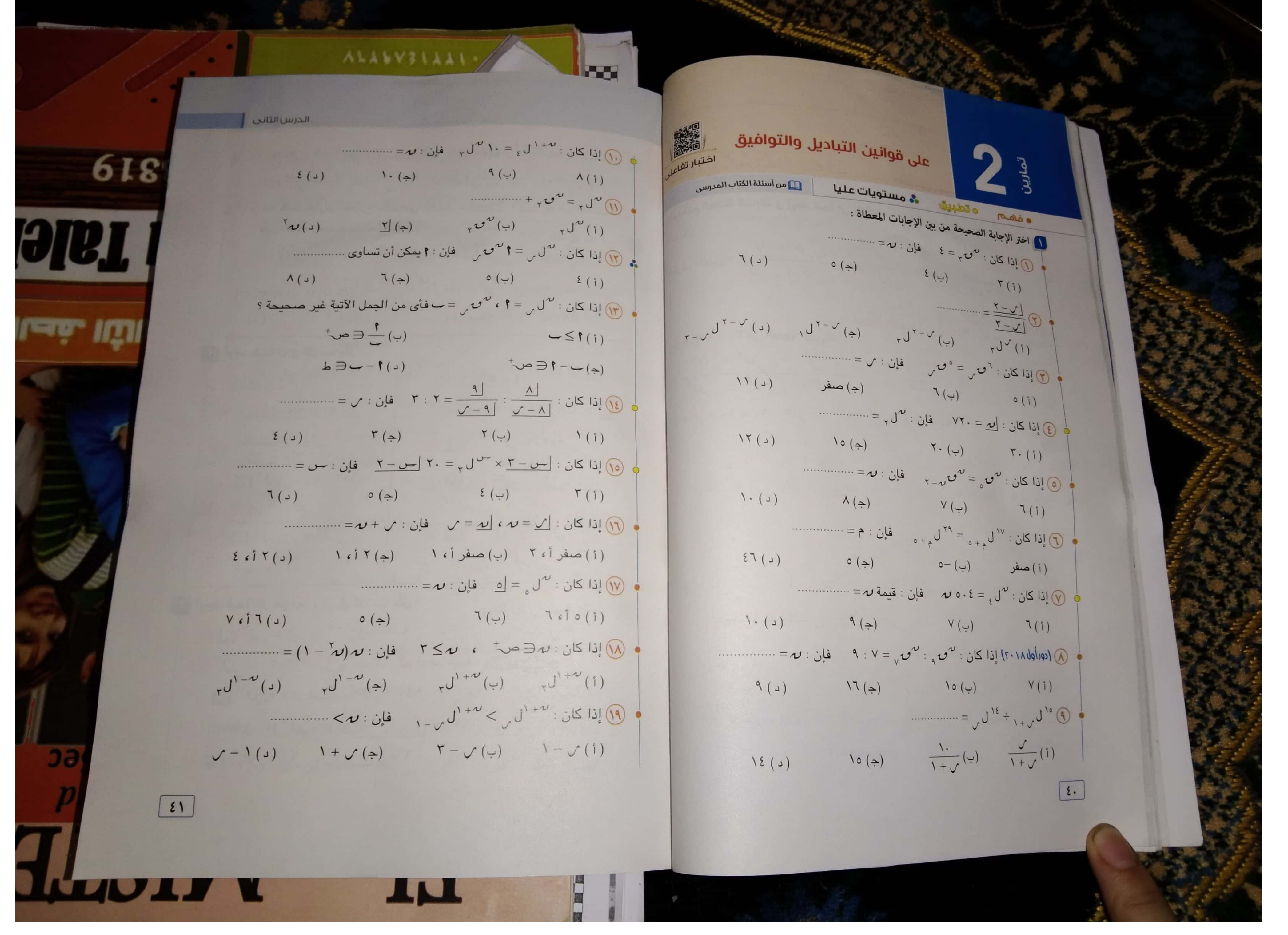
$\therefore \frac{{}^{٣٠}ق_{ر} + {}^{٣٠}ق_{ر+١}}{{}^{٣٠}ق_{ر+١} + {}^{٣٠}ق_{ر+٢}} = \frac{ر + ٢}{٣٠ - ر}$

$\therefore \frac{ر + ٢}{٣٠ - ر} = \frac{٣}{٥}$

$\therefore ٥ر + ١٠ = ٩٠ - ٣ر$

$\therefore ٨ر = ٨٠$

$\therefore ر = ١٠$



تمارين 2

على قوانين التباديل والتوافيق

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ${}^{ن}ق_{2} = 4$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

② $\frac{\lfloor ر-2}{\lfloor ر-3} =$ ....

(أ) ${}^{ر}ل_{2}$ (ب) ${}^{ر-2}ل_{2}$ (ج) ${}^{ر-2}ل_{1}$ (د) ${}^{ر-2}ل_{ر-3}$

③ إذا كان : ${}^{6}ق_{ر} = {}^{5}ق_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) صفر (د) ١١

④ إذا كان : $\lfloor ن = 720$ فإن : ${}^{ن}ل_{2} =$ ....

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (ج) ١٥ (د) ١٢

⑤ إذا كان : ${}^{ن}ق_{5} = {}^{ن}ق_{ن-2}$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ١٠

⑥ إذا كان : ${}^{17}ل_{م+5} = {}^{29}ل_{م+5}$ فإن : م = ...

(أ) صفر (ب) −٥ (ج) ٥ (د) ٤٦

⑦ إذا كان : ${}^{ن}ل_{4} = 504\ ن$ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٩ (د) ١٠

⑧ (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : ${}^{ن}ق_{9} : {}^{ن}ق_{7} = 7 : 9$ فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ١٥ (ج) ١٦ (د) ٩

⑨ ${}^{10}ل_{ر+1} \div {}^{14}ل_{ر} =$ ....

(أ) $\frac{ر}{ر+1}$ (ب) $\frac{10}{ر+1}$ (ج) ١٥ (د) ١٤

⑩ إذا كان : ${}^{ن+1}ل_{4} = 10\ {}^{ن}ل_{3}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (ج) ١٠ (د) ٤

⑪ ${}^{ن}ل_{2} = {}^{ن}ق_{2} +$ ....

(أ) ${}^{ن}ل_{2}$ (ب) ${}^{ن}ق_{2}$ (ج) $\lfloor 2$ (د) $ن^{2}$

⑫ إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = أ\ {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : أ يمكن أن تساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨

⑬ إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = أ$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ب$ فأى من الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $أ \leq ب$ (ب) $\frac{أ}{ب} \in ص^{+}$

(ج) $ب - أ \in ص^{+}$ (د) $أ - ب \in ط$

⑭ إذا كان : $\frac{\lfloor 8}{\lfloor 8-ر} : \frac{\lfloor 9}{\lfloor 9-ر} = 2 : 3$ فإن : ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

⑮ إذا كان : $\lfloor س-3 \times {}^{س}ل_{2} = 20\ \lfloor س-2$ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

⑯ إذا كان : $\lfloor ر = ن$ ، $\lfloor ن = ر$ فإن : ر + ن = ...

(أ) صفر أو ٢ (ب) صفر أو ١ (ج) ٢ أو ١ (د) ٢ أو ٤

⑰ إذا كان : ${}^{ن}ل_{5} = \lfloor 5$ فإن : ن = ...

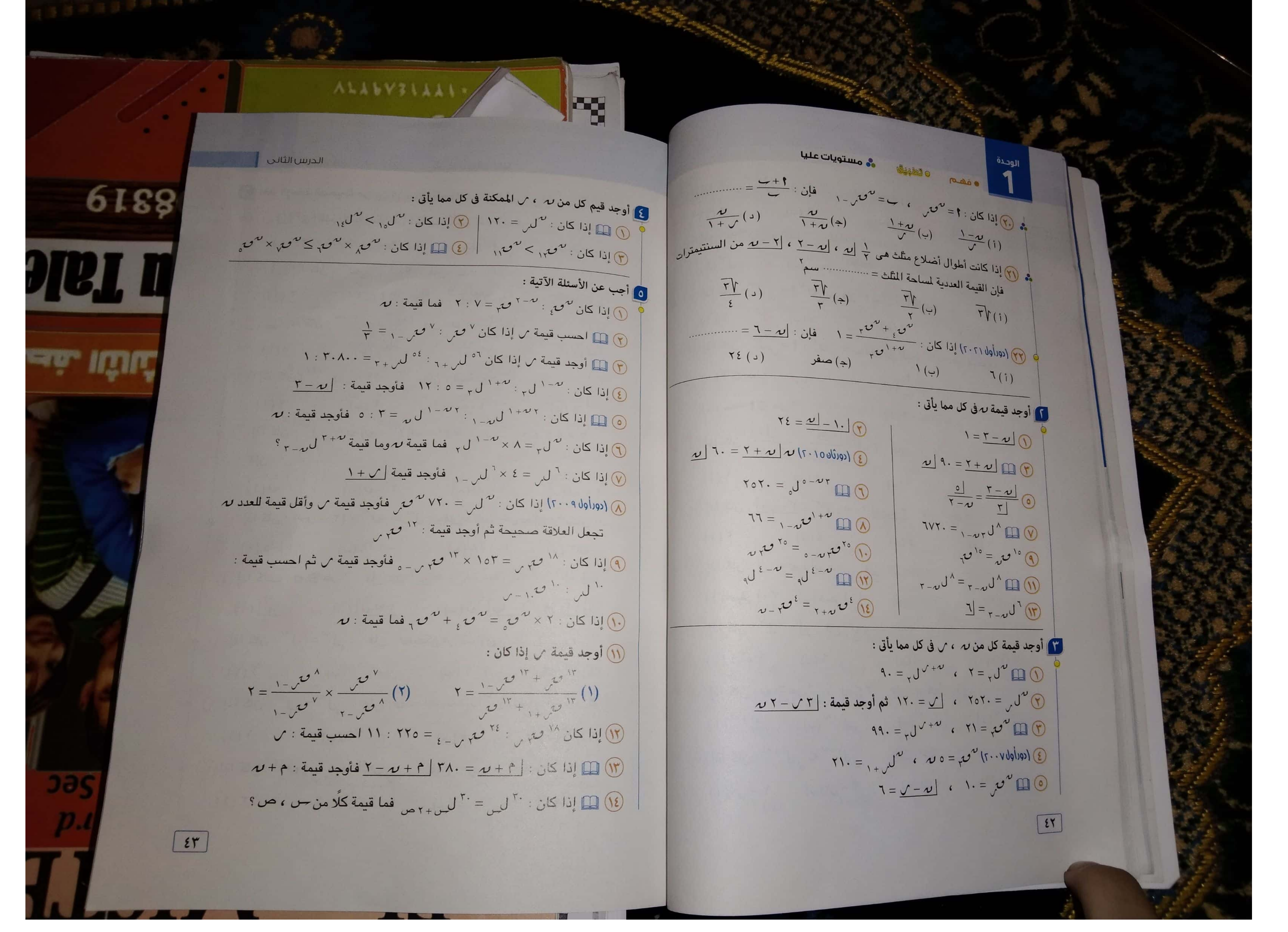
(أ) ٥ أو ٦ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٦ أو ٧

⑱ إذا كان : $ن \in ص^{+}$ ، $ن \geq 3$ فإن : $ن(ن^{2} - 1) =$ ....

(أ) ${}^{ن+1}ل_{2}$ (ب) ${}^{ن+1}ل_{3}$ (ج) ${}^{ن-1}ل_{2}$ (د) ${}^{ن-1}ل_{3}$

⑲ إذا كان : ${}^{ن+1}ل_{ر} > {}^{ن+1}ل_{ر-1}$ فإن : ن > ....

(أ) ر − ١ (ب) ر − ٣ (ج) ر + ١ (د) ١ − ر



الوحدة 1 ● فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا

(٢٠) إذا كان : $أ = {}^{ن}ق_{ر}$ ، $ب = {}^{ن}ق_{ر-١}$ فإن : $\frac{أ+ب}{ب} = $ ....

(أ) $\frac{ن-١}{ر}$ (ب) $\frac{ن+١}{ر}$ (جـ) $\frac{ن}{ن+١}$ (د) $\frac{ن}{ر+١}$

(٢١) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن-٢}$ ، $\underline{|٢-ن}$ من السنتيمترات فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(٢٢) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : $\frac{{}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن+١}ق_{٣}} = ١$ فإن : $\underline{|ن-٦} = $ ....

(أ) ٦ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ٢٤

٢ أوجد قيمة $ن$ فى كل مما يأتى :

(١) $\underline{|ن-٣} = ١$

(٢) $\underline{|١٠-ن} = ٢٤$

(٣) 📖 $\underline{|ن+٢} = ٩٠ \underline{|ن}$

(٤) (دور ثان ٢٠١٥) $ن\underline{|ن+٢} = ٦٠ \underline{|ن}$

(٥) $\frac{\underline{|ن-٣}}{\underline{|٣}} = \frac{\underline{|٥}}{ن-٢}$

(٦) 📖 ${}^{٣ن-٥}ل_{٥} = ٢٥٢٠$

(٧) 📖 ${}^{٨}ل_{٢ن-١} = ٦٧٢٠$

(٨) 📖 ${}^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$

(٩) ${}^{١٥}ق_{ن} = {}^{١٥}ق_{٢ن}$

(١٠) ${}^{٢٥}ق_{٣ن-٥} = {}^{٢٥}ق_{٢ن}$

(١١) 📖 ${}^{٨}ل_{ن-٢} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$

(١٢) 📖 ${}^{ن-٤}ل_{٩} = {}^{ن-٤}ل_{٩}$

(١٣) ${}^{٦}ل_{ن-٢} = \underline{|٦}$

(١٤) ${}^{٤}ق_{ن+٢} = {}^{٤}ق_{٢ن-ن}$

٣ أوجد قيمة كل من $ن$ ، $ر$ فى كل مما يأتى :

(١) 📖 ${}^{ن}ل_{٢} = ٢$ ، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٠$

(٢) ${}^{ن}ل_{ر} = ٢٥٢٠$ ، $\underline{|ر} = ١٢٠$ ثم أوجد قيمة : $\underline{|٣ر-٢ن}$

(٣) 📖 ${}^{ن}ق_{٢} = ٢١$ ، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٩٠$

(٤) (دور أول ٢٠٠٧) ${}^{ن}ق_{٢} = ٥ن$ ، ${}^{ن}ل_{ر+١} = ٢١٠$

(٥) 📖 ${}^{ن}ق_{ر} = ١٠$ ، $\underline{|ن-ر} = ٦$

٤ أوجد قيم كل من $ن$ ، $ر$ الممكنة فى كل مما يأتى :

(١) 📖 إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ١٢٠$

(٢) إذا كان : ${}^{ن}ل_{١٥} > {}^{ن}ل_{١٤}$

(٣) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٢} > {}^{ن}ق_{١١}$

(٤) 📖 إذا كان : ${}^{ن}ق_{٨} \times {}^{ن}ق_{٦} \leq {}^{ن}ق_{٧} \times {}^{ن}ق_{٥}$

٥ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان ${}^{ن}ق_{٤} : {}^{ن-٢}ق_{٣} = ٧ : ٢$ فما قيمة : $ن$

(٢) 📖 احسب قيمة $ر$ إذا كان ${}^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$

(٣) 📖 أوجد قيمة $ر$ إذا كان ${}^{٥٦}ل_{ر+٦} : {}^{٥٤}ل_{ر+٣} = ٣٠٨٠٠ : ١$

(٤) إذا كان : ${}^{ن-١}ل_{٣} : {}^{ن+١}ل_{٣} = ٥ : ١٢$ فأوجد قيمة : $\underline{|ن-٣}$

(٥) 📖 إذا كان : ${}^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن-١}ل_{ن} = ٣ : ٥$ فأوجد قيمة : $ن$

(٦) إذا كان : ${}^{ن}ل_{٣} = ٨ \times {}^{ن-١}ل_{٢}$ فما قيمة $ن$ وما قيمة ${}^{ن+٣}ل_{ن-٣}$ ؟

(٧) إذا كان : ${}^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر-١}$ فأوجد قيمة $\underline{|ر+١}$

(٨) (دور أول ٢٠٠٩) إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠ \; {}^{ن}ق_{ر}$ فأوجد قيمة $ر$ وأقل قيمة للعدد $ن$ تجعل العلاقة صحيحة ثم أوجد قيمة : ${}^{١٢}ق_{٢ر}$

(٩) إذا كان : ${}^{١٨}ق_{٢ر} = ١٥٣ \times {}^{١٣}ق_{٢ر-٥}$ فأوجد قيمة $ر$ ثم احسب قيمة : ${}^{١٠}ل_{ر} : {}^{١٠}ق_{١٠-ر}$

(١٠) إذا كان : $٢ \times {}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٤} + {}^{ن}ق_{٦}$ فما قيمة : $ن$

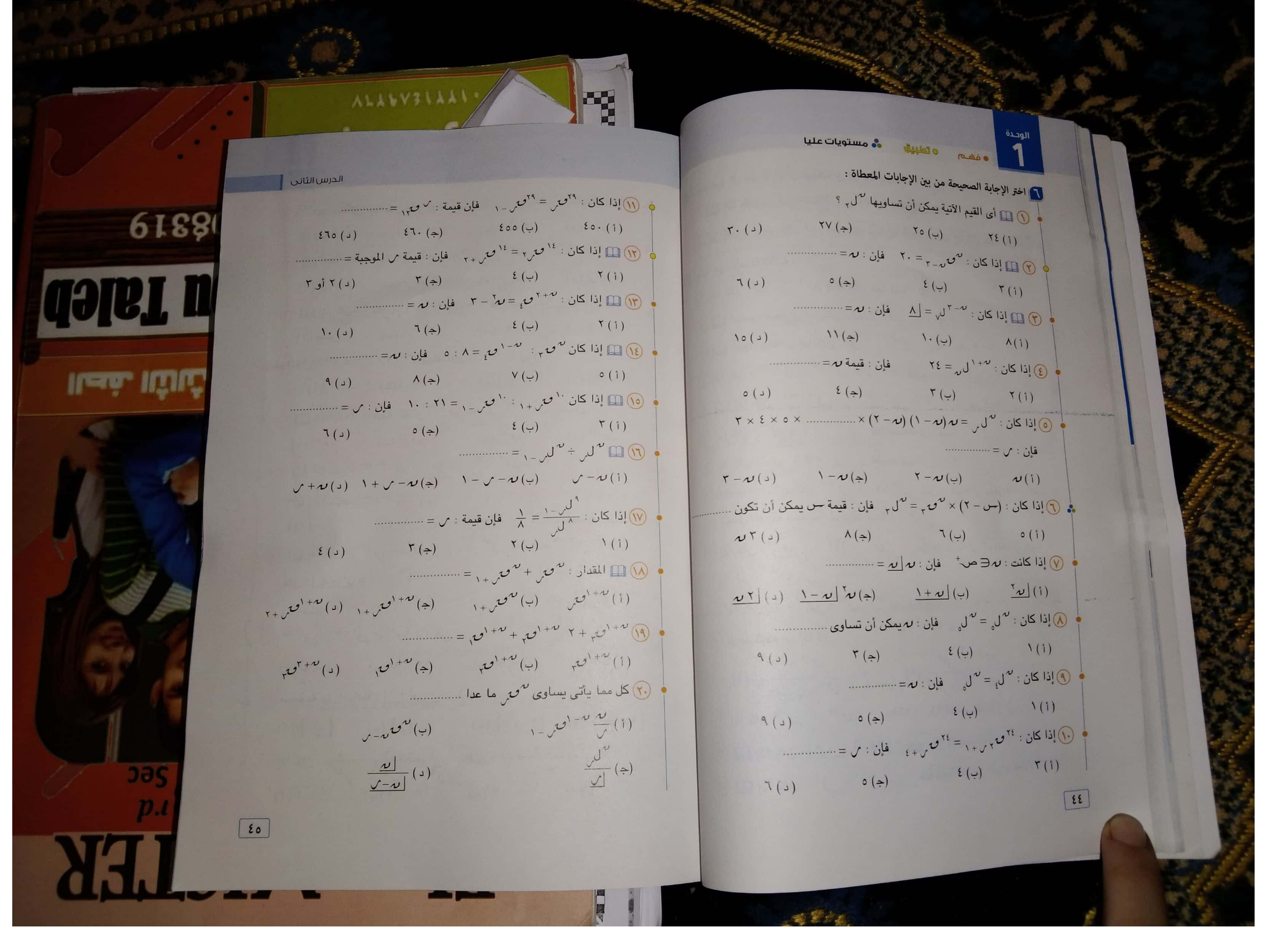
(١١) أوجد قيمة $ر$ إذا كان :

(١) $\frac{{}^{١٣}ق_{ر} + {}^{١٣}ق_{ر-١}}{{}^{١٣}ق_{ر+١} + {}^{١٣}ق_{ر}} = ٢$ (٢) $\frac{{}^{٧}ق_{ر}}{{}^{٨}ق_{ر-٢}} \times \frac{{}^{٨}ق_{ر-١}}{{}^{٧}ق_{ر-١}} = ٢$

(١٢) إذا كان ${}^{٢٨}ق_{٢ر} : {}^{٢٤}ق_{٢ر-٤} = ٢٢٥ : ١١$ احسب قيمة : $ر$

(١٣) 📖 إذا كان : $\underline{|م+ن} = ٣٨٠ \underline{|م+ن-٢}$ فأوجد قيمة : $م+ن$

(١٤) 📖 إذا كان : ${}^{٣٠}ل_{س} = {}^{٣٠}ل_{س+٢ص}$ فما قيمة كلًا من $س$ ، $ص$ ؟



٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① أى القيم الآتية يمكن أن تساويها $^{ن}ل_{٢}$ ؟

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (د) ٣٠

② إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٢٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

③ إذا كان : $^{ن-٣}ل_{٧} = \underline{|٨}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

④ إذا كان : $^{ن+١}ل_{ن} = ٢٤$ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \times .... \times ٥ \times ٤ \times ٣$

فإن : ر = ...

(أ) ن (ب) ن - ٢ (جـ) ن - ١ (د) ن - ٣

⑥ إذا كان : $(س-٢) \times {}^{ن}ق_{٢} = {}^{ن}ل_{٢}$ فإن : قيمة س يمكن أن تكون ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٣ ن

⑦ إذا كانت : ن ∋ ص$^{+}$ فإن : ن $\underline{|ن}$ = ...

(أ) $\underline{|ن^{٢}}$ (ب) $\underline{|ن+١}$ (جـ) $ن^{٢}\,\underline{|ن-١}$ (د) $\underline{|٢ن}$

⑧ إذا كان : $^{ن}ل_{٥} = {}^{ن}ل_{٥}$ فإن : ن يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٩

⑨ إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = {}^{ن}ل_{٥}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

⑩ إذا كان : $^{٢٤}ق_{٢ر+١} = {}^{٢٤}ق_{ر+٤}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

⑪ إذا كان : $^{٢٩}ق_{ر} = {}^{٢٩}ق_{ر-١}$ فإن قيمة : $^{ر}ق_{١٢}$ = ...

(أ) ٤٥٠ (ب) ٤٥٥ (جـ) ٤٦٠ (د) ٤٦٥

⑫ إذا كان : $^{١٤}ق_{ر^{٢}} = {}^{١٤}ق_{ر+٢}$ فإن : قيمة ر الموجبة = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢ أو ٣

⑬ إذا كان : $^{ن+٢}ق_{٤} = ن^{٢} - ٣$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

⑭ إذا كان $^{ن}ق_{٣} : {}^{ن-١}ق_{٤} = ٨ : ٥$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

⑮ إذا كان $^{١٠}ق_{ر+١} : {}^{١٠}ق_{ر-١} = ٢١ : ١٠$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

⑯ $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١}$ = ...

(أ) ن - ر (ب) ن - ر - ١ (جـ) ن - ر + ١ (د) ن + ر

⑰ إذا كان : $\frac{^{٩}ل_{ر-١}}{^{٨}ل_{ر}} = \frac{١}{٨}$ فإن قيمة : ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑱ المقدار : $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}$ = ...

(أ) $^{ن+١}ق_{ر}$ (ب) $^{ن}ق_{ر+١}$ (جـ) $^{ن+١}ق_{ر+١}$ (د) $^{ن+١}ق_{ر+٢}$

⑲ $^{ن+١}ق_{٣} + ٢\;{}^{ن+١}ق_{٢} + {}^{ن+١}ق_{١}$ = ...

(أ) $^{ن+١}ق_{٣}$ (ب) $^{ن+١}ق_{٢}$ (جـ) $^{ن+١}ق_{١}$ (د) $^{ن+٢}ق_{٣}$

⑳ كل مما يأتى يساوى $^{ن}ق_{ر}$ ما عدا ....

(أ) $\frac{ن}{ر}\;{}^{ن-١}ق_{ر-١}$ (ب) $^{ن}ق_{ن-ر}$

(جـ) $\frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ (د) $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$





(٢١) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ل_{ر}$ إذا كان : ر = ...

(أ) ن (ب) $\frac{ن}{٢}$ (جـ) ١ أو ٢ (د) ٠ أو ١

(٢٢) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان : $^{٩}ق_{ر} > {}^{٩}ق_{ر-١}$ فإن : ....

(أ) ر < ٤ (ب) ر > ٤ (جـ) ر < ٥ (د) ر > ٥

(٢٣) إذا كان : $^{٧}ق_{ر} > ١$ ، $^{ر}ق_{٥} > ١$ فإن قيمة : |٦ - ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٧٢٠ (د) ٦

(٢٤) (١ × ٣ × ٥ × ٧ × ٩) $٢^{٥}$ |٥ تساوى ....

(أ) |٨ (ب) |١٠ (جـ) |١١ (د) |١٢

(٢٥) (دور أول ٢٠١٩) قيمة المقدار : $^{٥٠}ق_{٤} + \sum_{ر=١}^{٦} {}^{٥٦-ر}ق_{٣}$ تساوى ....

(أ) $^{٥٦}ق_{٤}$ (ب) $^{٥٦}ق_{٣}$ (جـ) $^{٥٥}ق_{٤}$ (د) $^{٥٥}ق_{٣}$

(٢٦) إذا كان : $^{س+ص}ل_{٢} = ٢١٠$ ، $^{ص-٢}ق_{٣} = ٣٥$

فإن : |٢س - ص = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) ١

(٢٧) إذا كان : $^{٢٠}ق_{ر} = {}^{٢٠}ق_{ر+١٠}$ ، $^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$

فإن : |ن - ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) |٢٠

(٢٨) $^{ن-١}ق_{٣} + {}^{ن-١}ق_{٤} > {}^{ن}ق_{٣}$ إذا كان ....

(أ) ن > ٤ (ب) ن > ١٢ (جـ) ن > ١٣ (د) ن ≥ ١٢

(٢٩) مجموعة حل المعادلة : |١ + لو س = ١ هى ....

(أ) $\{\frac{١}{١٠}\}$ (ب) {١} (جـ) {٠ ، -١} (د) $\{\frac{١}{١٠} ، ١\}$

(٣٠) إذا كان : $\frac{١}{^{٥}ق_{ر}} + \frac{١}{^{٦}ق_{ر}} = \frac{١}{^{٤}ق_{ر}}$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٣١) إذا كان : $^{٢ن+١}ق_{٢ن-١} - ٢ \times {}^{ن+٢}ق_{ن} = ٤٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣٢) إذا كان : ($س^{٢}$ + ٣س + ٢) |س = ١٢٠ ، $^{س+ص}ل_{٤} = ٨٤٠$

فإن : $^{٧}ق_{س} + {}^{٧}ق_{ص}$ = ...

(أ) $^{٧}ق_{٣}$ (ب) $^{٧}ق_{٥}$ (جـ) $^{٨}ق_{٤}$ (د) $^{١١}ق_{٤}$

(٣٣) إذا كان : $^{ن}ق_{ر-١} = ٣٦$ ، $^{ن}ق_{ر} = ٨٤$ ، $^{ن}ق_{ر+١} = ١٢٦$

فإن : قيمة ر هى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) لا شئ مما سبق.

(٣٤) إذا كان : $^{٢ن+٣}ل_{٤} \times {}^{٢ن-١}ل_{٢}$ = |٧ فإن : |ن - ٢ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٣٥) إذا كان : $^{ن+١}ق_{٣} - {}^{ن}ق_{٣} = ٢١$ فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٦) إذا كانت : $^{٨}ق_{ر} - {}^{٧}ق_{٣} = {}^{٧}ق_{٢}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ أو ٥ (ب) ٢ أو ٥ (جـ) ٣ أو ٤ (د) ٤ أو ٥

(٣٧) مجموعة حل المعادلة : |٤ - |س| = ١ هى ....

(أ) {±٣} (ب) {±٤}

(جـ) {±٣ ، ±٤} (د) {٣ ، ٤}

(٣٨) إذا كان : |جا س = ١ حيث ٠ ≤ س < ٢π فإن : س ∈ ....

(أ) {٠ ، π} (ب) $\{\frac{π}{٢}\}$ (جـ) $\{٠ ، \frac{π}{٢}\}$ (د) $\{٠ ، π ، \frac{π}{٢}\}$

(٣٩) إذا كان : $^{٩}ل_{ن-٤}$ = |٩ فإن مجموع قيم ن تساوى ....

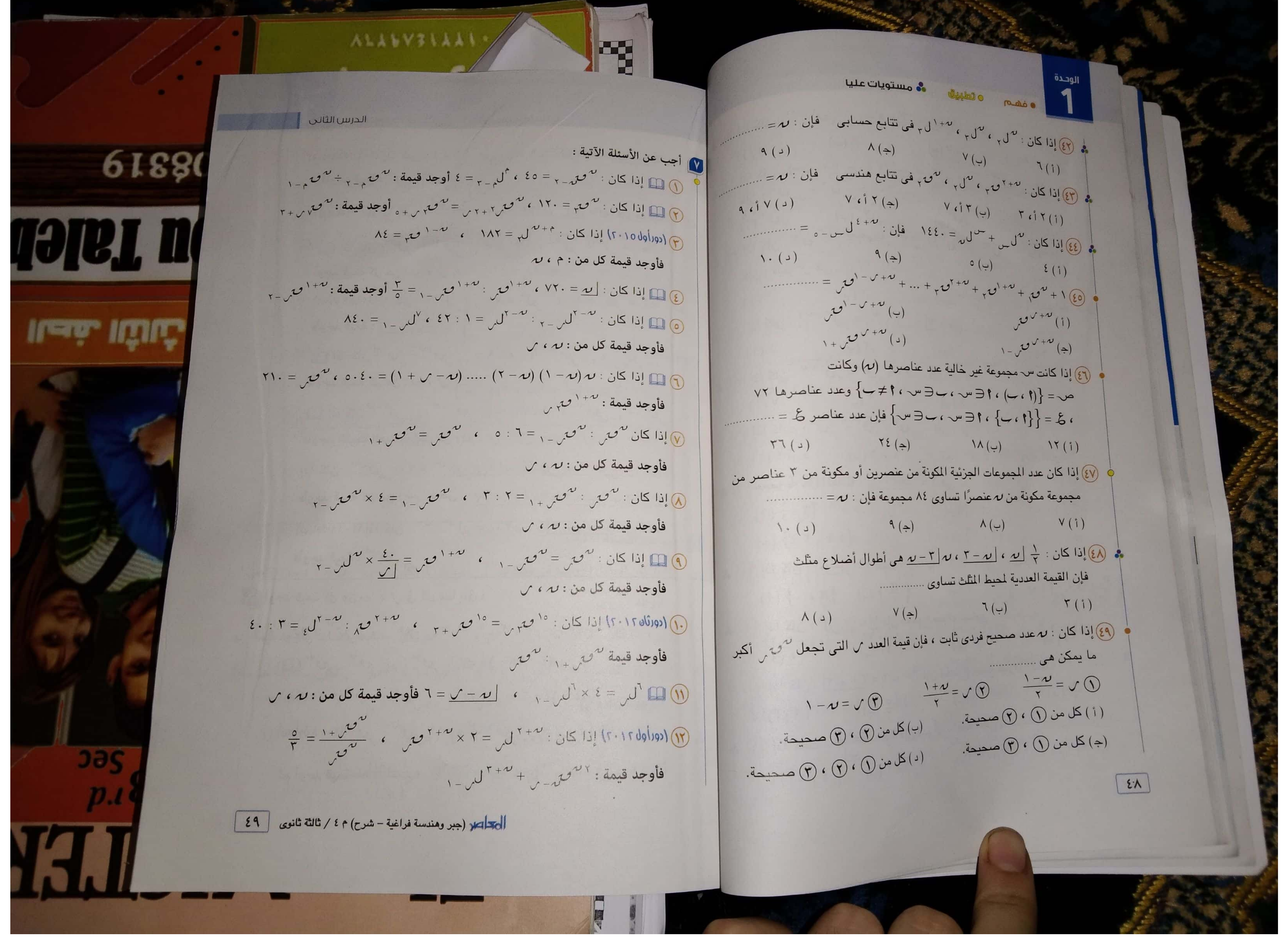
(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ٢٥

(٤٠) إذا كان : |٢ن - ٣ = ٢ن - ٣ فإن مجموع جميع قيم ن الممكنة = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) ٥ (د) $\frac{٩}{٢}$

(٤١) إذا كانت : $\frac{|أ + ب}{|ب} = ٢٤$ فإن قيم $^{أ}ل_{ب}$ الممكنة هى ....

(أ) ٣ ، ٤ (ب) ٣ ، ١ (جـ) ٢٣ ، ٣ ، ١ (د) ٢٣ ، ١



٤٢ إذا كان : ${}^{ن}ل_{2}$ ، ${}^{ن}ل_{3}$ ، ${}^{ن+1}ل_{3}$ فى تتابع حسابى فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٩

٤٣ إذا كان : ${}^{ن+2}ق_{2}$ ، ${}^{ن}ل_{2}$ ، ${}^{ن}ق_{2}$ فى تتابع هندسى فإن : ن = ...

(أ) ٢ أو ٣ (ب) ٣ أو ٧ (ج) ٢ أو ٧ (د) ٧ أو ٩

٤٤ إذا كان : ${}^{ن}ل_{س} + {}^{س}ل_{ن} = 1440$ فإن : ${}^{ن+4}ل_{س-5}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ١٠

٤٥ $1 + {}^{ن}ق_{1} + {}^{ن+1}ق_{2} + {}^{ن+2}ق_{3} + \ldots + {}^{ن+ر-1}ق_{ر}$ = ...

(أ) ${}^{ن+ر}ق_{ر}$ (ب) ${}^{ن+ر-1}ق_{ر}$

(جـ) ${}^{ن+ر}ق_{ر-1}$ (د) ${}^{ن+ر}ق_{ر+1}$

٤٦ إذا كانت س مجموعة غير خالية عدد عناصرها (ن) وكانت

ص = {(أ ، ب) ، أ ∈ س ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} وعدد عناصرها ٧٢

، ع = {{أ ، ب} ، أ ∈ س ، ب ∈ س} فإن عدد عناصر ع = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٨ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

٤٧ إذا كان عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين أو مكونة من ٣ عناصر من مجموعة مكونة من ن عنصرًا تساوى ٨٤ مجموعة فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

٤٨ إذا كان : $\frac{1}{2}\lfloor ن$ ، $\lfloor ن-3$ ، $ن\lfloor 3-ن$ هى أطوال أضلاع مثلث فإن القيمة العددية لمحيط المثلث تساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٤٩ إذا كان : ن عدد صحيح فردى ثابت ، فإن قيمة العدد ر التى تجعل ${}^{ن}ق_{ر}$ أكبر ما يمكن هى ....

① $ر = \frac{ن-1}{2}$ ② $ر = \frac{ن+1}{2}$ ③ $ر = ن-1$

(أ) كل من ① ، ② صحيحة. (ب) كل من ② ، ③ صحيحة.

(جـ) كل من ① ، ③ صحيحة. (د) كل من ① ، ② ، ③ صحيحة.

٧ أجب عن الأسئلة الآتية :

① إذا كان : ${}^{ن}ق_{ن-2} = 45$ ، ${}^{م}ل_{م-3} = 4$ أوجد قيمة : ${}^{ن}ق_{م-2} \div {}^{ن}ق_{م-1}$

② إذا كان : ${}^{ن}ق_{3} = 120$ ، ${}^{ن}ق_{ر^2+2} = {}^{ن}ق_{2ر+5}$ أوجد قيمة : ${}^{ن}ق_{7ر+3}$

③ (دور أول ٢٠١٥) إذا كان : ${}^{م+ن}ل_{2} = 182$ ، ${}^{ن-1}ق_{2} = 84$

فأوجد قيمة كل من : م ، ن

④ إذا كان : $\lfloor ن = 720$ ، ${}^{ن+1}ق_{ر} : {}^{ن+1}ق_{ر-1} = \frac{3}{5}$ أوجد قيمة : ${}^{ن+1}ق_{ر-2}$

⑤ إذا كان : ${}^{ن-2}ل_{ر-2} : {}^{ن-2}ل_{ر} = 1 : 42$ ، ${}^{7}ل_{ر-1} = 840$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

⑥ إذا كان : $ن(ن-1)(ن-2) \ldots\ldots (ن-ر+1) = 5040$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = 210$

فأوجد قيمة : ${}^{ن+1}ق_{2ر}$

⑦ إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} = 6 : 5$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+1}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

⑧ إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+1} = 2 : 3$ ، ${}^{ن}ق_{ر-1} = 4 \times {}^{ن}ق_{ر-2}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

⑨ إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-1}$ ، ${}^{ن+1}ق_{ر} = \frac{40}{\lfloor ر} \times {}^{ن}ل_{ر-2}$

فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

⑩ (دور ثان ٢٠١٢) إذا كان : ${}^{15}ق_{3ر} = {}^{15}ق_{ر+3}$ ، ${}^{ن+2}ق_{8} : {}^{ن-2}ل_{4} = 3 : 40$

فأوجد قيمة ${}^{ن}ق_{ر+1} : {}^{ن}ق_{ر}$

⑪ ${}^{6}ل_{ر} = 4 \times {}^{6}ل_{ر-1}$ ، $\lfloor ن-ر = 6$ فأوجد قيمة كل من : ن ، ر

⑫ (دور أول ٢٠١٢) إذا كان : ${}^{ن+2}ل_{ر} = 2 \times {}^{ن+2}ق_{ر}$ ، $\frac{{}^{ن}ق_{ر+1}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{5}{3}$

فأوجد قيمة : ${}^{2ن}ق_{ن-ر} + {}^{ن+3}ل_{ر-1}$



(١٣) (دور ثان ٢٠١٠) إذا كان: $٤ \times {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن}ق_{ر}$ ، $\underline{|ن-٣} = ١٢٠$

فأوجد قيمة: ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن}ق_{ر}$

(١٤) (دور ثان ٢٠٠٨) إذا كان: $\frac{\underline{|ن+٢}}{\underline{|ن}} + ٣ن = ٧٤$ ، $\underline{|ر} = ن$ فأوجد قيمة ...

(١٥) إذا كان: ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-١} = ٥ : ٧$ ، ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} = ٥$

أوجد قيمة كل من: ن ، ر

(١٦) (دور ثان ٢٠٠٩) إذا كان: ${}^{ن+١}ل_{ر+١} = ٧ \times {}^{ن}ل_{ر}$ ، $٤ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٣ \times {}^{ن}...$

فأوجد قيمة: $\underline{|ن-ر-٢}$

(١٧) إذا كان ${}^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ...$

فأوجد قيمة كل من: ن ، ر

(١٨) إذا كان ${}^{ن+١}ل_{ر+١} : {}^{ن+١}ق_{ر+١} = ٧٢٠ : ١$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} ...$

فأوجد القيمة العددية لكل من: ن ، ر

(١٩) إذا كان: ${}^{س}ق_{ص} = ٢ \times {}^{س}ق_{ص+١}$ ، ${}^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-١}$

فأوجد قيمة كل من: س ، ص

(٢٠) (دور أول ٢٠١١) إذا كان: ${}^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س+ص} = ٥٠٤٠$

فأوجد قيمة: ${}^{ص}ق_{٢س}$

---

٨ أوجد قيمة كل من ن ، ر في كل مما يأتي:

(١) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١ : ٢ : ٣$

(٢) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٥ : ٢٨ : ٢٤$

(٣) (دور ثان ٢٠١٣) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

(٤) (دور أول ٢٠٠٨) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} : ٥\ {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٧ : ٤ : ٦$

ثم أوجد قيمة: $\frac{\underline{|ن-٤}}{(\underline{|ر})^{٢}}$

٩ حل كلًا من المعادلات الآتية:

(١) ${}^{س+٢}ل_{٣} = ٤٢\ س$

(٢) $٣٠\ \underline{|س} = \underline{|س+٢}$

(٣) ${}^{٧}ل_{س} - س \times {}^{٧}ل_{س-١} = ٠$

(٤) $٣٠ \times {}^{س+٣}ل_{٣} = {}^{س+٥}ل_{٥}$

(٥) $\underline{|س+٢} = ١٨٢ \times {}^{س}ل_{١١}\ \underline{|س-١١}$

(٦) ${}^{ن}ق_{٣} + ٢\ {}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

(٧) $٢ \times {}^{ن}ق_{٤} - ١١ \times {}^{ن}ق_{٣} + ٢٢ \times {}^{ن}ق_{٢} = ٠$

(٨) ${}^{ن}ق_{٣} - {}^{ن}ق_{٢} = \frac{١}{٦}ن^{٣} - ن^{٢} + ٥$

(٩) $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|٤}\ \underline{|ن-٥}} = ٢٨٠$

(١٠) $\frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-٩}} : {}^{ن}ل_{٩} = ١١$

(١١) $٢\ \underline{|٢ن-٤} = \underline{|ن-٤}\ \underline{|ن+٢}$

(١٢) $٢\ \underline{|٢ن} = (ن^{٢} + ٣ن + ٢)\ (\underline{|ن})^{٢}$

(١٣) $\frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{١}{\underline{|ن+١}} = \frac{٩}{\underline{|ن+٢}}$

(١٤) $\frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن+٢}} + \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن+١}} = \frac{١٣}{٤٢}$

(١٥) $\underline{|ن+٢}\ \underline{|٣ن-٤} = \underline{|ن}\ \underline{|٣ن-٢}$

(١٦) $\underline{|٢ن}\ \underline{|ن-٣} = ٧٢\ \underline{|٣ن-٧}$

---

١٠ أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) إذا كان العامل الأوسط في مفكوك ${}^{ن}ل_{٧}$ يساوي ٩ وكان: $س^{٢} - ن = ٤$ ، $س \in ص^{+}$

فأوجد: $\underline{|س}$

(٢) إذا كان: $٤ \times {}^{ن}ق_{٥}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٦}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$ تكون متتابعة حسابية فأوجد قيمة: ن

(٣) إذا كان: $٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}$ ، $٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}$ ، $٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$ تكون متتابعة هندسية

فأوجد قيمة: ر

(٤) إذا كان: ${}^{ن+م}ل_{٢} = ٩٩٠$ ، ${}^{٢ن-م}ل_{٢} = ٧٢$

أثبت أن: $\underline{|م-ن}$ ، ${}^{ن}ل_{١}$ ، $\frac{٥}{٢٢} \times {}^{ن+م}ل_{٢}$ في تتابع هندسي.



⑤ إذا كان : $^{ا+ب}ل_{٢} = س$ ، $^{ا-ب}ل_{٢} = ص$

أوجد أقل قيمة لكل من المقدارين : $\lfloor\underline{س + ص}$ ، $\lfloor\underline{س - ص}$

١١ أثبت أن :

① $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ واستخدم ذلك فى :

(١) إثبات أن : $\frac{^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}} = \frac{٥٨}{٩}$

(٢) إيجاد قيمة لكل من $ن$ ، $ر$ إذا كان :

$$^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$$

② $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر} = \frac{ن}{ن - ر}$

ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة : $\frac{^{ن}ق_{٨} + {}^{ن-١}ق_{٨}}{^{ن-١}ق_{٨}} = ٣$

③ $\frac{^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}}{^{ن}ق_{ر}} = \frac{ن+١}{ر+١}$ ومن ذلك أوجد $ن$ إذا كان : $\frac{^{ن}ق_{٨} + {}^{ن}ق_{٩}}{^{ن}ق_{٨}} = \frac{٧}{٣}$

④ $\frac{^{ن}ق_{١} \times {}^{٢ن}ق_{٢}}{^{٢ن}ق_{٣}} = \frac{^{٢ن}ل_{٢}}{^{٢ن-١}ل_{٢}}$

⑤ $^{ن+١}ق_{ر+١} : {}^{ن-١}ق_{ر+١} = ن(ن+١) : (ن - ر)(ن - ر - ١)$

ومن ذلك استنتج قيمة : $^{١٨}ق_{٦} : {}^{١٦}ق_{٦}$

⑥ $^{ن}ق_{ر} + ٢ \times {}^{ن}ق_{ر+١} + {}^{ن}ق_{ر+٢} = {}^{ن+٢}ق_{ر+٢}$

ومن ذلك أوجد قيمة : $^{١٠}ق_{٥} + ٢ \times {}^{١٠}ق_{٦} + {}^{١٠}ق_{٧}$

⑦ $^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر-١} = ن$ ومن ذلك استنتج قيمة $^{٩٧}ل_{٤٠} : {}^{٩٦}ل_{٣٩}$

⑧ $\frac{١}{\lfloor\underline{ن}} - \frac{١}{\lfloor\underline{ن+١}} + \frac{١}{\lfloor\underline{ن+٢}} = \frac{ن+١}{(ن+٢)\lfloor\underline{ن}}$

⑨ $\lfloor\underline{٢ن} = ٢^{ن} \lfloor\underline{ن} \, (١ \times ٣ \times ٥ \times ..... \times (٢ن - ١))$

⑩ $\frac{\lfloor\underline{ن - ر - ١}}{\lfloor\underline{ر} \lfloor\underline{ن - ١}} - \frac{\lfloor\underline{ن - ر - ١}}{\lfloor\underline{ر - ١} \lfloor\underline{ن}} = \frac{\lfloor\underline{ن - ر}}{\lfloor\underline{ن} \lfloor\underline{ر}}$

١٢ أثبت أن حاصل ضرب $ر$ من الأعداد الصحيحة المتتالية يقبل القسمة على $\lfloor\underline{ر}$

١٣ إذا كان : $^{ن}ق_{ر+٢} \le {}^{ن}ق_{ر+١}$ فأثبت أن : $ن \le ٢ر + ٣$

١٤ إذا كان : $^{ن}ق_{ر+٢} \times {}^{ن}ق_{ر} \le {}^{ن}ق_{ر+١} \times {}^{ن}ق_{ر-١}$ فأثبت أن : $ن \le ٢ر + ١$

١٥ (دور أول ٢٠١٠) إذا كانت س مجموعة غير خالية عدد عناصرها $ن$

، $ع_{١} = \{\{ا ، ب ، حـ\} : ا ، ب ، حـ \in س\}$

، $ع_{٢} = \{(ا ، ب) : ا ، ب \in س ، ا \ne ب\}$

وكان عدد عناصر $ع_{١}$ = عدد عناصر $ع_{٢}$ فأوجد قيمة : $ن$

وإذا كان : $٤ك \lfloor\underline{٢ك - ١} = \frac{٣٢}{٩} \times \frac{^{١١}ق_{٣} + {}^{١١}ق_{٤}}{^{١٢}ق_{٣}} + ٥ن$ فأوجد قيمة : $ك$

«٨ ، ٢»

مسائل تقيس مهارات من التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{ك+٥}ل_{ك+١} = \frac{١١(ك - ١)}{٢} \times {}^{ك+٣}ل_{ك}$ فإن إحدى قيم $ك$ هى ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ١٠

② إذا كان : $ن = {}^{م}ق_{٢}$ فإن قيمة $^{ن}ق_{٢}$ تعطى بالعلاقة ....

(أ) $^{م+١}ق_{٤}$ (ب) $^{م-١}ق_{٤}$ (جـ) $٣ \, {}^{م+١}ق_{٤}$ (د) $^{م+٢}ق_{٤}$

③ إذا كان : $^{س+١}ق_{٤} + \sum_{ر=س}^{س+٥} {}^{ر+١}ق_{٣} = ١٣٦٥$ فإن : $س$ = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

④ إذا كان : $\text{ك} = \text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١)(\text{ن}^{٢} - ٤)$ .... $(\text{ن}^{٢} - \text{ر}^{٢})$

حيث $\text{ن}، \text{ر} \in \text{ص}^{+}$ ، $\text{ن} > \text{ر}$ فإن ك تقبل القسمة على ....

(أ) $\underline{|٢\text{ر} + ١}$ (ب) $\underline{|٢\text{ر} + ٢}$ (جـ) $\underline{|٢\text{ر} + ٤}$ (د) $\underline{|٢\text{ر} + ٦}$

⑤ إذا كانت : أ ، ب ، جـ هى أقصى قيم للأعداد ${}^{١٩}\text{ق}_{\text{س}}$ ، ${}^{٢٠}\text{ق}_{\text{ص}}$ ، ${}^{٢١}\text{ق}_{\text{ع}}$

الترتيب فإن : أ : ب : جـ = ...

(أ) ٢٢ : ١١ : ٤٢ (ب) ١١ : ٤٢ : ٢٢

(جـ) ٤٢ : ١١ : ٢٢ (د) ١١ : ٢٢ : ٤٢

١٧ أثبت أن :

① $\underline{|\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}$ يقبل القسمة على $\underline{|\text{أ}} \cdot \underline{|\text{ب}} \cdot \underline{|\text{جـ}}$

② $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}} + ٢ \times \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}} + ٣ \times \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}} + \ldots + \text{ن} \times \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-١}} = \dfrac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$

③ $\underline{|١} \times ١ + \underline{|٢} \times ٢ + \underline{|٣} \times ٣ + \ldots + \underline{|\text{ن}} \times \text{ن} = \underline{|\text{ن} + ١} - ١$

④ ${}^{٤}\text{ق}_{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٣} + {}^{٦}\text{ق}_{٣} + {}^{٧}\text{ق}_{٣} + \ldots + {}^{٢٠}\text{ق}_{٣} = {}^{٢١}\text{ق}_{٤} - ١$

الدرس 3

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

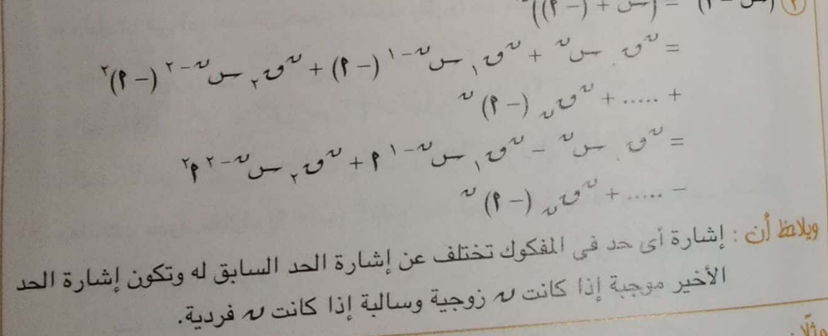
إذا كان لدينا مقدار جبرى مكونًا من حدين ومرفوعًا لأس صحيح موجب فيمكننا أن نحصل على مفكوكه بضرب هذا المقدار فى نفسه بعدد مرات الأس المرفوع إليه هذا المقدار إلا أن هذه الطريقة تستغرق الكثير من الوقت والجهد خاصةً إذا كان الأس المرفوع إليه هذا المقدار كبيرًا ، لذلك تبرز أهمية نظرية ذات الحدين التى تُمكننا من إيجاد مفكوك مقدار جبرى ذى حدين مرفوعًا لأى أس صحيح موجب مهما كانت قيمة الأس بطريقة أكثر سهولة.

نظرية ذات الحدين

إذا كان : أ ، س $\in$ ح ، ن عدد صحيح موجب فإن :

① $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} + \ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ر}} + \ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{أ}^{\text{ن}}$

ويسمى الطرف الأيسر مفكوك الطرف الأيمن ويكون المفكوك مرتب حسب قوى س التنازلية وحسب قوى أ التصاعدية.



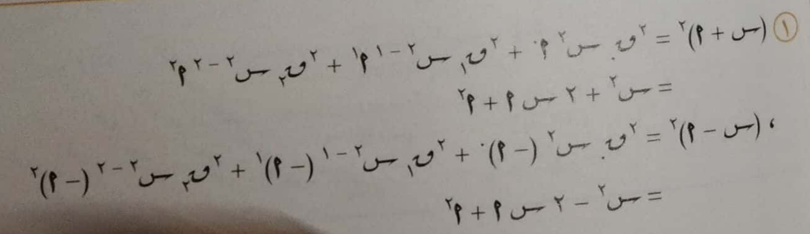
② $(\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = (\text{س} + (-\text{أ}))^{\text{ن}}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}(-\text{أ}) + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}(-\text{أ})^{٢} + \ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}(-\text{أ})^{\text{ن}}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{أ} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{أ}^{٢} - \ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}(-\text{أ})^{\text{ن}}$

ويلاحظ أن : إشارة أى حد فى المفكوك تختلف عن إشارة الحد السابق له وتكون إشارة الحد الأخير موجبة إذا كانت ن زوجية وسالبة إذا كانت ن فردية.

فمثلًا :

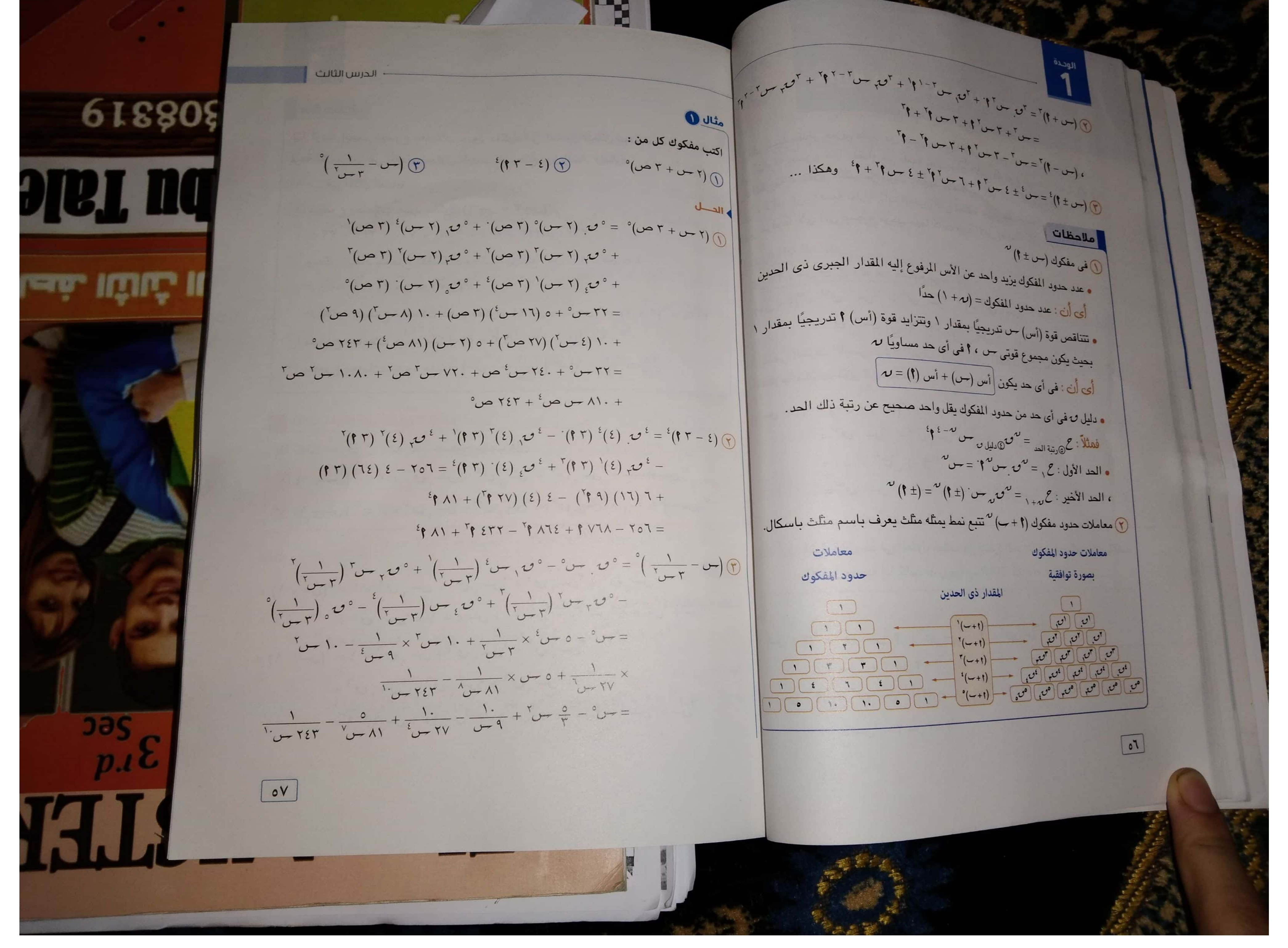


① $(\text{س} + \text{أ})^{٢} = {}^{٢}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{٢}\,\text{أ}^{٠} + {}^{٢}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٢-١}\,\text{أ}^{١} + {}^{٢}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢-٢}\,\text{أ}^{٢}$

$= \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}\,\text{أ} + \text{أ}^{٢}$

، $(\text{س} - \text{أ})^{٢} = {}^{٢}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{٢}(-\text{أ})^{٠} + {}^{٢}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٢-١}(-\text{أ})^{١} + {}^{٢}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢-٢}(-\text{أ})^{٢}$

$= \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}\,\text{أ} + \text{أ}^{٢}$



$\ldots + {}^{ن}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{ن-١}\,\text{أ}^{١} + {}^{ن}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{ن-٢}\,\text{أ}^{٢} + {}^{ن}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{ن-٣}\,\text{أ}^{٣}$

② $(\text{س} + \text{أ})^{٣} = {}^{٣}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{٣}\,\text{أ}^{٠} + {}^{٣}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٢}\,\text{أ} + \ldots$

$= \text{س}^{٣} + ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{أ} + ٣\,\text{س}\,\text{أ}^{٢} + \text{أ}^{٣}$

، $(\text{س} - \text{أ})^{٣} = \text{س}^{٣} - ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{أ} + ٣\,\text{س}\,\text{أ}^{٢} - \text{أ}^{٣}$

③ $(\text{س} \pm \text{أ})^{٤} = \text{س}^{٤} \pm ٤\,\text{س}^{٣}\,\text{أ} + ٦\,\text{س}^{٢}\,\text{أ}^{٢} \pm ٤\,\text{س}\,\text{أ}^{٣} + \text{أ}^{٤}$ وهكذا ...

ملاحظات

① فى مفكوك $(\text{س} \pm \text{أ})^{ن}$

- عدد حدود المفكوك يزيد واحد عن الأس المرفوع إليه المقدار الجبرى ذى الحدين

أى أن : عدد حدود المفكوك = $(ن + ١)$ حدًا

- تتناقص قوة (أس) س تدريجيًا بمقدار ١ وتتزايد قوة (أس) أ تدريجيًا بمقدار ١ بحيث يكون مجموع قوتى س ، أ فى أى حد مساويًا ن

أى أن : فى أى حد يكون أس (س) + أس (أ) = ن

- دليل ق فى أى حد من حدود المفكوك يقل واحد صحيح عن رتبة ذلك الحد.

فمثلاً : $\text{ح}_{\text{⑤ رتبة الحد}} = {}^{ن}\text{ق}_{\text{④ دليل ق}}\,\text{س}^{ن-٤}\,\text{أ}^{٤}$

- الحد الأول : $\text{ح}_{١} = {}^{ن}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{ن}\,\text{أ}^{٠} = \text{س}^{ن}$

، الحد الأخير : $\text{ح}_{ن+١} = {}^{ن}\text{ق}_{ن}\,\text{س}^{٠}\,(\pm\text{أ})^{ن} = (\pm\text{أ})^{ن}$

② معاملات حدود مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{ن}$ تتبع نمط يمثله مثلث يعرف باسم مثلث باسكال.

معاملات حدود المفكوك بصورة توافقية	المقدار ذى الحدين	معاملات حدود المفكوك
١		١
${}^{١}\text{ق}_{٠}$ ${}^{١}\text{ق}_{١}$	$(\text{أ}+\text{ب})^{١}$	١ ١
${}^{٢}\text{ق}_{٠}$ ${}^{٢}\text{ق}_{١}$ ${}^{٢}\text{ق}_{٢}$	$(\text{أ}+\text{ب})^{٢}$	١ ٢ ١
${}^{٣}\text{ق}_{٠}$ ${}^{٣}\text{ق}_{١}$ ${}^{٣}\text{ق}_{٢}$ ${}^{٣}\text{ق}_{٣}$	$(\text{أ}+\text{ب})^{٣}$	١ ٣ ٣ ١
${}^{٤}\text{ق}_{٠}$ ${}^{٤}\text{ق}_{١}$ ${}^{٤}\text{ق}_{٢}$ ${}^{٤}\text{ق}_{٣}$ ${}^{٤}\text{ق}_{٤}$	$(\text{أ}+\text{ب})^{٤}$	١ ٤ ٦ ٤ ١
${}^{٥}\text{ق}_{٠}$ ${}^{٥}\text{ق}_{١}$ ${}^{٥}\text{ق}_{٢}$ ${}^{٥}\text{ق}_{٣}$ ${}^{٥}\text{ق}_{٤}$ ${}^{٥}\text{ق}_{٥}$	$(\text{أ}+\text{ب})^{٥}$	١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

مثال ❶

اكتب مفكوك كل من :

① $(٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص})^{٥}$ ② $(٤ - ٣\,\text{أ})^{٤}$ ③ $\left(\text{س} - \frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{٥}$

الحل

① $(٢\,\text{س} + ٣\,\text{ص})^{٥} = {}^{٥}\text{ق}_{٠}\,(٢\,\text{س})^{٥}\,(٣\,\text{ص})^{٠} + {}^{٥}\text{ق}_{١}\,(٢\,\text{س})^{٤}\,(٣\,\text{ص})^{١}$

$+ {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,(٢\,\text{س})^{٣}\,(٣\,\text{ص})^{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,(٢\,\text{س})^{٢}\,(٣\,\text{ص})^{٣}$

$+ {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,(٢\,\text{س})^{١}\,(٣\,\text{ص})^{٤} + {}^{٥}\text{ق}_{٥}\,(٢\,\text{س})^{٠}\,(٣\,\text{ص})^{٥}$

$= ٣٢\,\text{س}^{٥} + ٥\,(١٦\,\text{س}^{٤})\,(٣\,\text{ص}) + ١٠\,(٨\,\text{س}^{٣})\,(٩\,\text{ص}^{٢})$

$+ ١٠\,(٤\,\text{س}^{٢})\,(٢٧\,\text{ص}^{٣}) + ٥\,(٢\,\text{س})\,(٨١\,\text{ص}^{٤}) + ٢٤٣\,\text{ص}^{٥}$

$= ٣٢\,\text{س}^{٥} + ٢٤٠\,\text{س}^{٤}\,\text{ص} + ٧٢٠\,\text{س}^{٣}\,\text{ص}^{٢} + ١٠٨٠\,\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣}$

$+ ٨١٠\,\text{س}\,\text{ص}^{٤} + ٢٤٣\,\text{ص}^{٥}$

② $(٤ - ٣\,\text{أ})^{٤} = {}^{٤}\text{ق}_{٠}\,(٤)^{٤}\,(٣\,\text{أ})^{٠} - {}^{٤}\text{ق}_{١}\,(٤)^{٣}\,(٣\,\text{أ})^{١} + {}^{٤}\text{ق}_{٢}\,(٤)^{٢}\,(٣\,\text{أ})^{٢}$

$- {}^{٤}\text{ق}_{٣}\,(٤)^{١}\,(٣\,\text{أ})^{٣} + {}^{٤}\text{ق}_{٤}\,(٤)^{٠}\,(٣\,\text{أ})^{٤} = ٢٥٦ - ٤\,(٦٤)\,(٣\,\text{أ})$

$+ ٦\,(١٦)\,(٩\,\text{أ}^{٢}) - ٤\,(٤)\,(٢٧\,\text{أ}^{٣}) + ٨١\,\text{أ}^{٤}$

$= ٢٥٦ - ٧٦٨\,\text{أ} + ٨٦٤\,\text{أ}^{٢} - ٤٣٢\,\text{أ}^{٣} + ٨١\,\text{أ}^{٤}$

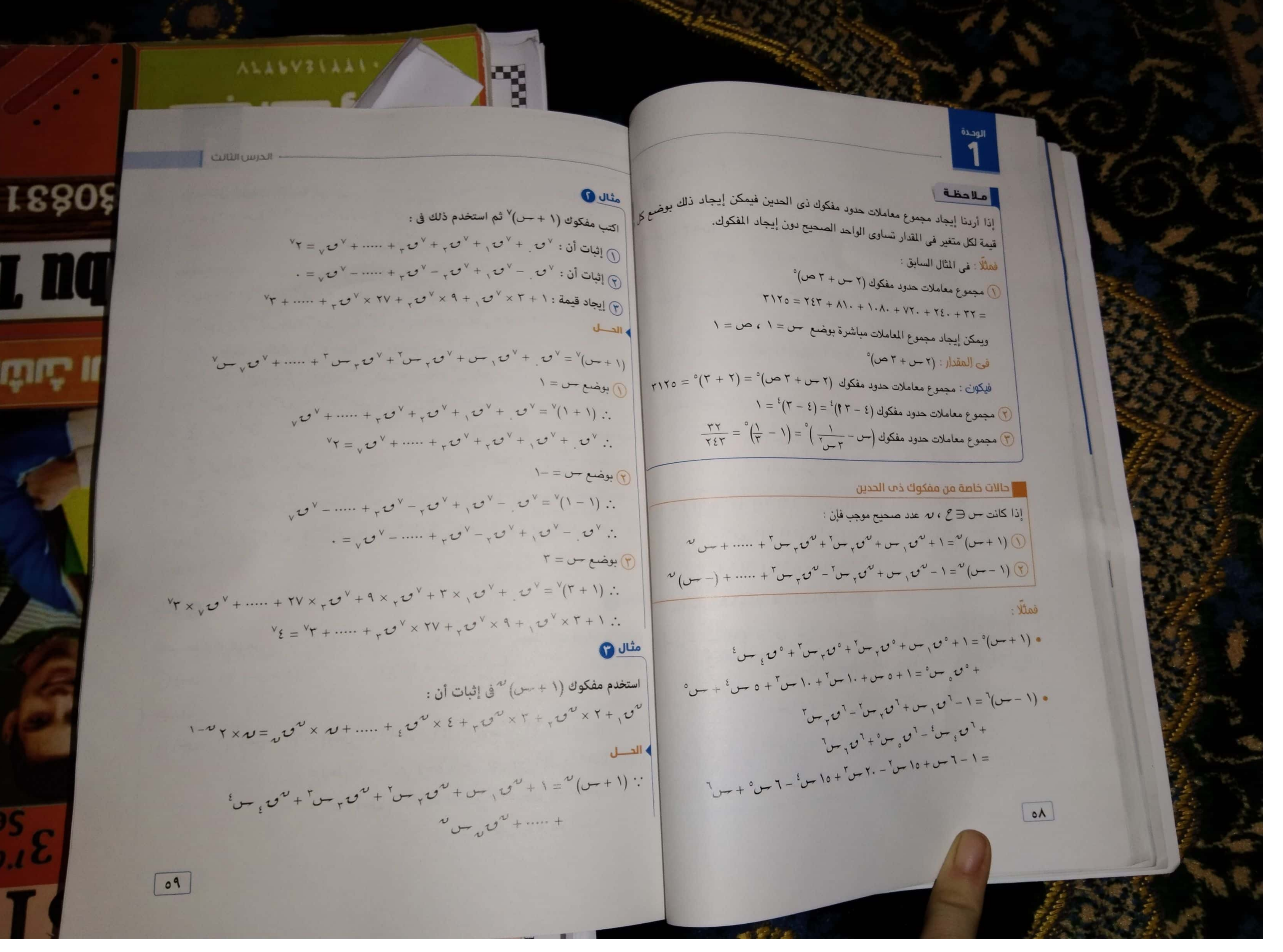
③ $\left(\text{س} - \frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{٥} = {}^{٥}\text{ق}_{٠}\,\text{س}^{٥} - {}^{٥}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{٤}\left(\frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{١} + {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٣}\left(\frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{٢}$

$- {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٢}\left(\frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,\text{س}\left(\frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{٤} - {}^{٥}\text{ق}_{٥}\left(\frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}}\right)^{٥}$

$= \text{س}^{٥} - ٥\,\text{س}^{٤} \times \frac{١}{٣\,\text{س}^{٢}} + ١٠\,\text{س}^{٣} \times \frac{١}{٩\,\text{س}^{٤}} - ١٠\,\text{س}^{٢}$

$\times \frac{١}{٢٧\,\text{س}^{٦}} + ٥\,\text{س} \times \frac{١}{٨١\,\text{س}^{٨}} - \frac{١}{٢٤٣\,\text{س}^{١٠}}$

$= \text{س}^{٥} - \frac{٥}{٣}\,\text{س}^{٢} + \frac{١٠}{٩\,\text{س}} - \frac{١٠}{٢٧\,\text{س}^{٤}} + \frac{٥}{٨١\,\text{س}^{٧}} - \frac{١}{٢٤٣\,\text{س}^{١٠}}$



ملاحظة

إذا أردنا إيجاد مجموع معاملات حدود مفكوك ذى الحدين فيمكن إيجاد ذلك بوضع كل قيمة لكل متغير فى المقدار تساوى الواحد الصحيح دون إيجاد المفكوك.

فمثلاً : فى المثال السابق :

(١) مجموع معاملات حدود مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^{٥}$

$= ٣٢ + ٢٤٠ + ٧٢٠ + ١٠٨٠ + ٨١٠ + ٢٤٣ = ٣١٢٥$

ويمكن إيجاد مجموع المعاملات مباشرة بوضع $س = ١$ ، $ص = ١$

فى المقدار : $(٢ س + ٣ ص)^{٥}$

فيكون : مجموع معاملات حدود مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^{٥} = (٢ + ٣)^{٥} = ٣١٢٥$

(٢) مجموع معاملات حدود مفكوك $(٤ - ٣ أ)^{٤} = (٤ - ٣)^{٤} = ١$

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $\left(س - \frac{١}{٣ س^{٢}}\right)^{٥} = \left(١ - \frac{١}{٣}\right)^{٥} = \frac{٣٢}{٢٤٣}$

حالات خاصة من مفكوك ذى الحدين

إذا كانت $س \in ح$ ، $ن$ عدد صحيح موجب فإن :

(١) $(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣} س^{٣} + \ldots + س^{ن}$

(٢) $(١ - س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} - {}^{ن}ق_{٣} س^{٣} + \ldots + (-س)^{ن}$

فمثلاً :

- $(١ + س)^{٥} = ١ + {}^{٥}ق_{١} س + {}^{٥}ق_{٢} س^{٢} + {}^{٥}ق_{٣} س^{٣} + {}^{٥}ق_{٤} س^{٤} + {}^{٥}ق_{٥} س^{٥} = ١ + ٥ س + ١٠ س^{٢} + ١٠ س^{٣} + ٥ س^{٤} + س^{٥}$
- $(١ - س)^{٦} = ١ - {}^{٦}ق_{١} س + {}^{٦}ق_{٢} س^{٢} - {}^{٦}ق_{٣} س^{٣} + {}^{٦}ق_{٤} س^{٤} - {}^{٦}ق_{٥} س^{٥} + {}^{٦}ق_{٦} س^{٦}$

$= ١ - ٦ س + ١٥ س^{٢} - ٢٠ س^{٣} + ١٥ س^{٤} - ٦ س^{٥} + س^{٦}$

مثال ٢

اكتب مفكوك $(١ + س)^{٧}$ ثم استخدم ذلك فى :

(١) إثبات أن : ${}^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{١} + {}^{٧}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣} + \ldots + {}^{٧}ق_{٧} = ٢^{٧}$

(٢) إثبات أن : ${}^{٧}ق_{٠} - {}^{٧}ق_{١} + {}^{٧}ق_{٢} - {}^{٧}ق_{٣} + \ldots - {}^{٧}ق_{٧} = ٠$

(٣) إيجاد قيمة : $١ + ٣ \times {}^{٧}ق_{١} + ٩ \times {}^{٧}ق_{٢} + ٢٧ \times {}^{٧}ق_{٣} + \ldots + ٣^{٧}$

الحل

$(١ + س)^{٧} = {}^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{١} س + {}^{٧}ق_{٢} س^{٢} + {}^{٧}ق_{٣} س^{٣} + \ldots + {}^{٧}ق_{٧} س^{٧}$

(١) بوضع $س = ١$

$\therefore (١ + ١)^{٧} = {}^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{١} + {}^{٧}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣} + \ldots + {}^{٧}ق_{٧}$

$\therefore {}^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{١} + {}^{٧}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣} + \ldots + {}^{٧}ق_{٧} = ٢^{٧}$

(٢) بوضع $س = -١$

$\therefore (١ - ١)^{٧} = {}^{٧}ق_{٠} - {}^{٧}ق_{١} + {}^{٧}ق_{٢} - {}^{٧}ق_{٣} + \ldots - {}^{٧}ق_{٧}$

$\therefore {}^{٧}ق_{٠} - {}^{٧}ق_{١} + {}^{٧}ق_{٢} - {}^{٧}ق_{٣} + \ldots - {}^{٧}ق_{٧} = ٠$

(٣) بوضع $س = ٣$

$\therefore (١ + ٣)^{٧} = {}^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{١} \times ٣ + {}^{٧}ق_{٢} \times ٩ + {}^{٧}ق_{٣} \times ٢٧ + \ldots + {}^{٧}ق_{٧} \times ٣^{٧}$

$\therefore ١ + ٣ \times {}^{٧}ق_{١} + ٩ \times {}^{٧}ق_{٢} + ٢٧ \times {}^{٧}ق_{٣} + \ldots + ٣^{٧} = ٤^{٧}$

مثال ٣

استخدم مفكوك $(١ + س)^{ن}$ فى إثبات أن :

${}^{ن}ق_{١} + ٢ \times {}^{ن}ق_{٢} + ٣ \times {}^{ن}ق_{٣} + ٤ \times {}^{ن}ق_{٤} + \ldots + ن \times {}^{ن}ق_{ن} = ن \times ٢^{ن-١}$

الحل

$\because (١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + {}^{ن}ق_{٣} س^{٣} + {}^{ن}ق_{٤} س^{٤} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} س^{ن}$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore ن(1+س)^{ن-1} = 0 + {}^{ن}ق_1 + 2\,{}^{ن}ق_2\,س + 3\,{}^{ن}ق_3\,س^2 + 4\,{}^{ن}ق_4\,س^3 + \dots + ن\,{}^{ن}ق_{ن}\,س^{ن-1}$

وبوضع س = 1

$\therefore ن(1+1)^{ن-1} = {}^{ن}ق_1 + 2\,{}^{ن}ق_2 + 3\,{}^{ن}ق_3 + 4\,{}^{ن}ق_4 + \dots + ن\,{}^{ن}ق_{ن}$

$\therefore {}^{ن}ق_1 + 2\,{}^{ن}ق_2 + 3\,{}^{ن}ق_3 + 4\,{}^{ن}ق_4 + \dots + ن\,{}^{ن}ق_{ن} = ن \times 2^{ن-1}$

حل آخر : بإيجاد مفكوك : $(1+س)^{ن-1}$ ووضع س = 1 ينتج أن :

$2^{ن-1} = {}^{ن-1}ق_0 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + \dots + {}^{ن-1}ق_{ن-1}$

، $\therefore {}^{ن}ق_1 + 2 \times {}^{ن}ق_2 + 3 \times {}^{ن}ق_3 + \dots + ن \times {}^{ن}ق_{ن}$

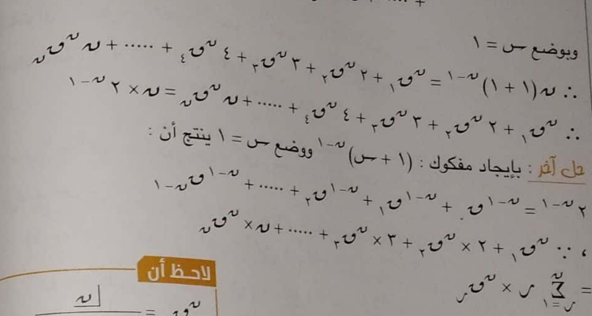
$= \sum_{ر=1}^{ن} ر \times {}^{ن}ق_{ر}$

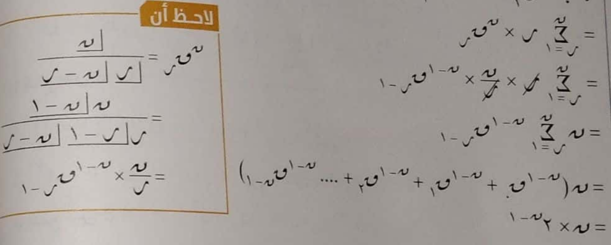
$= \sum_{ر=1}^{ن} ر \times \frac{ن}{ر} \times {}^{ن-1}ق_{ر-1}$

$= ن \sum_{ر=1}^{ن} {}^{ن-1}ق_{ر-1}$

$= ن({}^{ن-1}ق_0 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + \dots + {}^{ن-1}ق_{ن-1})$

$= ن \times 2^{ن-1}$





لاحظ أن

$${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}}$$

$$= \frac{ن\,\underline{|ن-1}}{ر\,\underline{|ر-1}\ \underline{|ن-ر}}$$

$$= \frac{ن}{ر} \times {}^{ن-1}ق_{ر-1}$$

مثال ٤

اكتب مفكوك كل من :

① $(س-1)^5\,(س+1)^5$ ② $\left(1+س-\frac{1}{س}\right)^3$

الحل

① $(س-1)^5(س+1)^5 = \left((س-1)(س+1)\right)^5 = (س^2-1)^5$

$= (س^2)^5 - {}^5ق_1(س^2)^4 + {}^5ق_2(س^2)^3 - {}^5ق_3(س^2)^2$

$+ {}^5ق_4(س^2) - {}^5ق_5 = س^{10} - 5س^8 + 10س^6$

$- 10س^4 + 5س^2 - 1$

② $\left(1+س-\frac{1}{س}\right)^3 = \left((1+س)-\frac{1}{س}\right)^3 = (1+س)^3 - {}^3ق_1(1+س)^2\left(\frac{1}{س}\right)$

$+ {}^3ق_2(1+س)\left(\frac{1}{س}\right)^2 - \left(\frac{1}{س}\right)^3$

$= (1 + {}^3ق_1\,س + {}^3ق_2\,س^2 + س^3)$

$- 3(1+2س+س^2)\left(\frac{1}{س}\right)$

$+ 3(1+س)\left(\frac{1}{س^2}\right) - \frac{1}{س^3}$

$= 1 + 3س + 3س^2 + س^3 - \frac{3}{س}(1+2س+س^2)$

$+ \frac{3}{س^2}(1+س) - \frac{1}{س^3}$

$= 1 + 3س + 3س^2 + س^3 - \frac{3}{س} - 6 - 3س + \frac{3}{س^2}$

$+ \frac{3}{س} - \frac{1}{س^3} = س^3 + 3س^2 - 5 + \frac{3}{س^2} - \frac{1}{س^3}$

حل آخر :

$\left[1+\left(س-\frac{1}{س}\right)\right]^3 = 1 + 3\left(س-\frac{1}{س}\right) + 3\left(س-\frac{1}{س}\right)^2 + \left(س-\frac{1}{س}\right)^3$

$= 1 + 3س - \frac{3}{س} + 3\left(س^2 - 2 + \frac{1}{س^2}\right) + س^3 - 3س + \frac{3}{س} - \frac{1}{س^3}$

$= 1 + 3س - \frac{3}{س} + 3س^2 - 6 + \frac{3}{س^2} + س^3 - 3س + \frac{3}{س} - \frac{1}{س^3}$

$= س^3 + 3س^2 + \frac{3}{س^2} - \frac{1}{س^3} - 5$

مثال ٥

باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة كل من $(1{,}05)^8$ ، $(0{,}98)^6$ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية.

الحل

* $(1{,}05)^8 = (1 + 0{,}05)^8$ وبالفك.

$\therefore (1{,}05)^8 = 1 + {}^8ق_1(0{,}05)^1 + {}^8ق_2(0{,}05)^2 + {}^8ق_3(0{,}05)^3$

$+ {}^8ق_4(0{,}05)^4 + \dots + {}^8ق_8(0{,}05)^8$



$\therefore (١,٠٥)^{٨} = ١ + (٨ \times ٠,٠٥) + (٢٨ \times ٠,٠٠٢٥) + (٥٦ \times ٠,٠٠٠١٢٥)$

$+ (٧٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٦٢٥) + \ldots$

ونكتفى بهذه الحدود حيث أن الحدود التالية لا تؤثر فى الناتج إذ أن المطلوب التقريب لثلاثة أرقام عشرية.

$\therefore (١,٠٥)^{٨} = ١ + ٠,٤ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + ٠,٠٠٠٤٣٧٥ + \ldots \simeq ١,٤٧٧$

* $(٠,٩٨)^{٦} = (١ - ٠,٠٢)^{٦}$ وبالفك.

$\therefore (٠,٩٨)^{٦} = ١ - {}^{٦}\text{ق}_{١}(٠,٠٢)^{١} + {}^{٦}\text{ق}_{٢}(٠,٠٢)^{٢} - {}^{٦}\text{ق}_{٣}(٠,٠٢)^{٣} + \ldots + {}^{٦}\text{ق}_{٦}(٠,٠٢)^{٦}$

$= ١ - (٦ \times ٠,٠٢) + (١٥ \times ٠,٠٠٠٤) - (٢٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٨) + \ldots$

$= ١ - ٠,١٢ + ٠,٠٠٦ - ٠,٠٠٠١٦$

$= ١,٠٠٦ - ٠,١٢٠١٦ = ٠,٨٨٥٨٤ \simeq ٠,٨٨٦$

الحد العام فى مفكوك ذات الحدين

يرمز للحد العام فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ بالرمز $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ حيث : $\text{ر} \in \text{ط}$ ، $\text{ر} \leq \text{ن}$

ويكون : $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{أ}^{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ن}-\text{ر}}$

أى أن : الحد العام $= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times$ (الحد الثانى)$^{\text{ر}} \times$ (الحد الأول)$^{\text{ن}-\text{ر}}$

مثال ٦

أوجد الحد السادس حسب قوى س التنازلية فى مفكوك : $\left(٣\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣\text{س}}\right)^{٩}$

الحل

$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \times$ (الحد الثانى)$^{\text{ر}} \times$ (الحد الأول)$^{\text{ن}-\text{ر}}$

$\therefore \text{ح}_{٦} = {}^{٩}\text{ق}_{٥} \times \left(\frac{-٢}{٣\text{س}}\right)^{٥} \times (٣\text{س}^{٢})^{٤} = ١٢٦ \times \frac{-٣٢}{٢٤٣\,\text{س}^{٥}} \times ٨١\,\text{س}^{٨} = -١٣٤٤\,\text{س}^{٣}$

مثال ٧

إذا كان الحد التاسع حسب قوى س التنازلية فى مفكوك : $(\text{س}^{٢} - \text{س}^{-٢})^{١١}$ يساوى ١٦٥ فأوجد قيمة : س

الحل

$\because \text{ح}_{٩} = {}^{١١}\text{ق}_{٨}\,(-\text{س}^{-٢})^{٨}\,(\text{س}^{٢})^{٣} = ١٦٥\,\text{س}^{-١٦} \times \text{س}^{٦} = ١٦٥\,\text{س}^{-١٠}$

$\therefore ١٦٥\,\text{س}^{-١٠} = ١٦٥ \qquad \therefore \text{س}^{-١٠} = ١ \qquad \therefore \text{س}^{١٠} = ١ \qquad \therefore \text{س} = \pm ١$

مثال ٨

أوجد معامل الحد الحادى والعشرين فى مفكوك : $\left(٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢٣}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$\because \text{ح}_{٢١} = {}^{٢٣}\text{ق}_{٢٠}\left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{٢٠}(٢\text{س})^{٣} = ١٧٧١ \times \frac{١}{\text{س}^{٢٠}} \times ٨\,\text{س}^{٣} = ١٤١٦٨\,\text{س}^{-١٧}$

$\therefore$ معامل $\text{ح}_{٢١} = ١٤١٦٨$

مثال ٩

فى مفكوك $\left(٣\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية أوجد الحد العاشر من النهاية.

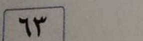
الحل

الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $\left(٣\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٣}$ هو الحد العاشر من البداية فى مفكوك $\left(\frac{-١}{\text{س}} + ٣\text{س}^{٢}\right)^{١٣}$

، $\because \text{ح}_{١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{-١}{\text{س}} + ٣\text{س}^{٢}\right)^{١٣} = {}^{١٣}\text{ق}_{٩}\,(٣\text{س}^{٢})^{٩}\left(\frac{-١}{\text{س}}\right)^{٤}$

$= ٧١٥ \times ٣^{٩} \times \text{س}^{١٨} \times \frac{١}{\text{س}^{٤}} = ٧١٥ \times ٣^{٩}\,\text{س}^{١٤}$

$\therefore$ الحد العاشر من النهاية فى مفكوك $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٣} = ٧١٥ \times ٣^{٩}\,\text{س}^{١٤}$



ملاحظة

إذا علم ترتيب الحد من النهاية فى مفكوك ذى الحدين فإن :

رتبة الحد من البداية = عدد حدود المفكوك − ترتيب الحد من النهاية + ١

حل آخر للمثال السابق :

∵ رتبة $ح_{١٠}$ من النهاية = ١٤ (عدد حدود المفكوك) − ١٠ (ترتيب الحد من النهاية) + ١

= ٥ (أى رتبة $ح_{٥}$ من البداية)

أى أن : الحد العاشر من النهاية هو $ح_{٥}$ من البداية فى مفكوك $\left(٣ س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٣}$

، ∵ $ح_{٥} = {}^{١٣}ق_{٤} \times \left(\frac{-١}{س}\right)^{٤} \times (٣ س^{٢})^{٩} = ٧١٥ \times \frac{١}{س^{٤}} \times ٣^{٩} س^{١٨} = ٧١٥ \times ٣^{٩}$ ...

∴ الحد العاشر من النهاية = $٧١٥ \times ٣^{٩} س^{١٤}$

مثال ١٠

فى مفكوك $(٣ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت النسبة بين الحدين السادس والثامن كنسبة ٩ : ٤ **فما قيمة : ن** عندما س = ٢

الحل

∵ $ح_{٦} = {}^{ن}ق_{٥} س^{٥} \times ٣^{ن-٥}$ ، ∵ $ح_{٨} = {}^{ن}ق_{٧} س^{٧} \times ٣^{ن-٧}$

، ∵ $\frac{ح_{٨}}{ح_{٦}} = \frac{٤}{٩}$ ∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٧} س^{٧} \times ٣^{ن-٧}}{{}^{ن}ق_{٥} س^{٥} \times ٣^{ن-٥}} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٧}}{{}^{ن}ق_{٦}} \times \frac{{}^{ن}ق_{٦}}{{}^{ن}ق_{٥}} س^{٢} \times ٣^{ن-٧-ن+٥} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{ن-٧+١}{٧} \times \frac{ن-٦+١}{٦} \times س^{٢} \times ٣^{-٢} = \frac{٤}{٩}$

∴ $\frac{(ن-٦)(ن-٥)}{٤٢} \times \frac{س^{٢}}{٩} = \frac{٤}{٩}$ ، عند س = ٢

∴ $\frac{(ن-٦)(ن-٥)}{٤٢} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٤}{٩}$ ∴ $\frac{(ن-٦)(ن-٥)}{٤٢} = ١$

∴ $(ن-٦)(ن-٥) = ٤٢ = ٦ \times ٧$ ∴ ن = ١٢

حل آخر : $\frac{ح_{٦}}{ح_{٨}} = \frac{٩}{٤}$ وعندما س = ٢ ∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٥} \times ٢^{٥} \times ٣^{ن-٥}}{{}^{ن}ق_{٧} \times ٢^{٧} \times ٣^{ن-٧}} = \frac{٩}{٤}$

∴ $\frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٧}} \times \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤}$ ∴ ${}^{ن}ق_{٥} = {}^{ن}ق_{٧}$

∴ ن = ٥ + ٧ = ١٢

مثال ١١

أوجد الحد الخامس حسب قوى س التصاعدية فى المفكوك :

$(٤ + س)^{١١} - {}^{١١}ق_{١} (٤ + س)^{١٠} (١ - س) + {}^{١١}ق_{٢} (٤ + س)^{٩} (١ - س)^{٢} - \dots - (١ - س)^{١١}$

الحل

المقدار يمثل مفكوك : $\left((٤ + س) - (١ - س)\right)^{١١} = (٤ + س - ١ + س)^{١١} = (٣ + ٢ س)^{١١}$

∴ $ح_{٥} = {}^{١١}ق_{٤} (٢ س)^{٤} (٣)^{٧} = ٣٣٠ \times ١٦ س^{٤} \times ٢١٨٧ = ١١٥٤٧٣٦٠ س^{٤}$

مثال ١٢

فى مفكوك $(١ + حـ س)^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٤٤ وكان الحد السابع يساوى ٨٤ **فأوجد قيمة كل من : حـ ، س** حيث حـ عدد صحيح موجب.

الحل

∵ $ح_{٣} = {}^{٩}ق_{٢} (حـ س)^{٢} = ٣٦ حـ^{٢} س^{٢}$ ∴ معامل $ح_{٣} = ٣٦ حـ^{٢}$

∴ $٣٦ حـ^{٢} = ١٤٤$ ∴ $حـ^{٢} = ٤$ ∴ حـ = ± ٢

، ∵ حـ عدد صحيح موجب. ∴ حـ = ٢

، ∵ $ح_{٧} = ٨٤$ ∴ ${}^{٩}ق_{٦} (حـ س)^{٦} = ٨٤$ ∴ $٨٤ (٢ س)^{٦} = ٨٤$

∴ $(٢ س)^{٦} = ١$ ∴ ٢ س = ± ١ ∴ $س = \pm \frac{١}{٢}$

مثال ١٣

أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ ... $\frac{ن - ر + ١}{ن + ١}$ واستخدم ذلك فى إيجاد قيمة س إذا كانت النسبة بين الحد التاسع فى مفكوك $(س + ٢)^{١٤}$ حسب قوى س التنازلية والحد التاسع فى مفكوك $(٣ + س)^{١٥}$ حسب قوى س التصاعدية تساوى $\frac{٢٨}{٤٥}$

الحل

الطرف الأيمن $= \dfrac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن+١}ق_{ر}} = \dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \div \dfrac{(ن+١)!}{ر!\,(ن+١-ر)!}$

$= \dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \times \dfrac{ر!\,(ن-ر+١)!}{(ن+١)!}$

$= \dfrac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \times \dfrac{ر!\,(ن-ر+١)\,(ن-ر)!}{(ن+١)\,ن!}$

$= \dfrac{ن-ر+١}{ن+١} =$ الطرف الأيسر.

$\because$ $ح_{٩}$ في مفكوك $(س+٢)^{١٤} = {}^{١٤}ق_{٨} \times ٢^{٨} \times س^{٦}$

، $ح_{٩}$ في مفكوك $(٣+س)^{١٥} = {}^{١٥}ق_{٨} \times س^{٨} \times ٣^{٧}$

$\therefore \dfrac{{}^{١٤}ق_{٨} \times ٢^{٨} \times س^{٦}}{{}^{١٥}ق_{٨} \times س^{٨} \times ٣^{٧}} = \dfrac{٢٨}{٤٥}$

، $\because \dfrac{{}^{١٤}ق_{٨}}{{}^{١٥}ق_{٨}} = \dfrac{١٤-٨+١}{١٤+١} = \dfrac{٧}{١٥}$

$\therefore \dfrac{٧}{١٥} \times \dfrac{١}{س^{٢}} \times \dfrac{٢^{٨}}{٣^{٧}} = \dfrac{٢٨}{٤٥}$

$\therefore \dfrac{١}{س^{٢}} = \dfrac{٢٨}{٤٥} \times \dfrac{١٥}{٧} \times \dfrac{٣^{٧}}{٢^{٨}}$

$\therefore \dfrac{١}{س^{٢}} = \dfrac{٤}{٣} \times \dfrac{٣^{٧}}{٢^{٨}}$

$\therefore \dfrac{١}{س^{٢}} = \dfrac{٣^{٦}}{٢^{٦}}$

$\therefore س^{٢} = \left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{٦}$

$\therefore س = \pm\left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{٣} = \pm\dfrac{٨}{٢٧}$

قاعدة

① $(س+أ)^{ن} + (س-أ)^{ن} = ٢\,(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \dots)$

أي ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة من مفكوك $(س+أ)^{ن}$

ويكون : عدد حدود المفكوك $= \dfrac{ن}{٢} + ١$ إذا كان : ن زوجي

عدد حدود المفكوك $= \dfrac{ن+١}{٢}$ إذا كان : ن فردي

② $(س+أ)^{ن} - (س-أ)^{ن} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \dots)$

أي ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة من مفكوك $(س+أ)^{ن}$

ويكون : عدد حدود المفكوك $= \dfrac{ن}{٢}$ إذا كان : ن زوجي

عدد حدود المفكوك $= \dfrac{ن+١}{٢}$ إذا كان : ن فردي

مثال ⑭

اختصر المقدار : $(١+\sqrt{ب})^{٤} + (١-\sqrt{ب})^{٤}$ ثم أوجد قيمة الناتج عند : $ب = \sqrt{٢}$

الحل

$(١+\sqrt{ب})^{٤} + (١-\sqrt{ب})^{٤} = ٢\,(ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥})$

$= ٢\,(١ + {}^{٤}ق_{٢}\,(\sqrt{ب})^{٢} + {}^{٤}ق_{٤}\,(\sqrt{ب})^{٤})$

$= ٢\,(١ + ٦ب + ب^{٢}) = ٢ + ١٢ب + ٢ب^{٢}$

، عندما $ب = \sqrt{٢}$

$\therefore$ الناتج $= ٢ + ١٢\sqrt{٢} + ٢(\sqrt{٢})^{٢} = ٢ + ١٢\sqrt{٢} + ٤ = ٦ + ١٢\sqrt{٢}$

مثال ⑮

أوجد لأقرب أربعة أرقام عشرية : $(١{,}٠٢)^{٦} - (٠{,}٩٨)^{٦}$ مستخدمًا نظرية ذات الحدين.

الحل

$(١{,}٠٢)^{٦} - (٠{,}٩٨)^{٦} = (١+٠{,}٠٢)^{٦} - (١-٠{,}٠٢)^{٦} = ٢\,(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$

$= ٢\left[{}^{٦}ق_{١}\,(٠{,}٠٢) + {}^{٦}ق_{٣}\,(٠{,}٠٢)^{٣} + {}^{٦}ق_{٥}\,(٠{,}٠٢)^{٥}\right]$

$= ٢\left[٦ \times \dfrac{٢}{١٠٠} + ٢٠ \times \dfrac{٨}{(١٠٠)^{٣}} + ٦ \times \dfrac{٣٢}{(١٠٠)^{٥}}\right]$

$= ٢\,(٠{,}١٢ + ٠{,}٠٠٠٠١٦ +$ حد لا يؤثر في التقريب لأربعة أرقام عشرية)

$= ٠{,}٢٤ + ٠{,}٠٠٠٠٣٢ = ٠{,}٢٤٠٠٣٢ \simeq ٠{,}٢٤٠٠$

الحد الأوسط فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ عدد حدود المفكوك = $\text{ن} + ١$ حدًا.

① إذا كانت ن زوجية : يكون عدد حدود المفكوك $(\text{ن} + ١)$ فرديًا ويوجد للمفكوك
وحيد رتبته $\frac{\text{ن}+٢}{٢}$ أى أن : الحد الأوسط هو $(\text{ح}_{\frac{\text{ن}}{٢}+١})$

② إذا كانت ن فردية : يكون عدد حدود المفكوك $(\text{ن} + ١)$ زوجيًا ويوجد للمفكوك
أوسطان رتبتهما على الترتيب $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}+٣}{٢}$

أى أن : الحدان الأوسطان هما $(\text{ح}_{\frac{\text{ن}+١}{٢}})$ والحد الذى يليه)

مثال ⑯

أوجد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين فى مفكوك كل من المقدارين :

① $\left(٢\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٢}$ ② $(٢\text{أ} - ١)^{٩}$

الحل

① ∵ الأس ن = ١٢ عدد زوجى.

∴ المفكوك به حد أوسط واحد رتبته = $\frac{١٢ + ٢}{٢} = ٧$

∵ الحد الأوسط = $\text{ح}_{٧} = \text{ح}_{٦+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦} \left(-\frac{١}{\text{س}}\right)^{٦} (٢\text{س}^{٢})^{٦}$

$= ٩٢٤ \times \frac{١}{\text{س}^{٦}} \times ٦٤\text{س}^{١٢} = ٥٩١٣٦\text{س}^{٦}$

② ∵ الأس ن = ٩ عدد فردى.

∴ المفكوك به حدان أوسطان رتبتهما = $\frac{٩ + ١}{٢}$ ، $\frac{٩ + ٣}{٢}$ أى ٥ ، ٦

∴ الحد الأوسط الأول = $\text{ح}_{٥} = \text{ح}_{٤+١} = {}^{٩}\text{ق}_{٤} (-١)^{٤} (٢\text{أ})^{٥}$

$= ١٢٦ \times ٣٢\text{أ}^{٥} = ٤٠٣٢\text{أ}^{٥}$

، الحد الأوسط الثانى = $\text{ح}_{٦} = \text{ح}_{٥+١} = {}^{٩}\text{ق}_{٥} (-١)^{٥} (٢\text{أ})^{٤}$

$= ١٢٦ \times (-١) \times ١٦\text{أ}^{٤} = -٢٠١٦\text{أ}^{٤}$

مثال ⑰

إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(٣\text{س}^{٢} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{-١}\right)^{٨}$ يساوى ١٧٩٢٠ فما قيمة : س ؟

الحل

∵ الأس = ٨ عدد زوجى.

∴ المفكوك به حد أوسط واحد رتبته = $\frac{٨ + ٢}{٢} = ٥$

∴ الحد الأوسط = $\text{ح}_{٥} = \text{ح}_{٤+١} = {}^{٨}\text{ق}_{٤} \left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{-١}\right)^{٤} (٣\text{س}^{٢})^{٤}$

$= {}^{٨}\text{ق}_{٤} \times \frac{٢^{٤}}{٣^{٤}}\text{س}^{-٤} \times ٣^{٤}\text{س}^{٨} = {}^{٨}\text{ق}_{٤} \times ٢^{٤}\text{س}^{٤}$

∴ ${}^{٨}\text{ق}_{٤} \times ١٦\text{س}^{٤} = ١٧٩٢٠$ ∴ $٧٠ \times ١٦\text{س}^{٤} = ١٧٩٢٠$

∴ $\text{س}^{٤} = \frac{١٧٩٢٠}{٧٠ \times ١٦}$ ∴ $\text{س}^{٤} = ١٦$

∴ $\text{س} = \pm ٢$

مثال ⑱

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك : $(١ + ٣\text{س})^{١٠} - (١ - ٣\text{س})^{١٠}$

الحل

∵ $(١ + ٣\text{س})^{١٠} - (١ - ٣\text{س})^{١٠} = ٢ (\text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦} + \text{ح}_{٨} + \text{ح}_{١٠})$

∴ الحد الأوسط فى المفكوك = $٢\text{ح}_{٦} = ٢ \; {}^{١٠}\text{ق}_{٥} (٣\text{س})^{٥} = ٢ \times ٢٥٢ \times ٣^{٥} \times \text{س}^{٥}$

$= ١٢٢٤٧٢\text{س}^{٥}$

مثال ⑲

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{٢\text{ن}+١}$ متساويين حيث : $\text{ن} \in \text{ص}^{+}$

فأثبت أن : $\text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{٢ن+١+١}{٢}$ ، $\frac{٢ن+١+٣}{٢}$

أي : $\frac{٢ن+٢}{٢}$ ، $\frac{٢ن+٤}{٢}$

أي : ن+١ ، ن+٢

∴ الحد الأوسط الأول = $ح_{ن+١} = ق^{٢ن+١}_{ن} ب^{ن} (أ س)^{ن+١}$

$= ق^{٢ن+١}_{ن} ب^{ن} أ^{ن+١} س^{ن+١}$

، الحد الأوسط الثانى = $ح_{ن+٢} = ق^{٢ن+١}_{ن+١} ب^{ن+١} (أ س)^{ن}$

$= ق^{٢ن+١}_{ن+١} ب^{ن+١} أ^{ن} س^{ن}$

، ∵ الحدين الأوسطين متساويان

∴ $ق^{٢ن+١}_{ن} ب^{ن} أ^{ن+١} س^{ن+١} = ق^{٢ن+١}_{ن+١} ب^{ن+١} أ^{ن} س^{ن}$

، ∵ $ق^{٢ن+١}_{ن} = ق^{٢ن+١}_{ن+١}$

∴ $ب^{ن} أ^{ن+١} س^{ن+١} = ب^{ن+١} أ^{ن} س^{ن}$

وبقسمة كل من الطرفين على $ب^{ن} أ^{ن} س^{ن}$

∴ أ س = ب

∴ $س = \frac{ب}{أ}$

مثال ٢٠

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك :

$(٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} (٢ + س)^{٦} + \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} س^{٤} (٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤}$

متساويين **فأوجد قيمة** : س

الحل

∵ $(٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} (٢ + س)^{٦} + \frac{٧ \times ٦}{١ \times ٢} س^{٤} (٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤}$

$= ((٢ + س) + س^{٢})^{٧}$

∴ الحدان الأوسطان هما : $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$

، ∵ $ح_{٤} = ح_{٥}$ ∴ $ق^{٧}_{٣} \times (س^{٢})^{٣} (٢ + س)^{٤} = ق^{٧}_{٤} \times (س^{٢})^{٤} (٢ + س)^{٣}$

∴ $ق^{٧}_{٣} \times س^{٦} (٢ + س)^{٤} = ق^{٧}_{٤} \times س^{٨} (٢ + س)^{٣}$

∴ $(٢ + س) = س^{٢}$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$ ∴ س = ٢ أ، س = −١

ملاحظة

إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ متساويين فإن : س = ص

ففى مثال ١٩ :

∵ الحدان الأوسطان متساويان.

∴ أ س = ب ∴ $س = \frac{ب}{أ}$

وفى مثال ٢٠ :

∵ الحدان الأوسطان متساويان. ∴ $٢ + س = س^{٢}$

∴ $س^{٢} - س - ٢ = ٠$ ∴ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$

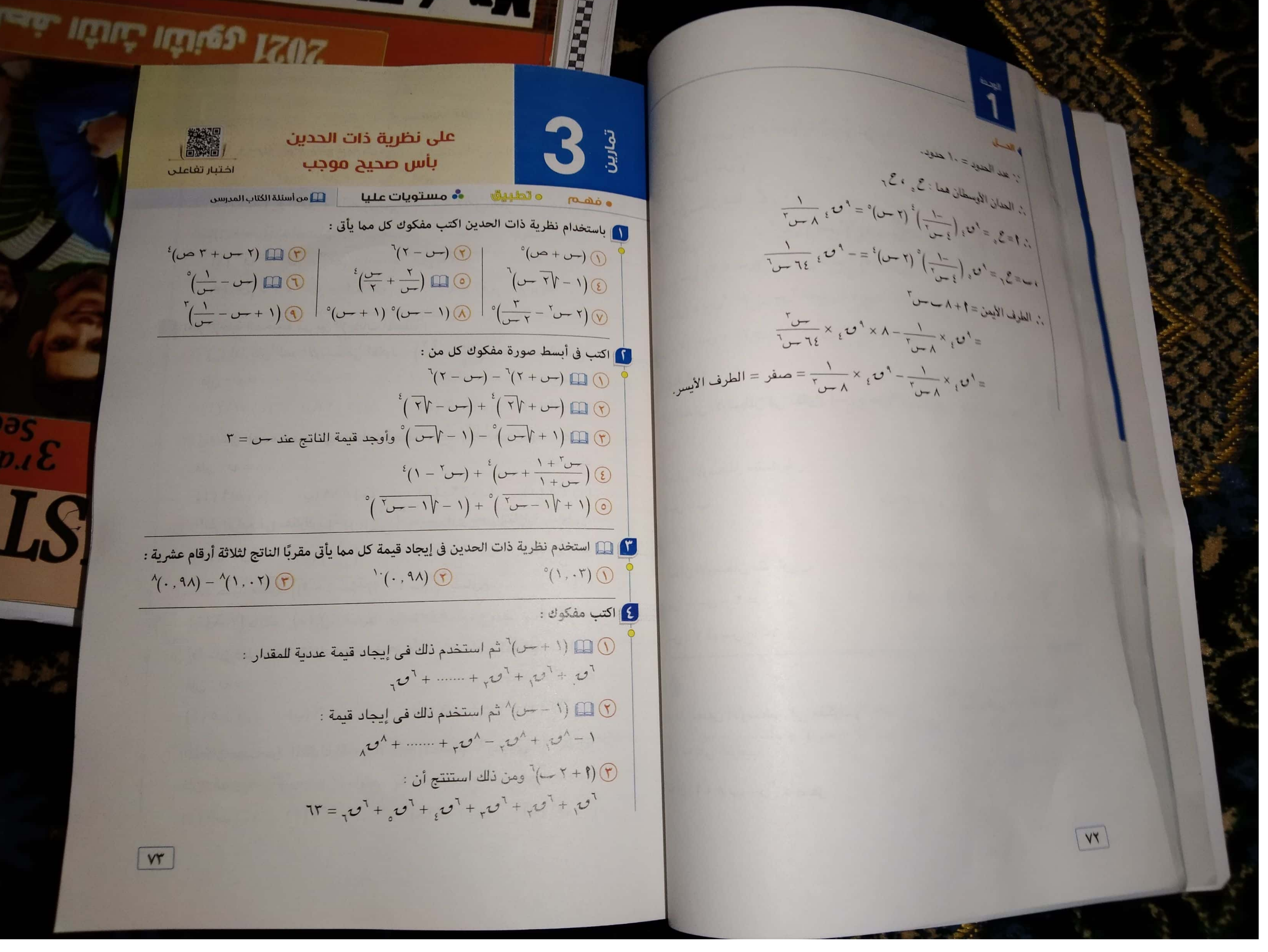
∴ س = ٢ أ، س = −١

مثال ٢١

بفرض أن الحدين الأوسطين فى مفكوك $(٢ س - \frac{١}{٤ س^{٢}})^{٩}$ حسب قوى س التنازلية

هما أ ، ب على الترتيب.

فأثبت أن : $أ + ٨ ب س^{٣} =$ صفر



الحل

∵ عدد الحدود = ١٠ حدود.

∴ الحدان الأوسطان هما : $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

∴ $أ = ح_{٥} = {}^{٩}ق_{٤} \left(\frac{-١}{٤ س^{٢}}\right)^{٤} (٢ س)^{٥} = {}^{٩}ق_{٤} \frac{١}{٨ س^{٣}}$

، $ب = ح_{٦} = {}^{٩}ق_{٥} \left(\frac{-١}{٤ س^{٢}}\right)^{٥} (٢ س)^{٤} = - {}^{٩}ق_{٤} \frac{١}{٦٤ س^{٦}}$

∴ الطرف الأيمن $= أ + ٨ ب س^{٣}$

$= {}^{٩}ق_{٤} \times \frac{١}{٨ س^{٣}} - ٨ \times {}^{٩}ق_{٤} \times \frac{س^{٣}}{٦٤ س^{٦}}$

$= {}^{٩}ق_{٤} \times \frac{١}{٨ س^{٣}} - {}^{٩}ق_{٤} \times \frac{١}{٨ س^{٣}} =$ صفر = الطرف الأيسر.

تمارين 3

على نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسى

١ باستخدام نظرية ذات الحدين اكتب مفكوك كل مما يأتى :

① $(س + ص)^{٥}$ ② $(س - ٢)^{٦}$ ③ $(٢ س + ٣ ص)^{٤}$

④ $(١ - \sqrt{٢} س)^{٦}$ ⑤ $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢}\right)^{٤}$ ⑥ $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٥}$

⑦ $\left(٢ س^{٢} - \frac{٣}{٢ س}\right)^{٥}$ ⑧ $(١ - س)^{٥} (١ + س)^{٥}$ ⑨ $\left(١ + س - \frac{١}{س}\right)^{٣}$

٢ اكتب فى أبسط صورة مفكوك كل من :

① $(س + ٢)^{٦} - (س - ٢)^{٦}$

② $(س + \sqrt{٢})^{٤} + (س - \sqrt{٢})^{٤}$

③ $(١ + \sqrt{س})^{٥} - (١ - \sqrt{س})^{٥}$ وأوجد قيمة الناتج عند س = ٣

④ $\left(\frac{س^{٣} + ١}{س + ١} + س\right)^{٤} + (س^{٢} - ١)^{٤}$

⑤ $\left(١ + \sqrt{س^{٢} - ١}\right)^{٥} + \left(١ - \sqrt{س^{٢} - ١}\right)^{٥}$

٣ استخدم نظرية ذات الحدين فى إيجاد قيمة كل مما يأتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

① $(١,٠٣)^{٥}$ ② $(٠,٩٨)^{١٠}$ ③ $(١,٠٢)^{٨} - (٠,٩٨)^{٨}$

٤ اكتب مفكوك :

① $(١ + س)^{٦}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة عددية للمقدار :

$${}^{٦}ق_{٠} + {}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + \ldots\ldots + {}^{٦}ق_{٦}$$

② $(١ - س)^{٨}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة :

$$١ - {}^{٨}ق_{١} + {}^{٨}ق_{٢} - {}^{٨}ق_{٣} + \ldots\ldots + {}^{٨}ق_{٨}$$

③ $(أ + ٢ ب)^{٦}$ ومن ذلك استنتج أن :

$${}^{٦}ق_{١} + {}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣} + {}^{٦}ق_{٤} + {}^{٦}ق_{٥} + {}^{٦}ق_{٦} = ٦٣$$

④ $(١ + س)^{ن}$ ثم استنتج قيمة كل من :

(١) $١ + {}^{١٢}ق_{١} + {}^{١٢}ق_{٢} + \dots + {}^{١٢}ق_{١٢}$

(٢) $١ + ٢ \times {}^{١٠}ق_{١} + ٢^{٢} \times {}^{١٠}ق_{٢} + \dots + ٢^{ر} \times {}^{١٠}ق_{ر} + \dots + ٢^{١٥} \times {}^{١٥}ق_{١٥}$

⑤ $(١ + س)^{ن}$ ثم أثبت أن :

(١) ${}^{ن}ق_{\cdot} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

(٢) ${}^{٨}ق_{١} + ٢ \times {}^{٨}ق_{٢} + ٣ \times {}^{٨}ق_{٣} + \dots + ٨ \times {}^{٨}ق_{٨} = ٨ \times ٢^{٧}$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان الحد الأوسط في مفكوك : $\left(\frac{٢أ}{٣} + \frac{ب}{أ^{٢}}\right)^{٨ن}$ هو الحد التاسع

فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② إذا كان الحد الأوسط في مفكوك : $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{ن+٥}$ هو $ح_{١٢}$

فإن : ن = ...

(أ) ١٩ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ١٧

③ الحد الرابع في مفكوك : $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٤}$ حسب قوى س التنازلية يساوى ....

(أ) $٤ س^{٢}$ (ب) $\left(\frac{١}{س}\right)^{٤}$ (جـ) $\frac{١}{س^{٢}}$ (د) $\frac{٤}{س^{٢}}$

④ عدد حدود مفكوك $\left((أ + ٤ ب)^{٣} (أ - ٤ ب)^{٣}\right)^{٢}$ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٣٢

⑤ إذا كان عدد حدود مفكوك : $(س + ص)^{٢ن - ١}$ يساوى ١٢ حدًا

فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ١٢

⑥ إذا كان عدد حدود المفكوك $(أ + ب)^{٢ن} + (أ - ب)^{٢ن}$ يساوى ١١

فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

⑦ إذا كانت رتبتا الحدين الأوسطين في مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ هما ٧ ، ٨

فإن : ن = ...

(أ) ١٤ (ب) ١٣ (جـ) ١٦ (د) ٥٦

⑧ من مفكوك : $(١ + س)^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية يكون معامل الحد السادس هو ....

(أ) ${}^{٩}ق_{٥}$ (ب) ${}^{٩}ق_{٦}$ (جـ) ${}^{٩}ق_{٥} س^{٥}$ (د) ${}^{٩}ق_{٦} س^{٦}$

⑨ معامل الحد الأوسط في مفكوك : $\left(٣ س - \frac{١}{٦}\right)^{١٠}$ يساوى ....

(أ) $\frac{-٦٣}{٨}$ (ب) $\frac{-٦٧}{٨}$ (جـ) $\frac{٦٣}{٨}$ (د) $\frac{٦٧}{٨}$

⑩ مجموع معاملات حدود مفكوك : $(١ + س - ٣ س^{٢})^{٢٠٢١}$ = ...

(أ) ١- (ب) ١ (جـ) ٠ (د) ٢٠١٧

⑪ إذا كان مجموع معاملات حدود المفكوك $(٤ س + ٣ ص - ٥ ع)^{ن}$ يساوى ٦٤

فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

⑫ إذا كان مجموع معاملات الحدود من مفكوك $(أ^{٢} س^{٢} - ٢ أ س + ١)^{٥١}$

يساوى صفر فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٢- (جـ) ١ (د) ١-

⑬ إذا كان أ هو مجموع معاملات الحدود الفردية الرتبة في مفكوك $\left(٢ س - \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{١٩}$

بينما ب هو مجموع معاملات الحدود الزوجية الرتبة في نفس المفكوك

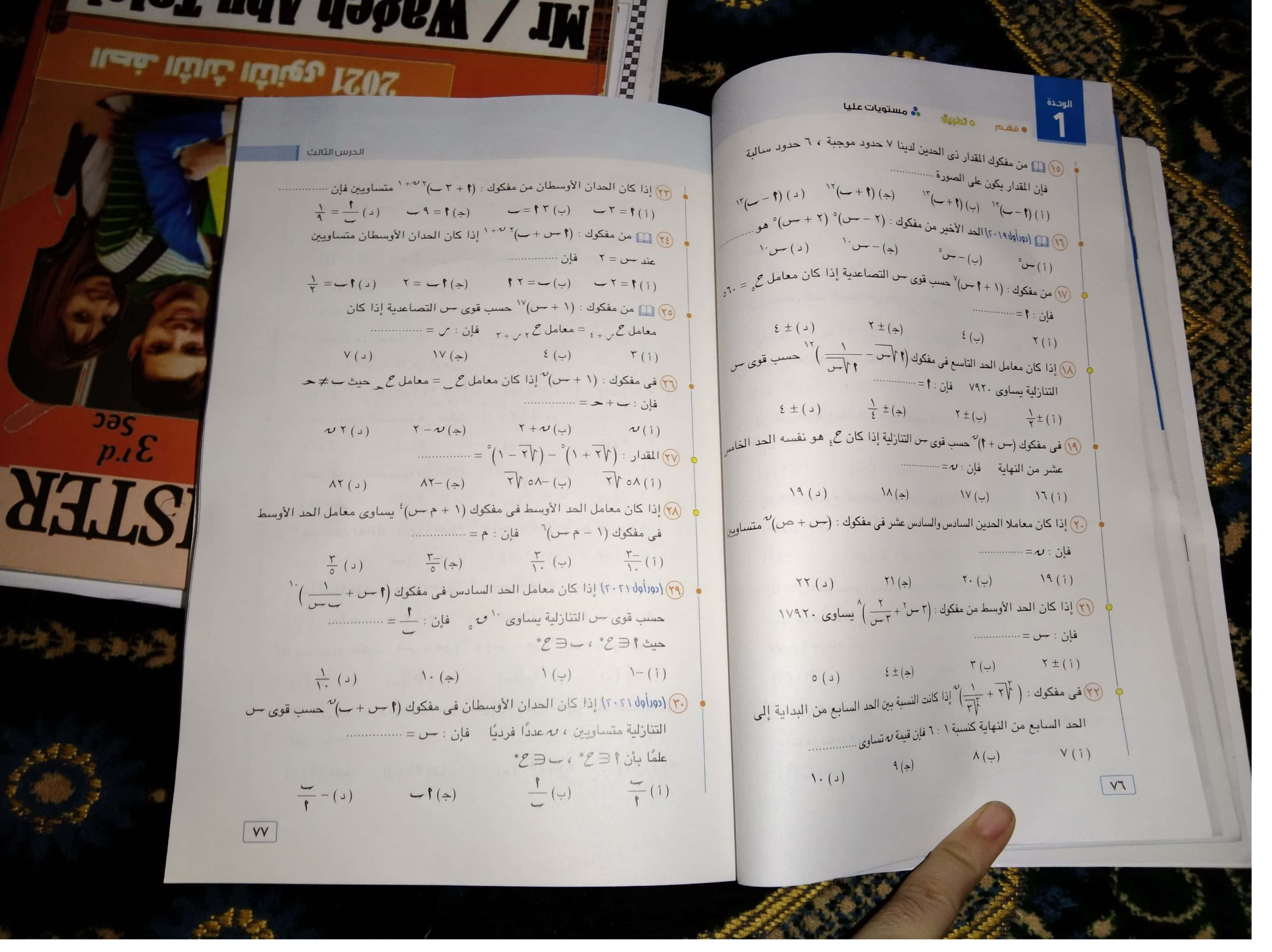
فإن : أ + ب = ...

(أ) ١- (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

⑭ إذا كان أ هو مجموع معاملات الحدود في مفكوك $(١ - ٣ س + ١٠ س^{٢})^{ن}$

، ب هو مجموع معاملات الحدود في مفكوك $(١ + س^{٢})^{ن}$ فإن : أ = ...

(أ) ب (ب) ٢ ب (جـ) $ب^{٢}$ (د) $ب^{٣}$



الوحدة 1 ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(١٥) من مفكوك المقدار ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة ، ٦ حدود سالبة فإن المقدار يكون على الصورة ....

(أ) $(أ - ب)^{١٢}$ (ب) $(أ + ب)^{١٣}$ (جـ) $(أ + ب)^{١٢}$ (د) $(أ - ب)^{١٣}$

(١٦) (دور أول ٢٠١٩) الحد الأخير من مفكوك : $(٢ - س)^{٥} (٢ + س)^{٥}$ هو ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $-س^{٥}$ (جـ) $-س^{١٠}$ (د) $س^{١٠}$

(١٧) من مفكوك : $(١ + أ س)^{٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_{٥} = ٦٠$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ± ٢ (د) ± ٤

(١٨) إذا كان معامل الحد التاسع فى مفكوك $(أ\sqrt{س} - \frac{١}{أ\sqrt{س}})^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية يساوى ٧٩٢٠ فإن : أ = ...

(أ) $± \frac{١}{٢}$ (ب) ± ٢ (جـ) $± \frac{١}{٤}$ (د) ± ٤

(١٩) فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان $ح_{٤}$ هو نفسه الحد الخامس عشر من النهاية فإن : ن = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٧ (جـ) ١٨ (د) ١٩

(٢٠) إذا كان معاملا الحدين السادس والسادس عشر فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ متساويين فإن : ن = ...

(أ) ١٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

(٢١) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك : $(٢س^{٢} + \frac{٢}{٣ س})^{٨}$ يساوى ١٧٩٢٠ فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ٣ (جـ) ± ٤ (د) ٥

(٢٢) فى مفكوك : $(\sqrt[٣]{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{٣}})^{ن}$ إذا كانت النسبة بين الحد السابع من البداية إلى الحد السابع من النهاية كنسبة ١ : ٦ فإن قيمة ن تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

٧٦

الدرس الثالث

(٢٣) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك : $(أ + ٣ ب)^{٢ن + ١}$ متساويين فإن ....

(أ) أ = ٣ ب (ب) ٣ أ = ب (جـ) أ = ٩ ب (د) $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٩}$

(٢٤) من مفكوك : $(أ س + ب)^{٢ن + ١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن ....

(أ) أ = ٢ ب (ب) ب = ٢ أ (جـ) أ ب = ٢ (د) $أ ب = \frac{١}{٢}$

(٢٥) من مفكوك : $(١ + س)^{١٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_{ر + ٤}$ = معامل $ح_{٢ر + ٣}$ فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٧ (د) ٧

(٢٦) فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل $ح_{ب}$ = معامل $ح_{جـ}$ حيث ب ≠ جـ فإن : ب + جـ = ...

(أ) ن (ب) ن + ٢ (جـ) ن - ٢ (د) ٢ ن

(٢٧) المقدار : $(\sqrt{٢} + ١)^{٥} - (\sqrt{٢} - ١)^{٥}$ = ...

(أ) $٥٨\sqrt{٢}$ (ب) $-٥٨\sqrt{٢}$ (جـ) -٨٢ (د) ٨٢

(٢٨) إذا كان معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + م س)^{٤}$ يساوى معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ - م س)^{٦}$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{-٣}{١٠}$ (ب) $\frac{٣}{١٠}$ (جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٢٩) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان معامل الحد السادس فى مفكوك $(أ س + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية يساوى $^{١٠}ق_{٥}$ فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

حيث أ ∈ ح* ، ب ∈ ح*

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ١٠ (د) $\frac{١}{١٠}$

(٣٠) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(أ س + ب)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية متساويين ، ن عددًا فرديًا فإن : س = ...

علمًا بأن أ ∈ ح* ، ب ∈ ح*

(أ) $\frac{ب}{أ}$ (ب) $\frac{أ}{ب}$ (جـ) أ ب (د) $-\frac{ب}{أ}$

٧٧

(٣١) من مفكوك : $(١ + \text{س})^{ن} = ١ + أ_{١}\text{س} + أ_{٢}\text{س}^{٢} + أ_{٣}\text{س}^{٣} + أ_{٤}\text{س}^{٤} + \cdots + أ_{ن}\text{س}^{ن}$ وكان $\frac{أ_{١} + أ_{٣}}{أ_{٢}} = ٣$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣٢) إذا كان : $١ + \frac{٥}{٢}\text{س} + \frac{٥ \times ٤}{٤ \underline{|٢}}\text{س}^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٨ \underline{|٣}}\text{س}^{٣} + \cdots + \frac{١}{٣٢}\text{س}^{٥} = ١٠٢٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٣٣) مجموعة حل المعادلة : $١ - ٦\text{س} + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}\text{س}^{٢} - \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١}\text{س}^{٣} + \cdots + \text{س}^{٦} = ٦٤$ فى ح هى ....

(أ) {-٣ ، ١} (ب) {١ ، ٣} (جـ) {-١ ، ٣} (د) {-١ ، -٣}

(٣٤) عدد الحدود الصحيحة فى مفكوك : $(١ + \sqrt{٣})^{٦}$ هو ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٥) عدد الحدود الصحيحة فى مفكوك : $(\sqrt{٣} + \frac{١}{\sqrt{٣}})^{٧}$ هو ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٦) عدد حدود مفكوك : $(\text{س} + \text{ص})^{٢٠٠٠} + (\text{س} - \text{ص})^{٢٠٠٠}$ بعد التبسيط هو ....

(أ) ١٠٠٠ (ب) ٢٠٠٠ (جـ) ٢٠٠١ (د) ١٠٠١

(٣٧) عدد حدود مفكوك : $(\text{س} + \text{ص})^{١٠٠٠} - (\text{س} - \text{ص})^{١٠٠٠}$ بعد التبسيط هو ....

(أ) ١٠٠٠ (ب) ٥٠٠ (جـ) ٥٠١ (د) ١٠٠١

(٣٨) عدد حدود مفكوك : $(\text{س} + \text{ص})^{١٦} + (\text{س} - \text{ص})^{١٤}$ بعد التبسيط هو ....

(أ) ١٥ (ب) ١٧ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

(٣٩) إذا كان عدد حدود المفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{ن} + (\text{س} - \text{ص})^{ن}$ بعد التبسيط هو ١٦ فإن : ن = ...

(أ) ٣٢ فقط. (ب) ٣١ فقط. (جـ) ٣٠ أ ٣١ (د) ٣١ أ ٣٢

(٤٠) فى مفكوك $(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٢ن}$ الحد الأوسط ≠ ....

(أ) $^{٢ن}\text{ق}_{ن}$ (ب) $\frac{^{٢ن}\text{ل}_{ن}}{\underline{|ن}}$

(جـ) $^{٢ن}\text{ل}_{ن}$ (د) $\frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \cdots \times (٢ن - ١)}{\underline{|ن}} \times ٢^{ن}$

(٤١) $\sum_{ر=٠}^{٢٠} {}^{٢٠}\text{ق}_{ر} = ...$

(أ) $٢^{٢٠}$ (ب) $٢^{١٩}$

(أ) $٢^{١٩} + \frac{١}{٢}\,{}^{٢٠}\text{ق}_{١٠}$ (د) $٢^{١٩} - \frac{١}{٢}\,{}^{٢٠}\text{ق}_{١٠}$

(٤٢) $\sum_{ر=٠}^{١٣} {}^{٢٧}\text{ق}_{ر} = ...$

(أ) $٢^{١٣}$ (ب) $٢^{١٤}$ (جـ) $٢^{٢٦}$ (د) $٢^{٢٧}$

(٤٣) إذا كان : $(١ + أ\text{س})^{ن} = ١ + ٨\text{س} + ٢٤\text{س}^{٢} + \cdots + أ^{ن}\text{س}^{ن}$

فإن : $\frac{أ - ن}{أ + ن} = ...$

(أ) ٣ (ب) -٣ (جـ) $\frac{-١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(٤٤) $١ + {}^{٢٠}\text{ق}_{١}\,\text{ت} + {}^{٢٠}\text{ق}_{٢}\,\text{ت}^{٢} + \cdots + {}^{٢٠}\text{ق}_{٢٠}\,\text{ت}^{٢٠} = ...$

(أ) ٢٠ (ب) $\underline{|٢٠}$ (جـ) -١٠٢٤ (د) ١٠٢٤

(٤٥) $^{ن}\text{ق}_{٠} - {}^{ن}\text{ق}_{١} + {}^{ن}\text{ق}_{٢} - {}^{ن}\text{ق}_{٣} + \cdots + (-١)^{ن}\,{}^{ن}\text{ق}_{ن} = ...$

(أ) $٢^{ن}$ (ب) $(-١)^{ن}$ (جـ) صفر (د) $(-٢)^{ن}$

(٤٦) $^{ن}\text{ق}_{٠} + {}^{ن}\text{ق}_{١}(\frac{١}{٣}) + {}^{ن}\text{ق}_{٢}(\frac{١}{٣})^{٢} + {}^{ن}\text{ق}_{٣}(\frac{١}{٣})^{٣} + \cdots + {}^{ن}\text{ق}_{ن}(\frac{١}{٣})^{ن}$

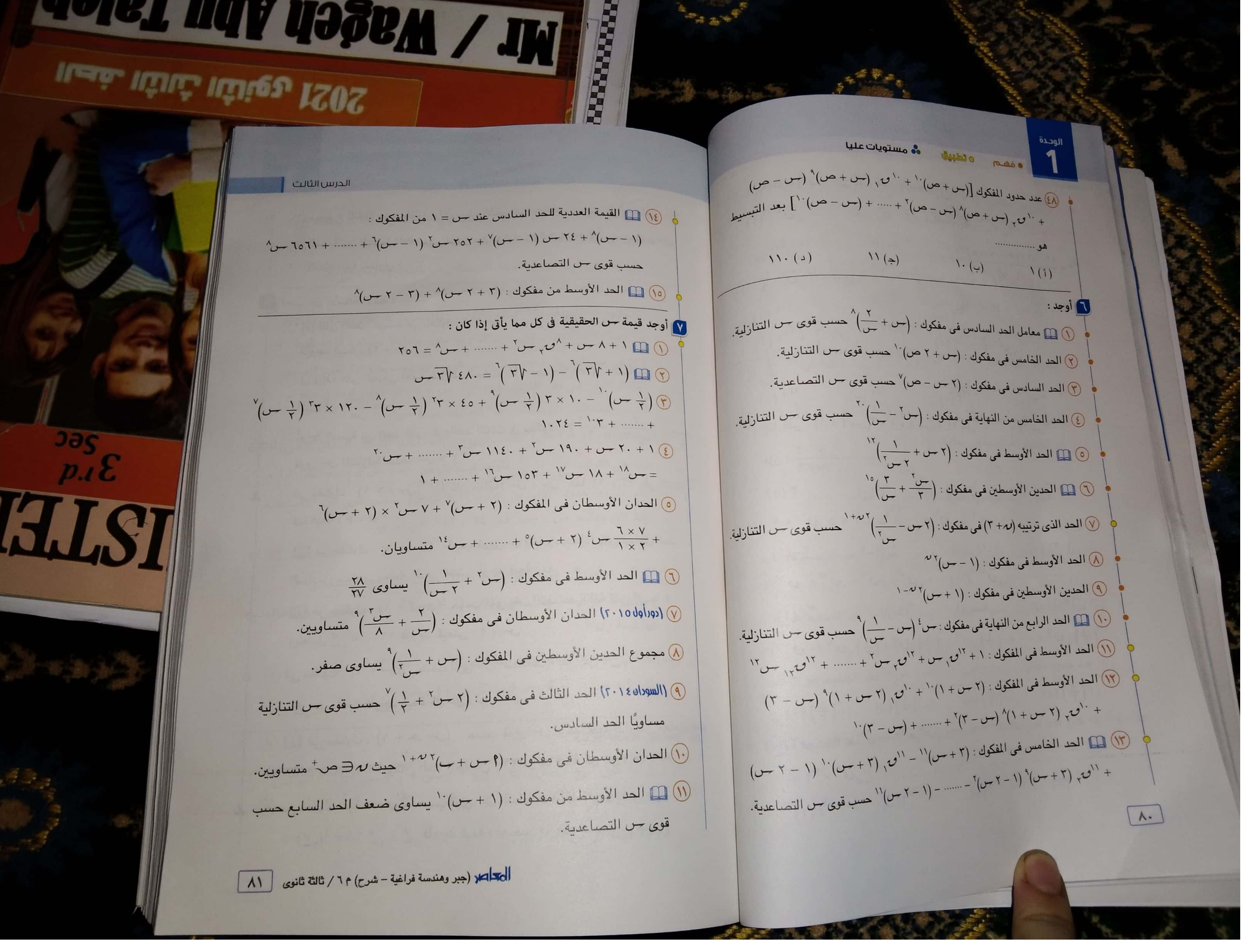
= ....

(أ) $(\frac{١}{٣})^{ن}$ (ب) $(\frac{٢}{٣})^{ن}$ (جـ) $(\frac{٤}{٣})^{ن}$ (د) $(\frac{٥}{٣})^{ن}$

(٤٧) $^{ن}\text{ق}_{٠} + ٢ \times {}^{ن}\text{ق}_{١} + ٢^{٢} \times {}^{ن}\text{ق}_{٢} + \cdots + ٢^{ر} \times {}^{ن}\text{ق}_{ر} + \cdots$

$+ ٢^{ن} \times {}^{ن}\text{ق}_{ن} = ...$

(أ) $٥^{ن}$ (ب) $٦^{ن}$ (جـ) $٤^{ن}$ (د) $٣^{ن}$



(٤٨) عدد حدود المفكوك $[(س + ص)^{١٠} + {}^{١٠}ق_{١} (س + ص)^{٩} (س - ص) + {}^{١٠}ق_{٢} (س + ص)^{٨} (س - ص)^{٢} + ... + (س - ص)^{١٠}]$ بعد التبسيط هو ....

(أ) ١ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١١٠

٦ أوجد :

① معامل الحد السادس فى مفكوك : $\left(س + \frac{٢}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية.

② الحد الخامس فى مفكوك : $(س + ٢ ص)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية.

③ الحد السادس فى مفكوك : $(٢ س - ص)^{٧}$ حسب قوى س التصاعدية.

④ الحد الخامس من النهاية فى مفكوك : $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٢٠}$ حسب قوى س التنازلية.

⑤ الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(٢ س + \frac{١}{٢ س^{٢}}\right)^{١٢}$

⑥ الحدين الأوسطين فى مفكوك : $\left(\frac{س^{٢}}{٣} + \frac{٣}{س}\right)^{١٥}$

⑦ الحد الذى ترتيبه (ن + ٣) فى مفكوك : $\left(٢ س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٢ن + ١}$ حسب قوى س التنازلية.

⑧ الحد الأوسط فى مفكوك : $(١ - س)^{٢ن}$

⑨ الحدين الأوسطين فى مفكوك : $(١ + س)^{٢ن - ١}$

⑩ الحد الرابع من النهاية فى مفكوك : $س^{٤} \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية.

⑪ الحد الأوسط فى المفكوك : $١ + {}^{١٢}ق_{١} س + {}^{١٢}ق_{٢} س^{٢} + ... + {}^{١٢}ق_{١٢} س^{١٢}$

⑫ الحد الأوسط فى المفكوك : $(٢ س + ١)^{١٠} + {}^{١٠}ق_{١} (٢ س + ١)^{٩} (س - ٣) + {}^{١٠}ق_{٢} (٢ س + ١)^{٨} (س - ٣)^{٢} + ... + (س - ٣)^{١٠}$

⑬ الحد الخامس فى المفكوك : $(٣ + س)^{١١} - {}^{١١}ق_{١} (٣ + س)^{١٠} (١ - ٢ س) + {}^{١١}ق_{٢} (٣ + س)^{٩} (١ - ٢ س)^{٢} - .... - (١ - ٢ س)^{١١}$ حسب قوى س التصاعدية.

⑭ القيمة العددية للحد السادس عند س = ١ من المفكوك :

$(١ - س)^{٨} + ٢٤ س (١ - س)^{٧} + ٢٥٢ س^{٢} (١ - س)^{٦} + ... + ٦٥٦١ س^{٨}$

حسب قوى س التصاعدية.

⑮ الحد الأوسط من مفكوك : $(٣ + ٢ س)^{٨} + (٣ - ٢ س)^{٨}$

٧ أوجد قيمة س الحقيقية فى كل مما يأتى إذا كان :

① $١ + ٨ س + {}^{٨}ق_{٢} س^{٢} + ... + س^{٨} = ٢٥٦$

② $(١ + \sqrt{٣})^{٦} - (١ - \sqrt{٣})^{٦} = ٤٨٠ \sqrt{٣} س$

③ $\left(\frac{١}{٢} س\right)^{١٠} - ١٠ \times ٣ \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٩} + ٤٥ \times ٣^{٢} \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٨} - ١٢٠ \times ٣^{٣} \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٧} + ... + ٣^{١٠} = ١٠٢٤$

④ $١ + ٢٠ س + ١٩٠ س^{٢} + ١١٤٠ س^{٣} + ... + س^{٢٠} = س^{١٨} + ١٨ س^{١٧} + ١٥٣ س^{١٦} + ... + ١$

⑤ الحدان الأوسطان فى المفكوك : $(٢ + س)^{٧} + ٧ س^{٢} \times (٢ + س)^{٦} + \frac{٧ \times ٦}{٢ \times ١} س^{٤} (٢ + س)^{٥} + ... + س^{١٤}$ متساويان.

⑥ الحد الأوسط فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$

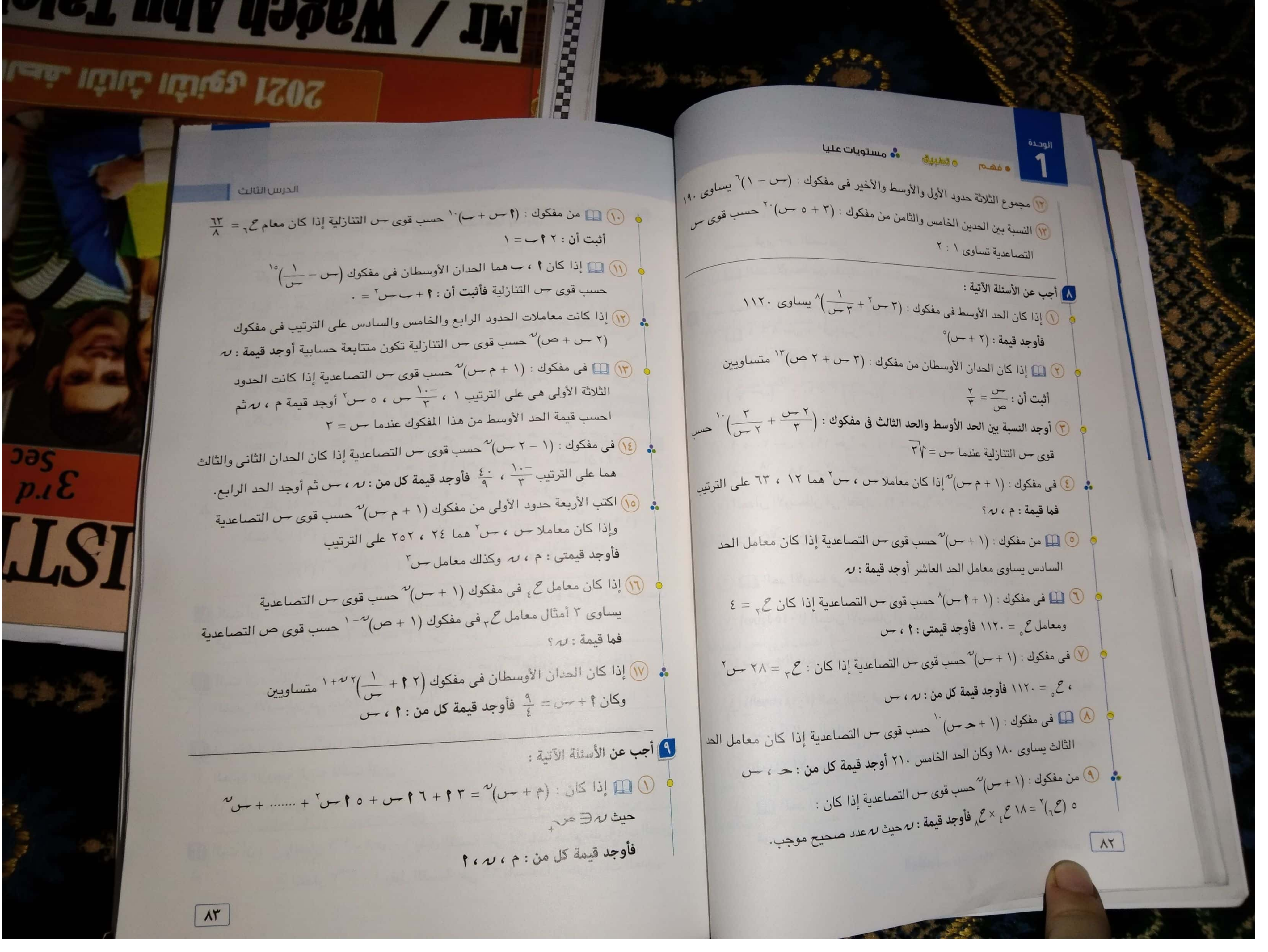
⑦ (دور أول ٢٠١٥) الحدان الأوسطان فى مفكوك : $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س^{٣}}{٨}\right)^{٩}$ متساويين.

⑧ مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك : $\left(س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$ يساوى صفر.

⑨ (السودان ٢٠١٤) الحد الثالث فى مفكوك : $\left(٢ س^{٢} + \frac{١}{٢}\right)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية مساويًا الحد السادس.

⑩ الحدان الأوسطان فى مفكوك : $(أ س + ب)^{٢ن + ١}$ حيث $ن \in ص^{+}$ متساويين.

⑪ الحد الأوسط من مفكوك : $(١ + س)^{١٠}$ يساوى ضعف الحد السابع حسب قوى س التصاعدية.



(١٢) مجموع الثلاثة حدود الأول والأوسط والأخير فى مفكوك : $(س - ١)^{٦}$ يساوى ١٩٠

(١٣) النسبة بين الحدين الخامس والثامن من مفكوك : $(٣ + ٥ س)^{٢٠}$ حسب قوى س التصاعدية تساوى ١ : ٢

٨ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك : $(٣ س^{٢} + \frac{١}{٣ س})^{٨}$ يساوى ١١٢٠

فأوجد قيمة : $(٢ + س)^{٥}$

(٢) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك : $(٣ س + ٢ ص)^{١٣}$ متساويين

أثبت أن : $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$

(٣) **أوجد النسبة بين الحد الأوسط والحد الثالث فى مفكوك :** $(\frac{٢ س}{٣} + \frac{٣}{٢ س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية عندما $س = \sqrt{٣}$

(٤) فى مفكوك : $(١ + م س)^{ن}$ إذا كان معاملا س ، $س^{٢}$ هما ١٢ ، ٦٣ على الترتيب

فما قيمة : م ، ن ؟

(٥) من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر **أوجد قيمة : ن**

(٦) فى مفكوك : $(١ + أ س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٢} = ٤$ ومعامل $ح_{٥} = ١١٢٠$ **فأوجد قيمتى : أ ، س**

(٧) فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_{٣} = ٢٨ س^{٢}$ ، $ح_{٥} = ١١٢٠$ **فأوجد قيمة كل من : ن ، س**

(٨) فى مفكوك : $(١ + ح س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد الثالث يساوى ١٨٠ وكان الحد الخامس ٢١٠ **أوجد قيمة كل من : ح ، س**

(٩) من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان :

٥ $(ح_{٦})^{٢} = ١٨ ح_{٤} \times ح_{٨}$ **فأوجد قيمة : ن** حيث ن عدد صحيح موجب.

(١٠) من مفكوك : $(أ س + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان معام $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٨}$

أثبت أن : $٢ أ ب = ١$

(١١) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان فى مفكوك $(س - \frac{١}{س})^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية **فأثبت أن :** $أ + ب س^{٢} = ٠$.

(١٢) إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس على الترتيب فى مفكوك $(٢ س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية **أوجد قيمة : ن**

(١٣) فى مفكوك : $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى هى على الترتيب ١ ، $\frac{-١٠}{٣}$ س ، ٥ $س^{٢}$ أوجد قيمة م ، ن ثم احسب قيمة الحد الأوسط من هذا المفكوك عندما س = ٣

(١٤) فى مفكوك : $(١ - ٢ س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحدان الثانى والثالث هما على الترتيب $\frac{-١٠}{٣}$ ، $\frac{٤٠}{٩}$ **فأوجد قيمة كل من : ن ، س** ثم أوجد الحد الرابع.

(١٥) اكتب الأربعة حدود الأولى من مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية وإذا كان معاملا س ، $س^{٢}$ هما ٢٤ ، ٢٥٢ على الترتيب

فأوجد قيمتى : م ، ن وكذلك معامل $س^{٣}$

(١٦) إذا كان معامل $ح_{٤}$ فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٣ أمثال معامل $ح_{٣}$ فى مفكوك $(١ + ص)^{ن - ١}$ حسب قوى ص التصاعدية

فما قيمة : ن ؟

(١٧) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(٢ أ + \frac{١}{س})^{٢ ن + ١}$ متساويين وكان $أ + س = \frac{٩}{٤}$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، س**

٩ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $(م + س)^{ن} = ٣ أ + ٦ أ س + ٥ أ س^{٢} + \dots + س^{ن}$

حيث $ن \in ص_{+}$

فأوجد قيمة كل من : م ، ن ، أ

⑦ إذا كان : (١ + م س)^{١٠} حسب قوى س التصاعدية يساوى

أ + ب س + حـ س^{٢} + ١٥ س^{٣} + ... + م^{١٠} س^{١٠}

فأوجد قيمة كل من : م ، أ ، ب ، حـ

⑧ إذا كان : (١ + حـ س)^{ن} = ١ + ٢٠ س + أ$_{١}$ س^{٢} + أ$_{٢}$ س^{٣} + ...

+ أ$_{ن-١}$ س^{ن} وكان ١٦ أ$_{١}$ = ٣ أ$_{٢}$ أوجد قيمة كل من : ن ، حـ حيث حـ ≠ ٠.

⑨ إذا كان : ن عددًا صحيحًا موجبًا وكان

(١ + حـ س)^{ن} = ١ + م$_{١}$ س + م$_{٢}$ س^{٢} + م$_{٣}$ س^{٣} + م$_{٤}$ س^{٤} + ... + م$_{ن}$ س^{ن}

وكان م$_{١}$ = ١٢ ، م$_{٤}$ = ٤ م$_{٢}$ أوجد قيمة كل من : ن ، حـ

⑩ (دور ثان ٢٠١٣) إذا كان : (أ − س)^{١٤} = حـ + حـ$_{١}$ س + حـ$_{٢}$ س^{٢} + حـ$_{٣}$ س^{٣}

+ ...... + حـ$_{١٤}$ س^{١٤} وكان ٤ حـ$_{٤}$ + ١١ (حـ$_{٣}$ + حـ$_{٢}$) = ٠ أثبت أن : أ = ٢

⑪ إذا كان (١ + س)^{ن} = أ$_{٠}$ + أ$_{١}$ س + أ$_{٢}$ س^{٢} + ... + أ$_{ن}$ س^{ن}

أثبت أن : (١) $\frac{أ_{١}}{أ_{٠}}$ + ٢ × $\frac{أ_{٢}}{أ_{١}}$ + ٣ × $\frac{أ_{٣}}{أ_{٢}}$ + ... + ن $\frac{أ_{ن}}{أ_{ن-١}}$ = $\frac{ن}{٢}$ (ن + ١)

(٢) أ$_{٠}$ + ٢ أ$_{١}$ + ٤ أ$_{٢}$ + ٨ أ$_{٣}$ + ... + ٢^{ن} أ$_{ن}$ = ٣^{ن}

١٠ أثبت أن : النسبة بين مجموع الحدين الأوسطين فى مفكوك (٢ س + ص)^{٧} والحد الأوسط فى مفكوك (٢ س + ص)^{٨} تساوى $\frac{١}{٤}$ ($\frac{٢}{ص}$ + $\frac{١}{س}$)

١١ أثبت أن : معامل الحد الأوسط فى مفكوك (س + ص)^{٢ن} يساوى مجموع معاملى الحدين الأوسطين فى مفكوك (س + ص)$^{٢ن-١}$

١٢ فى مفكوك (أ + ب)^{ن} إذا كان ل هو مجموع الحدود الفردية الرتبة ، م هو مجموع الحدود الزوجية الرتبة فأثبت أن :

① ل^{٢} − م^{٢} = (أ^{٢} − ب^{٢})^{ن} ② ٤ ل م = (أ + ب)^{٢ن} − (أ − ب)^{٢ن}

١٣ أثبت أن : ① المقدار ٣^{٢ن} − ٨ ن − ١ يقبل القسمة على ٦٤ باستخدام نظرية ذات الحدين.

② المقدار ٣^{٣ن} − ١ يقبل القسمة على ٢٦ باستخدام نظرية ذات الحدين.

١٤ أثبت أن : $\frac{ن^{ق}_{ر}}{ن^{ق}_{ر-١}}$ = $\frac{ن - ر + ١}{ر}$ واستخدم ذلك فى إيجاد قيمة س إذا كانت النسبة بين ح$_{٦}$ من مفكوك (س + $\frac{١}{س}$)^{١٥} حسب قوى س التنازلية ، ح$_{٥}$ من مفكوك (س − $\frac{١}{س^{٢}}$)^{١٤} حسب قوى س التنازلية تساوى $\frac{٨}{٩}$

١٥ أثبت أن : $^{ن+٢}ق_{ر+١}$: $^{ن+١}ق_{ر}$ = (ن + ٢) : (ر + ١) وإذا كان معامل الحد الثامن فى مفكوك (١ + س)$^{ن+٢}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ضعف معامل الحد السابع فى مفكوك (١ + س)$^{ن+١}$ حسب قوى س التصاعدية فأوجد قيمة ن ، إذا كان الحد الرابع فى المفكوك الأول يساوى الحد الثالث فى المفكوك الثانى فأوجد قيمة : س « $\frac{٣}{١٤}$ »

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① عدد حدود مفكوك : (١ + ٢ س + س^{٢})^{٥٠} يساوى ....

(أ) ١٠١ (ب) ٥٠ (جـ) ٥١ (د) ١٠٠

② عدد حدود مفكوك : (١ + س)^{١٠١} (١ + س^{٢} − س)^{١٠٠} يساوى ....

(أ) ٣٠٢ (ب) ٣٠١ (جـ) ٢٠٢ (د) ١٠١

③ عدد حدود المفكوك : (س + ص + ع)^{١٩} يساوى ....

(أ) ٢٠ (ب) ٢١ (جـ) ١٧١ (د) ٢١٠

④ إذا كان عدد حدود المفكوك (س + ص + ع)^{ن} يساوى (٧ ن + ١)

فإن : ن = ... حيث ن ∈ ص$_{+}$

(أ) ٩ (ب) ١١ (جـ) ١٣ (د) ١٥

⑤ درجة المقدار (س + (س^{٣} − ١)$^{\frac{١}{٢}}$)^{٥} + (س − (س^{٣} − ١)$^{\frac{١}{٢}}$)^{٥} تساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

الوحدة 1 • فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا

(٦) إذا كان : س > ١ وكان ح_3 في مفكوك : $\left(\frac{1}{\text{س}} + \text{س}^{\text{لو س}}\right)^5$ يساوي ١٠٠٠

فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) $5\sqrt{2}$ (د) ١٠٠

(٧) $1 - 4\,\text{جتا}^2\theta + 6\,\text{جتا}^4\theta - 4\,\text{جتا}^6\theta + \text{جتا}^8\theta =$ ....

(أ) $\text{جا}^8\theta$ (ب) $\text{جا}\,8\theta$ (ج) $\text{جتا}^8\theta$ (د) $\text{جتا}^{16}\theta$

(٨) عدد الحدود الصحيحة في مفكوك : $\left(\sqrt{3} + \sqrt[8]{5}\right)^{256}$ هو ....

(أ) ٣٢ (ب) ٣٣ (ج) ٣٤ (د) ٣٥

(٩) إذا كان : $(1 + \text{س} - 2\text{س}^2)^6 = 1 + \text{أ}_1\text{س} + \text{أ}_2\text{س}^2 + \dots + \text{أ}_{12}\text{س}^{12}$

فإن : $\text{أ}_2 + \text{أ}_4 + \text{أ}_6 + \dots + \text{أ}_{12} =$ ....

(أ) ٣١ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ٦٣

(١٠) معامل الحد الأوسط في مفكوك : $(16 + 32\,\text{س} + 24\,\text{س}^2 + 8\,\text{س}^3 + \text{س}^4)^5$

يساوي ....

(أ) ${}^{20}\text{ق}_{11}$ (ب) ${}^{22}\text{ق}_{11}$ (ج) $64\ {}^{15}\text{ق}_{8}$ (د) $1024\ {}^{20}\text{ق}_{10}$

(١١) معامل ح_{12} في مفكوك : $\sum_{\text{ر}=0}^{50} {}^{50}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{س} - 1)^{50-\text{ر}} \times 2^{\text{ر}}$ يساوي ....

(أ) ${}^{50}\text{ق}_{12}$ (ب) ${}^{50}\text{ق}_{12}$ (ج) ١ (د) صفر

(١٢) إذا كان : $\text{ت}^2 = -1$ ، $\text{س} + \text{ص}\,\text{ت} = \left(\sqrt{3} + \frac{\text{ت}}{2}\right)^5 + \left(\sqrt{3} - \frac{\text{ت}}{2}\right)^5$

فإن ....

(أ) ص = ٠

(ب) س = ٠

(ج) س > ٠ ، ص > ٠

(د) س > ٠ ، ص < ٠

(١٣) ${}^{10}\text{ق}_0 + \frac{1}{2}\,{}^{10}\text{ق}_1 + \frac{1}{3}\,{}^{10}\text{ق}_2 + \frac{1}{4}\,{}^{10}\text{ق}_3 + \dots + \frac{1}{11}\,{}^{10}\text{ق}_{10} =$ ....

(أ) 2^9

(ب) 2^{55}

(ج) $\frac{1}{11}\left[(2)^{11} - 1\right]$

(د) $\frac{3}{10}(2)^{10}$

(١٤) في مفكوك $(1 + \text{س})^{59}$ حسب قوى س التصاعدية مجموع معاملات الـ ٣٠ حدًا الأخيرة يساوي ....

(أ) 2^{29} (ب) 2^{28} (ج) 2^{58} (د) 2^{59}

(١٥) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{1}{\text{س}} + \text{س}\,\text{جا}\,\text{س}\right)^{10}$ يساوي $7\frac{7}{8}$

فإن : س = ...

(أ) $2\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}} \times \frac{\pi}{6}$ (ب) $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}} \times \frac{\pi}{6}$

(ج) $\text{ن}\pi + \frac{\pi}{6}$ (د) $\text{ن}\pi + (-1)^{\text{ن}} \times \frac{\pi}{3}$

١٧ أثبت أن : الحد الأوسط في مفكوك $(1 + \text{س})^{2\text{ن}}$

يساوي $\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2\text{ن} - 1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \text{ن}} (2\,\text{س})^{\text{ن}}$

١٨ أوجد مفكوك : $\left(\text{أ} + \sqrt{\text{ب}}\right)^{2\text{ن}} + \left(\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}\right)^{2\text{ن}}$ حيث أ ، ب ، ن $\in \text{ص}_+$ ، ن عدد زوجي ثم أوجد الحد الأوسط لهذا المفكوك في أبسط صورة.

وإذا كان : أ = ٥ ، ب = ٢٠ فأثبت أن : $\left(\text{أ} + \sqrt{\text{ب}}\right)^{2\text{ن}} + \left(\text{أ} - \sqrt{\text{ب}}\right)^{2\text{ن}}$

يقبل القسمة على ٥

١٩ أثبت أن : $({}^{\text{ن}}\text{ق}_0)^2 + ({}^{\text{ن}}\text{ق}_1)^2 + ({}^{\text{ن}}\text{ق}_2)^2 + \dots + ({}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}})^2 = \frac{|2\text{ن}}{(|\text{ن})^2}$

مستخدمًا مفكوك $(1 + \text{س})^{2\text{ن}}$

٢٠ إذا كان مجموع معاملات الحدود ذات القوى الزوجية في حاصل الضرب

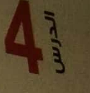
$(1 - \text{س} + \text{س}^2 - \text{س}^3 + \dots + \text{س}^{2\text{ن}})(1 + \text{س} + \text{س}^2 + \dots + \text{س}^{2\text{ن}})$

يساوي ٦١ فأوجد قيمة ن

٢١ أثبت أن :

(١) ${}^{25}\text{ق}_0\ {}^{25}\text{ق}_{10} + {}^{25}\text{ق}_1\ {}^{25}\text{ق}_{11} + {}^{25}\text{ق}_2\ {}^{25}\text{ق}_{12} + \dots + {}^{25}\text{ق}_{15}\ {}^{25}\text{ق}_{25} = {}^{50}\text{ق}_{15}$

(٢) ${}^{25}\text{ق}_0\ {}^{25}\text{ق}_5 - {}^{25}\text{ق}_1\ {}^{25}\text{ق}_6 + {}^{25}\text{ق}_2\ {}^{25}\text{ق}_7 - \dots + {}^{25}\text{ق}_{20}\ {}^{25}\text{ق}_{25} = {}^{25}\text{ق}_{10}$



إيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ من مفكوك ذات الحدين

في مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية لإيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ نتبع ما يلي:

① نوجد $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ في أبسط صورة له لتحديد أس المتغير س بدلالة ر

② نساوي أس المتغير س الناتج في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ بالأس المطلوب ك للحصول على قيمة ر ومنها نحدد الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{\text{ك}}$ وهو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

③ نوجد الحد المشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ بالتعويض عن قيمة ر التي حصلنا عليها في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

ملاحظة

① إذا كانت قيمة ر التي حصلنا عليها لا تنتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فإن هذا يدل على أنه لا يوجد حد مشتمل على $\text{س}^{\text{ك}}$ المطلوبة.

② إذا كان المطلوب إيجاد الحد الخالي من س فنعتبر أن المطلوب إيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{٠}$ أي نساوي أس المتغير س في $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ بالصفر ونوجد قيمة ر

مثال ①

أوجد الحد الذي يشتمل على $\text{س}^{٨}$ في مفكوك: $\left(٢\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

نفرض أن الحد الذي يشتمل على $\text{س}^{٨}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} (٢\text{س}^{٢})^{١٠-\text{ر}} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times ٢^{١٠-\text{ر}} \times \text{س}^{٢٠-٢\text{ر}}$

$= {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}} \times ٢^{١٠-\text{ر}} \times \text{س}^{٢٠-٣\text{ر}}$

$\therefore$ نضع $٢٠ - ٣\text{ر} = ٨ \quad \therefore ٣\text{ر} = ١٢$

$\therefore \text{ر} = ٤ \qquad \therefore \text{ح}_{٥}$ هو الحد الذي يشتمل على $\text{س}^{٨}$

$\therefore \text{ح}_{٥} = {}^{١٠}\text{ق}_{٤} \times ٢^{١٠-٤} \times \text{س}^{٢٠-٣(٤)} = ١٣٤٤٠\,\text{س}^{٨}$

مثال ②

أوجد معامل $\text{س}^{-٦}$ في مفكوك: $\left(\frac{\text{س}}{٣} - \frac{٣}{٢\text{س}}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

نفرض أن الحد المشتمل على $\text{س}^{-٦}$ هو $\text{ح}_{\text{ر}+١}$

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{-٣}{٢\text{س}}\right)^{\text{ر}} \left(\frac{\text{س}}{٣}\right)^{٨-\text{ر}}$

$= {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-\text{ر}} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨-\text{ر}} \times \text{س}^{٨-\text{ر}}$

$= {}^{٨}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{\text{ر}} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{٨-\text{ر}} \times \text{س}^{٨-٢\text{ر}}$

$\therefore$ نضع $٨ - ٢\text{ر} = -٦ \qquad \therefore ٢\text{ر} = ١٤$

$\therefore \text{ر} = ٧ \qquad \therefore \text{ح}_{٨}$ هو الحد الذي يشتمل على $\text{س}^{-٦}$

$\therefore \text{ح}_{٨} = {}^{٨}\text{ق}_{٧} \times \left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٧} \times \left(\frac{١}{٣}\right)^{١} \times \text{س}^{-٦} = \frac{-٧٢٩}{١٦}\,\text{س}^{-٦}$

$\therefore$ معامل $\text{س}^{-٦}$ يساوي $\frac{-٧٢٩}{١٦}$

مثال ③

أوجد الحد الخالي من س في مفكوك: $\left(\text{س} + \frac{١}{٤\text{س}^{٣}}\right)^{١٦}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$\therefore \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٦}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{١}{٤\text{س}^{٣}}\right)^{\text{ر}} (\text{س})^{١٦-\text{ر}}$

$= {}^{١٦}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{ر}} \times \text{س}^{-٣\text{ر}} \times \text{س}^{١٦-\text{ر}}$

$= {}^{١٦}\text{ق}_{\text{ر}} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{ر}} \times \text{س}^{١٦-٤\text{ر}}$

بوضع: $١٦ - ٤\text{ر} = ٠$ لإيجاد الحد المشتمل على $\text{س}^{٠}$ (الحد الخالي من س)

$\therefore ٤\text{ر} = ١٦ \qquad \therefore \text{ر} = ٤ \qquad \therefore \text{ح}_{٥}$ هو الحد الخالي من س

$\therefore \text{ح}_{٥} = {}^{١٦}\text{ق}_{٤} \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٤} \times \text{س}^{٠} = ١٨٢٠ \times \frac{١}{٢٥٦} = \frac{٤٥٥}{٦٤}$

مثال 4

أوجد معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{9}$ في مفكوك: $\left(\frac{س}{ص}+\frac{ص}{س}\right)^{15}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$\therefore ح_{ر+1} = {}^{15}ق_ر \left(\frac{ص}{س}\right)^{ر} \left(\frac{س}{ص}\right)^{15-ر} = {}^{15}ق_ر \left(\frac{س}{ص}\right)^{-ر} \left(\frac{س}{ص}\right)^{15-ر}$

$= {}^{15}ق_ر \left(\frac{س}{ص}\right)^{15-2ر}$

، بوضع $15 - 2ر = 9 \longrightarrow ر = 3$ $\therefore ح_4$ هو الحد المشتمل على $\left(\frac{س}{ص}\right)^{9}$

$\therefore ح_4 = {}^{15}ق_3 \left(\frac{س}{ص}\right)^{15-2(3)} = 455 \left(\frac{س}{ص}\right)^{9}$

$\therefore$ معامل الحد المشتمل على $\left(\frac{س}{ص}\right)^{9}$ هو 455

مثال 5

أوجد الحد المشتمل على $س^4$ في المقدار: $\left(س^2+\frac{1}{س^2}\right)^{12} - \left(س+\frac{1}{س}\right)^{12}$

الحل

نبحث عن الحد المشتمل على $س^4$ في مفكوك كلٍ من المقدارين:

$\left(س^2+\frac{1}{س^2}\right)^{12}$ ، $\left(س+\frac{1}{س}\right)^{12}$

أولاً: بالنسبة لمفكوك: $\left(س^2+\frac{1}{س^2}\right)^{12}$:

$ح_{ر+1} = {}^{12}ق_ر \left(\frac{1}{س^2}\right)^{ر} (س^2)^{12-ر} = {}^{12}ق_ر س^{-2ر} \times س^{24-2ر}$

$= {}^{12}ق_ر \times س^{24-4ر}$

$\therefore 24 - 4ر = 4$ $\therefore 4ر = 20$

$\therefore ر = 5$ $\therefore$ الحد المشتمل على $س^4$ هو $ح_{5+1}$ أي $ح_6$

$\therefore ح_6 = {}^{12}ق_5 س^4$ (1)

ثانيًا: بالنسبة لمفكوك: $\left(س+\frac{1}{س}\right)^{12}$:

$ح_{ر+1} = {}^{12}ق_ر \left(\frac{1}{س}\right)^{ر} (س)^{12-ر} = {}^{12}ق_ر س^{-ر} \times س^{12-ر}$

$= {}^{12}ق_ر \times س^{12-2ر}$

$\therefore 12 - 2ر = 4$ $\therefore 2ر = 8$

$\therefore ر = 4$ $\therefore$ الحد المشتمل على $س^4$ هو $ح_{4+1}$ أي $ح_5$

$\therefore ح_5 = {}^{12}ق_4 س^4$ (2)

من (1) ، (2):

$\therefore$ الحد المشتمل على $س^4$ في المقدار المعطى $= {}^{12}ق_5 س^4 - {}^{12}ق_4 س^4 = 297 س^4$

مثال 6

أوجد معامل $س^{14}$ في مفكوك: $32 س^4 \left(\frac{س^2}{2}+\frac{2}{س^3}\right)^{15}$ حسب قوى س التنازلية.

الحل

$ح_{ر+1} = 32 س^4 \times {}^{15}ق_ر \left(\frac{2}{س^3}\right)^{ر} \left(\frac{س^2}{2}\right)^{15-ر}$

$= 32 س^4 \times {}^{15}ق_ر (2)^{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{15-ر} \times س^{-3ر} \times س^{30-2ر}$

$= 32 \times {}^{15}ق_ر (2)^{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{15-ر} \times س^{4-3ر+30-2ر}$

$= 32 \times {}^{15}ق_ر (2)^{ر} \left(\frac{1}{2}\right)^{15-ر} \times س^{34-5ر}$

وللحصول على معامل $س^{14}$ نضع $34 - 5ر = 14$ $\therefore ر = 4$

$\therefore$ معامل $س^{14} = 32 \times {}^{15}ق_4 (2)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1365}{4}$

حل آخر:

في مفكوك: $32 س^4 \left(\frac{س^2}{2}+\frac{2}{س^3}\right)^{15}$



الحد المشتمل على $س^{١٤}$ يساوى $٣٢ س^{٤}$ × الحد المشتمل على $س^{١٠}$ لذلك نوجد الحد المشتمل على $س^{١٠}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ وليكن $ح_{ر+١}$ حيث :

$$ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{ر} \left(\frac{س^{٢}}{٢}\right)^{١٥-ر}$$

$$= {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-ر} \times س^{-٣ر} \times س^{٣٠-٢ر}$$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{ر} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٥-ر} \times س^{٣٠-٥ر}$$

$\therefore ٣٠ - ٥ر = ١٠$ $\therefore ر = ٤$

$\therefore$ معامل $س^{١٠} = {}^{١٥}ق_{٤} (٢)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١١}$

$\therefore$ معامل $س^{١٤} = ٣٢ \times {}^{١٥}ق_{٤} (٢)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١١} = \frac{١٣٦٥}{٤}$

مثال ٧

أثبت أن مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}}\right)^{١١}$ لا يحتوى على حد خال من س كما لا يحتوى على حد مشتمل على $س^{٣}$ ولكنه يحتوى على حد يشتمل على $س^{-٣}$

الحل

$$\because ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٢})^{١١-ر}$$

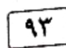
$$= {}^{١١}ق_{ر} (٢)^{ر} س^{-٣ر} \times س^{٢٢-٢ر}$$

$$\therefore ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_{ر} (٢)^{ر} \times س^{٢٢-٥ر}$$

إذا كان المفكوك يحتوى على حد خالٍ من س فيجب أن يكون : $٢٢ - ٥ر = ٠$

أى : $٥ر = ٢٢$ أى : $ر = ٤\frac{٢}{٥}$

، $\because$ ر يجب أن تكون عددًا طبيعيًا.



$\therefore$ لا يوجد حد خالٍ من س فى هذا المفكوك

وإذا كان المفكوك يحتوى على حد يشتمل على $س^{٣}$ فيجب أن يكون : $٢٢ - ٥ر = ٣$

أى : $٥ر = ١٩$ $\therefore ر = ٣\frac{٤}{٥}$

، $\because$ ر يجب أن تكون عددًا طبيعيًا.

$\therefore$ لا يوجد حد يشتمل على $س^{٣}$ فى هذا المفكوك

وإذا كان المفكوك يحتوى على حد يشتمل على $س^{-٣}$ فيجب أن يكون : $٢٢ - ٥ر = -٣$

أى : $٥ر = ٢٥$ $\therefore ر = ٥$

$\therefore$ المفكوك يحتوى على حد يشتمل على $س^{-٣}$ هو $ح_{٥+١}$ أى $ح_{٦}$

مثال ٨

إذا كان مفكوك $\left(س^{٤} + \frac{١}{س^{٣}}\right)^{ن}$ يحتوى على حد خالٍ من س

فأثبت أن : ن = ٧ أو مضاعفًا للعدد ٧ وأوجد الحد الخالى من س عندما ن = ٧

الحل

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٤})^{ن-ر}$$

$$= {}^{ن}ق_{ر} س^{-٣ر} \times س^{٤ن-٤ر} = {}^{ن}ق_{ر} س^{٤ن-٧ر}$$

، $\because$ المفكوك يحتوى على حد خالٍ من س

$\therefore ٤ن - ٧ر = ٠$ $\therefore ر = \frac{٤ن}{٧}$

، $\because$ ر يجب أن تكون عددًا طبيعيًا. $\therefore$ ن يجب أن تقبل القسمة على ٧

$\therefore$ ن = ٧ أو مضاعفات العدد ٧

وعندما ن = ٧ تكون $ر = \frac{٤ \times ٧}{٧} = ٤$ أى يكون الحد الخالى من س هو $ح_{٤+١}$ أى $ح_{٥}$

ويكون $ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٤} = ٣٥$

أى أن : الحد الخالى من س = ٣٥



مثال 9

في مفكوك: $(س^{ك} + \frac{1}{س})^{12}$ حيث ك ∈ ص+ أوجد:

① قيم ك التي تجعل للمفكوك حداً خالياً من س

② النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها من أولاً.

الحل

① نفرض أن الحد الخالي من س هو $ح_{ر+1}$

∴ $ح_{ر+1} = {}^{12}ق_{ر} (\frac{1}{س})^{ر} (س^{ك})^{12-ر} = {}^{12}ق_{ر} × س^{-ر} × س^{12ك - كر}$

∴ $ح_{ر+1} = {}^{12}ق_{ر} × س^{12ك - كر - ر}$

ولكي يكون هذا الحد خالٍ من س ∴ $12ك - كر - ر = 0$

∴ $12ك = كر + ر$ ∴ $12ك = ر(ك + 1)$

∴ $ر = \frac{12ك}{ك+1}$ ، ∵ ر ∈ ط ، ك + 1 لا يمكن أن يكون قاسم من قواسم ك

∴ ك + 1 قاسم من قواسم العدد 12

∴ ك + 1 = 1 ومنها ك = 0 (مرفوضة لأن ك ∈ ص+)

، ك + 1 = 2 ومنها ك = 1

، ك + 1 = 3 ومنها ك = 2

، ك + 1 = 4 ومنها ك = 3

، ك + 1 = 6 ومنها ك = 5

، ك + 1 = 12 ومنها ك = 11

② ∵ أكبر قيمة لـ ك = 11 ، وذلك عند ر = 11

∴ الحد الخالي من س هو $ح_{12} = {}^{12}ق_{11} = {}^{12}ق_{1} = 12$

، الحد الأوسط = $ح_{\frac{12}{2}+1} = ح_{7}$ ∴ معامل الحد الأوسط = ${}^{12}ق_{6} = 924$

∴ $\frac{\text{الحد الخالي من س}}{\text{معامل الحد الأوسط}} = \frac{12}{924} = \frac{1}{77}$

مثال 10

أوجد: ① معامل $س^2$ في حاصل ضرب $(1 - 2س)^5 (1 + س)^{10}$

② معامل $س^2$ في مفكوك $(1 + س - 2س^2)^8$

الحل

① بفرض أن: الحد العام في مفكوك $(1 - 2س)^5$ هو $ح_{م+1}$

، الحد العام في مفكوك $(1 + س)^{10}$ هو $ح_{ن+1}$

∴ $ح_{م+1} = {}^{5}ق_{م} (-2س)^{م} = {}^{5}ق_{م} × (-2)^{م} × س^{م}$

، $ح_{ن+1} = {}^{10}ق_{ن} س^{ن}$

∴ $ح_{م+1} × ح_{ن+1} = {}^{5}ق_{م} × {}^{10}ق_{ن} × (-2)^{م} × س^{م+ن}$

∴ معامل الحد المشتمل على $س^2$ = ${}^{5}ق_{م} × {}^{10}ق_{ن} × (-2)^{م}$

لكل م ، ن ∈ ط ، م + ن = 2

أي أن:

م	0	1	2
ن	2	1	0

∴ معامل $س^2$ في حاصل الضرب = ${}^{5}ق_{0} × {}^{10}ق_{2} × (-2)^{0}$

$+ {}^{5}ق_{1} × {}^{10}ق_{1} × (-2)^{1}$

$+ {}^{5}ق_{2} × {}^{10}ق_{0} × (-2)^{2}$

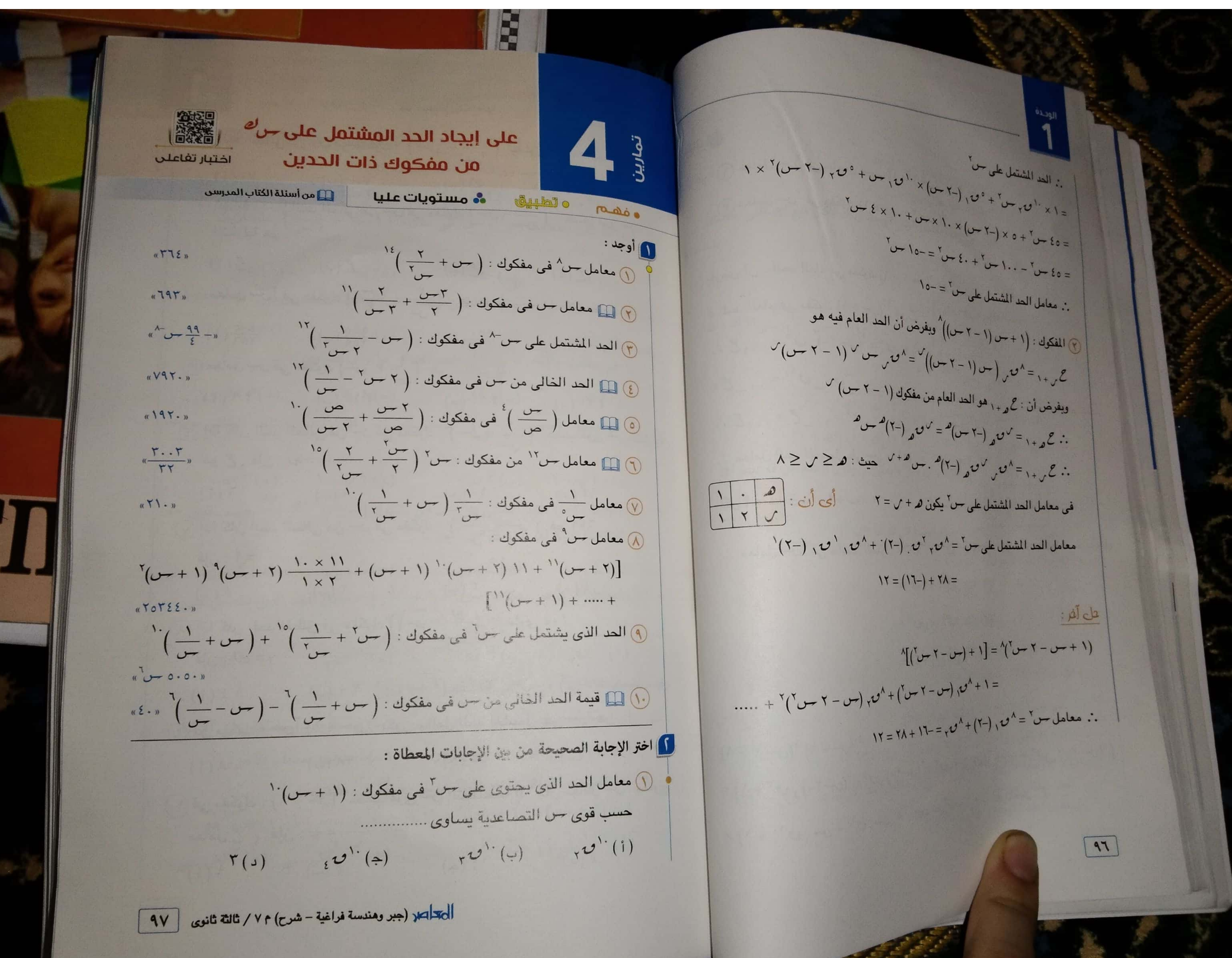
$= 45 + (-100) + 40 = -15$

حل آخر:

$(1 - 2س)^5 (1 + س)^{10}$

$= (1 + {}^{5}ق_{1}(-2س)^1 + {}^{5}ق_{2}(-2س)^2 + {}^{5}ق_{3}(-2س)^3 + ... + {}^{5}ق_{5}(-2س)^5)$

$× (1 + {}^{10}ق_{1} س + {}^{10}ق_{2} س^2 + {}^{10}ق_{3} س^3 + ... + {}^{10}ق_{10} س^{10})$



$\therefore$ الحد المشتمل على $س^{٢}$

$= ١ \times {}^{١٠}ق_{٢}\, س^{٢} + {}^{٥}ق_{١} (-٢ س) \times {}^{١٠}ق_{١}\, س + {}^{٥}ق_{٢} (-٢ س)^{٢} \times ١$

$= ٤٥ س^{٢} + ٥ \times (-٢ س) \times ١٠ \times س + ١٠ \times ٤ س^{٢}$

$= ٤٥ س^{٢} - ١٠٠ س^{٢} + ٤٠ س^{٢} = -١٥ س^{٢}$

$\therefore$ معامل الحد المشتمل على $س^{٢} = -١٥$

(٢) المفكوك : $(١ + س (١ - ٢ س))^{٨}$ ويفرض أن الحد العام فيه هو

$ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} (س (١ - ٢ س))^{ر} = {}^{٨}ق_{ر}\, س^{ر} (١ - ٢ س)^{ر}$

ويفرض أن : $ح_{هـ+١}$ هو الحد العام من مفكوك $(١ - ٢ س)^{ر}$

$\therefore ح_{هـ+١} = {}^{ر}ق_{هـ} (-٢ س)^{هـ} = {}^{ر}ق_{هـ} (-٢)^{هـ} س^{هـ}$

$\therefore ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر}\, {}^{ر}ق_{هـ} (-٢)^{هـ} . س^{هـ+ر}$ حيث : $هـ \le ر \le ٨$

فى معامل الحد المشتمل على $س^{٢}$ يكون $هـ + ر = ٢$ أى أن :

هـ	٠	١
ر	٢	١

معامل الحد المشتمل على $س^{٢} = {}^{٨}ق_{٢}\, {}^{٢}ق_{٠} . (-٢)^{٠} + {}^{٨}ق_{١}\, {}^{١}ق_{١} (-٢)^{١}$

$= ٢٨ + (-١٦) = ١٢$

حل آخر :

$(١ + س - ٢ س^{٢})^{٨} = [١ + (س - ٢ س^{٢})]^{٨}$

$= ١ + {}^{٨}ق_{١} (س - ٢ س^{٢}) + {}^{٨}ق_{٢} (س - ٢ س^{٢})^{٢} + ...$

$\therefore$ معامل $س^{٢} = {}^{٨}ق_{١} (-٢) + {}^{٨}ق_{٢} = -١٦ + ٢٨ = ١٢$

تمارين 4

على إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد :

(١) معامل $س^{٨}$ فى مفكوك : $\left(س + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٤}$ «٣٦٤»

(٢) معامل $س$ فى مفكوك : $\left(\frac{٣ س}{٢} + \frac{٢}{٣ س}\right)^{١١}$ «٦٩٣»

(٣) الحد المشتمل على $س^{-٨}$ فى مفكوك : $\left(س - \frac{١}{٢ س^{٢}}\right)^{١٢}$ «$-\frac{٩٩}{٤} س^{-٨}$»

(٤) الحد الخالى من $س$ فى مفكوك : $\left(٢ س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٢}$ «٧٩٢٠»

(٥) معامل $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٤}$ فى مفكوك : $\left(\frac{٢ س}{ص} + \frac{ص}{٢ س}\right)^{١٠}$ «١٩٢٠»

(٦) معامل $س^{١٢}$ من مفكوك : $س^{٢} \left(\frac{س^{٢}}{٢} + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٥}$ «$\frac{٣٠٠٣}{٣٢}$»

(٧) معامل $\frac{١}{س^{٥}}$ فى مفكوك : $\frac{١}{س^{٣}} \left(س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠}$ «٢١٠»

(٨) معامل $س^{٩}$ فى مفكوك :

$[(٢ + س)^{١١} + ١١ (٢ + س)^{١٠} (١ + س) + \frac{١١ \times ١٠}{٢ \times ١} (٢ + س)^{٩} (١ + س)^{٢}$
$+ ..... + (١ + س)^{١١}]$ «٢٥٣٤٤٠»

(٩) الحد الذى يشتمل على $س^{٦}$ فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٥} + \left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٠}$ «$٥٠٥٠ س^{٦}$»

(١٠) قيمة الحد الخالى من $س$ فى مفكوك : $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٦} - \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٦}$ «٤٠»

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣}$ فى مفكوك : $(١ + س)^{١٠}$ حسب قوى $س$ التصاعدية يساوى ....

(أ) ${}^{١٠}ق_{٢}$ (ب) ${}^{١٠}ق_{٣}$ (جـ) ${}^{١٠}ق_{٤}$ (د) ٣

② الحد الخالي من س في مفكوك : $\left(س^2 + \frac{1}{س^2}\right)^8$ يساوي ....

(أ) 70 (ب) −70 (ج) 56 (د) −56

③ (دور أول 2017) الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س - \frac{1}{س}\right)^{10}$ حسب قوى س التنازلية هو ....

(أ) $ح_5$ (ب) $ح_7$ (ج) $ح_6$ (د) $ح_4$

④ معامل $س^4$ في مفكوك $\left(\frac{س}{2} - \frac{3}{س^2}\right)^{10}$ هو ....

(أ) $\frac{405}{256}$ (ب) $\frac{405}{259}$ (ج) $\frac{450}{263}$ (د) لا شيء مما سبق.

⑤ معامل س في مفكوك $\left(س^2 + \frac{أ}{س}\right)^5$ هو ....

(أ) $9أ^2$ (ب) $10أ^3$ (ج) $10أ^2$ (د) $10أ$

⑥ إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك : $\left(س + \frac{1}{س}\right)^ن$ حسب قوى س التنازلية هو $ح_5$ فإن : ن = ...

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 10 (د) 12

⑦ إذا كان الحد الخالي من س في مفكوك : $\left(\frac{أ}{س^2} + س\right)^9$ هو 672 فإن : أ = ...

(أ) 8 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

⑧ إذا كان الحد المطلق في مفكوك $\left(\sqrt{س} - \frac{ك}{س^2}\right)^{10}$ يساوي 405 فإن : ك = ...

(أ) ±1 (ب) ±2 (ج) ±3 (د) لا شيء مما سبق.

⑨ من مفكوك : $س^2 (1 + س)^8$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^5$ هو ....

(أ) 8 (ب) 28 (ج) 56 (د) 70

⑩ في مفكوك : $(1 + س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $س^5$ يساوي معامل $ح_{10}$ فإن : ن = ...

(أ) 9 (ب) 5 (ج) 14 (د) 4

⑪ من مفكوك : $\left(أس + \frac{1}{بس}\right)^{10}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع فإن : ....

(أ) $أب = \frac{6}{5}$ (ب) $أب = \frac{5}{6}$ (ج) $أب = \frac{36}{25}$ (د) $أب = \frac{25}{36}$

⑫ إذا كان : معاملا $س^3$ ، $س^6$ في مفكوك $\left(أس^2 + \frac{1}{أس}\right)^9$ متساويين فإن : أ = ...

(أ) 1 (ب) −1 (ج) ±1 (د) ±2

⑬ في مفكوك : $\left(2 + \frac{س}{3}\right)^ن$ إذا كان معاملا $س^7$ ، $س^8$ متساويين فإن : ن = ...

(أ) 56 (ب) 55 (ج) 45 (د) 15

⑭ في مفكوك $\left(\sqrt[3]{س} - \frac{1}{\sqrt[3]{س^2}}\right)^9$ الحد الخالي من س يساوي ....

(أ) 84 (ب) −84 (ج) 8,4 (د) −0,84

⑮ في مفكوك $\left(س^2 + \frac{1}{س^5}\right)^{7ن}$ حسب قوى س التنازلية رتبة الحد الخالي من س هي ....

(أ) $3ن - 1$ (ب) $3ن + 1$ (ج) $2ن - 1$ (د) $2ن + 1$

⑯ (دور أول 2021) الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س^5 - \frac{ك}{س^2}\right)^{7ن}$ حسب قوى س التنازلية حيث ك ، ن ∈ ص+ هو ....

(أ) $ح_{5ن}$ (ب) $ح_{5ن+1}$ (ج) $ح_{6ن+1}$ (د) $ح_{6ن-1}$

⑰ (دور أول 2021) في مفكوك $\left(س^2 + 2 + \frac{1}{س^2}\right)^6$ معامل الحد الذي يشتمل على $س^2$ هو ....

(أ) $^{12}ق_5$ (ب) $^{12}ق_6$ (ج) $^{12}ق_2$ (د) $^{6}ق_5$

⑱ معاملا $س^ن$ ، $س^م$ في مفكوك $(1 + س)^{م+ن}$ ....

(أ) متساويان. (ب) متساويان ومختلفان في الإشارة.

(ج) أحدهما معكوس ضربي للآخر. (د) أحدهما ضعف الآخر.

⑲ إذا كان : $0 \leq ك \leq ن$ فإن معامل $س^ك$ في مفكوك :

$1 + (1 + س) + (1 + س)^2 + (1 + س)^3 + ... + (1 + س)^ن$ هو ....

(أ) $^{ن+1}ق_{ك+1}$ (ب) $^{ن}ق_{ك}$ (ج) $^{ن+1}ق_{ن+ك}$ (د) $^{ن}ق_{ن-ك+1}$

(٢٠) قيمة الحد الخالى من س في مفكوك $(س + \frac{1}{س})^{2ن} + (س - \frac{1}{س})^{2ن}$ (حيث ن عدد صحيح فردى) يساوى ....

(أ) صفر (ب) $-2 \; {}^{2ن}ق_{ن}$ (ج) $2 \; {}^{2ن}ق_{ن}$ (د) ${}^{2ن}ق_{ن}$

(٢١) معامل $س^9$ في مفكوك $(1 + 3س + 3س^2 + س^3)^{15}$ يساوى ....

(أ) ${}^{45}ق_9$ (ب) ${}^{45}ق_8$ (ج) ${}^{15}ق_9$ (د) ${}^{15}ق_8$

(٢٢) معامل $س^4$ في مفكوك $(1 + س + س^2 + س^3 + س^4)^{10}$ يساوى ....

(أ) ${}^{40}ق_4$ (ب) ${}^{10}ق_4$ (ج) ٣١٠ (د) ٢١٠

٣ إذا كان $ح_5$ في مفكوك : $(2س - \frac{1}{س^2})^ن$ حسب قوى س التنازلية خالٍ من س فأوجد قيمة : ن «١٢»

٤ أوجد قيمة ل التى تجعل معامل $س^{15}$ = معامل $س^5$ في مفكوك : $(2س^2 + \frac{ل}{س^2})^{10}$ حيث ل موجبة. «$\frac{3\sqrt{2}}{2}$»

٥ أوجد في مفكوك : $(\frac{2س}{3} + \frac{3}{2س^2})^{12}$ كلًّا من :

① الحد الأوسط. ② الحد المشتمل على $س^3$ «$924 س^{-6}$ ، $\frac{14080}{729} س^3$»

٦ في مفكوك : $(9س^2 + \frac{1}{3س})^9$ أوجد قيمة الحد الخالى من س ، ثم أثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما $س = \frac{1}{3}$ «٨٤»

٧ أثبت أنه لا يوجد حد يشتمل على $س^7$ في مفكوك : $(س^2 - \frac{3}{س^6})^6$

٨ في مفكوك : $(\frac{س}{2} - \frac{2}{س^2})^{10}$ أثبت أنه : لا يوجد حد خالٍ من س ثم أوجد : معامل $\frac{1}{س^2}$ «$-\frac{15}{2}$»

٩ (دور أول ٢٠١٠) في مفكوك : $(س^2 + \frac{1}{8س})^{13}$ حسب قوى س التنازلية :

① أثبت أنه : لا يوجد حد يشتمل على س

② إذا كان الحدان الرابع والحادى عشر متساويين فأوجد قيمة : س «$\frac{1}{2}$»

١٠ (دور أول ٢٠٠٨) في مفكوك : $(س + \frac{5}{س})^8$ حسب قوى س التصاعدية :

① أثبت أن : الحد الخالى من س هو الحد الأوسط وأوجد قيمته.

② أوجد : قيمة س التى تجعل النسبة بين الحدين الثالث والسابع كنسبة ١ : ١٦ «٤٣٧٥٠ ، $\pm\sqrt{10}$»

١١ في مفكوك : $(س^2 + \frac{1}{س})^{15}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين. «$\frac{7}{30}$»

١٢ في مفكوك : $(س^2 + \frac{1}{أ س})^8$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل $س^{10}$ فأوجد قيمة : أ «$\frac{\pm\sqrt{10}}{2}$»

١٣ من مفكوك : $(4س^2 + \frac{1}{2س})^{13}$ أوجد معامل $س^5$ ثم أوجد قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين من هذا المفكوك متساويين ثم أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س في هذا المفكوك. «٥٤٩١٢ ، $\frac{1}{2}$»

١٤ في مفكوك : $(أس^2 + \frac{1}{أس})^{11}$ إذا كان معاملا $س^7$ ، $س^4$ متساويين فأوجد قيمة : أ «± 1»

١٥ أوجد معامل $س^6$ في مفكوك : $(س + \frac{1}{س})^9 (س - \frac{1}{س})^9$

وأثبت أن : هذا المفكوك لا يشتمل على $س^{-3}$ «-84»

١٦ إذا كان مفكوك : $(س^5 + س^{-2})^{2ن}$ يحتوى على حد خالٍ من س

فأثبت أن : ن = ٧ أو مضاعفًا للعدد ٧ واحسب هذا الحد عندما ن = ٧ «١٠٠١»

١٧ في مفكوك : $(أس^م + \frac{ب}{س^ك})^ن$ أوجد الشرط اللازم لكى يكون للمفكوك حدًا خاليًا من س حيث م ، ك $\in ص^+$

● فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

١٨ إذا كان رتبة الحد الخالي من س في مفكوك: $(2س^{2} - \frac{3}{س})^{21}$ حسب قوى س التنازلية تساوي رتبة الحد الخالي من س في مفكوك: $(س + \frac{3}{س})^{2ن}$ حسب قوى س التنازلية فأوجد قيمة: ن «١٤»

١٩ إذا كان الحد السابع في مفكوك: $(\frac{س^{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{س^{2}})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية هو نفس الحد الخالي من س فأوجد قيمة: ن، ثم احسب قيمة هذا الحد. «ن = ١٢ ، ٩٢٤»

٢٠ في مفكوك: $(س^{ك} + \frac{1}{س})^{10}$ حيث ك ∈ ص+ أوجد:

① قيم ك التي تجعل للمفكوك حدًا خاليًا من س «١ ، ٤ ، ٩»

② النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها من أولًا. «$\frac{5}{126}$»

٢١ من مفكوك: $(س + \frac{1}{س})^{2ن}$ أثبت أن: الحد الخالي من س هو الحد الأوسط، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما ن = ٨ «١٢٨٧٠»

٢٢ أثبت أن الحد الخالي من س في مفكوك: $(س^{2} + \frac{1}{س^{3}})^{5ن}$ حيث ن ∈ ص+ يساوي $\frac{\lfloor 5ن}{\lfloor 2ن \lfloor 3ن}$

٢٣ إذا كان الحد الثالث في مفكوك: $(2س + \frac{1}{س^{2}})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خاليًا من س فأوجد قيمة ن ثم أوجد ص التي تجعل هذا الحد مساويًا للحد الثاني في مفكوك $(1 + ص^{3})^{20}$ «ن = ٦ ، ص = ٢»

٢٤ في مفكوك: $(س^{3} + \frac{1}{س^{2}})^{5ن}$ حسب قوى س التنازلية أثبت أن: الحد الخالي من س يساوي معامل الحد المشتمل على $س^{5ن}$ وإذا كان الحد الخالي من س هو الحد الرابع فأوجد قيمة معامل $س^{5ن}$ «١٠»

٢٥ إذا كان معاملا $س^{ب}$ ، $س^{حـ}$ في مفكوك $(1 + س)^{أ}$ حسب قوى س التصاعدية متساويين فأثبت أن: أ = ب + حـ

٢٦ إذا كان معامل $س^{ك}$ في مفكوك $(1 + س)^{2ن}$ يساوي معامل $س^{ك+2}$ في نفس المفكوك فأثبت أن: ك = ن − ١

٢٧ أوجد قيمة الحد الخالي من س في مفكوك: $(س^{2} + 1)(س - \frac{1}{س})^{10}$ «−٤٢»

٢٨ أوجد معامل $س^{5}$ في مفكوك: $(1 - س + س^{2})(1 + س)^{11}$ «٢٩٧»

٢٩ أوجد معامل س في مفكوك: $(س + 2)^{2}(س - \frac{1}{س})^{8}$ «٢٨٠»

٣٠ أوجد معامل $س^{2}$ في حاصل الضرب: $(1 - س)^{8}(3 + 2س)^{6}$ «١٩٤٤»

٣١ إذا كان معامل $س^{2}$ في مفكوك: $(1 + 2س)^{5}(1 + ن س)^{4}$ هو −٢٦ فأوجد قيمة: ن «−٣ ، $-\frac{11}{3}$»

٣٢ أوجد: ① معامل $س^{3}$ في مفكوك: $(1 + س + س^{2})^{6}$ «٥٠»

② معامل $س^{2}$ في مفكوك: $(1 + س - س^{2})^{5}$ «٥»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٣٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① معامل $س^{20}$ في مفكوك $(1 + س^{2})^{40}(س^{2} + 2 + \frac{1}{س^{2}})^{-5}$ يساوي ....

(أ) ١ (ب) $^{30}ق_{10}$ (جـ) $^{20}ق_{5}$ (د) ٣٠

② معامل $س^{12}$ في مفكوك $\sum_{ر=0}^{50} {}^{50}ق_{ر} (س - 1)^{50-ر} \times 2^{ر}$ يساوي ....

(أ) $^{50}ق_{12}$ (ب) $^{50}ق_{12}$ (جـ) ١ (د) صفر

③ معامل $س^4$ في مفكوك $(1 + س + س^2 + س^3)^ن$ هو ....

(أ) $^نق_2 + {^نق_2}\,{^نق_1} + {^نق_4}$ (ب) $^نق_4 + {^نق_2}$

(جـ) $^نق_4 + {^نق_2} + {^نق_2} + {^نق_1}$ (د) $^نق_4 + {^نق_2} + {^نق_1}$

④ معامل $س^{24}$ في مفكوك $(1 + س^2)^{12}(1 + س^{12})(1 + س^{24})$ يساوي ....

(أ) $^{12}ق_6$ (ب) $^{12}ق_6 + 2$ (جـ) $^{12}ق_6 + 3$ (د) $^{12}ق_6 + 4$

⑤ الحد الخالي من س في مفكوك $(1 - \frac{1}{س})^8 (س + 1)^8$ هو ....

(أ) $-{^8ق_6}$ (ب) $^8ق_5$ (جـ) $-{^8ق_4}$ (د) $^8ق_4$

⑥ إذا كان : أ ، ب معاملا $س^ن$ في مفكوك $(1 + س)^{2ن}$ ، $(1 + س)^{2ن - 1}$ على الترتيب فإن ....

(أ) أ = 2ب (ب) ب = 2أ (جـ) أ = 2ب (د) ب = 3أ

⑦ معامل $س^6$ في مفكوك $[(1 + س)^6 + (1 + س)^7 + (1 + س)^8 + ... + (1 + س)^{15}]$ يساوي ....

(أ) $^{16}ق_4$ ، (ب) $^{16}ق_5 - {^5ق_4}$ ، (جـ) $^{16}ق_7 - 1$ (د) $^{15}ق_6$

24 أثبت أن : معامل الحد الذي يشتمل على $س^2 ص^4 ع^5$ في مفكوك : $(س + ص + ع)^{12}$ هو $\frac{|\underline{12}}{|\underline{2}\ |\underline{4}\ |\underline{5}}$

25 في مفكوك : $(1 + أ س)(1 + ب س)^4$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل الحد الذي يحتوي على س هو -5 ولا يوجد حد يحتوي على $س^2$ فأوجد قيمة كلًّا من : أ ، ب حيث ب ≠ .

«3 ، -2»

26 بين أن : الفرق بين معاملي $س^{ر+1}$ ، $س^ر$ في مفكوك $(1 + س)^{ن+1}$ يساوي الفرق بين معاملي $س^{ر+1}$ ، $س^{ر-1}$ في مفكوك $(1 + س)^ن$

الدرس 5
النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

في مفكوك $(أ س + ب ص)^ن$ حسب قوى س التنازلية يكون :

* النسبة بين حدين متتاليين هي :

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{ب ص}{أ س}$$

أي أن : $\frac{ن - ر\,(الأصغر) + 1}{ر\,(الأصغر)} \times \frac{الثاني}{الأول}$

* النسبة بين معاملي حدين متتاليين هي :

$$\frac{معامل\ ح_{ر+1}}{معامل\ ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{ب}{أ}$$

• لاحظ الفرق بين : $\frac{^نق_ر}{^نق_{ر-1}}$ ، $\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر}$:

حيث $\frac{^نق_ر}{^نق_{ر-1}} = \frac{ن - ر + 1}{ر} = \frac{ن - ر\,(الأكبر) + 1}{ر\,(الأكبر)}$

فمثلًا : $\frac{^7ق_5}{^7ق_4} = \frac{7 - 5 + 1}{5} = \frac{3}{5}$

بينما $\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{الثاني}{الأول} = \frac{ن - ر\,(الأصغر) + 1}{ر\,(الأصغر)} \times \frac{الثاني}{الأول}$

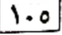
فمثلًا : في مفكوك $(س + 5)^7$ فإن : $\frac{ح_5}{ح_4} = \frac{7 - 4 + 1}{4} \times \frac{5}{س} = \frac{5}{س}$

مثال 1

أوجد النسبة بين الحدين الثامن والسابع في مفكوك : $(س + \frac{1}{س})^{12}$ حسب قوى س التنازلية عندما س = 2

الحل

$\because \frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{الثاني}{الأول}$



$\therefore \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_7} = \frac{12 - 7 + 1}{7} \times \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{س}} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{\text{س}^2} = \frac{6}{7\,\text{س}^2}$

وعندما س = ٢ $\therefore \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_7} = \frac{6}{7 \times 4} = \frac{3}{14}$

مثال ٢

في مفكوك : $(3\text{س} - 4\text{ص})^{12}$ حسب قوى س التنازلية

أوجد : (١) $\frac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4}$ (٢) $\frac{\text{ح}_{10}}{\text{ح}_9}$ (٣) $\frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_6}$

الحل

$\because \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}}$

(١) $\frac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4} = \frac{12 - 4 + 1}{4} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}} = \frac{9}{4} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}} = -\frac{3\text{ص}}{\text{س}}$

(٢) $\because \frac{\text{ح}_{10}}{\text{ح}_9} = \frac{12 - 9 + 1}{9} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}} = \frac{4}{9} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}} = -\frac{16\text{ص}}{27\text{س}}$ $\therefore \frac{\text{ح}_9}{\text{ح}_{10}} = -\frac{27\text{س}}{16\text{ص}}$

(٣) $\because \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_6} = \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_7} \times \frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6}$

$\therefore \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_6} = \left(\frac{12 - 7 + 1}{7} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}}\right) \times \left(\frac{12 - 6 + 1}{6} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}}\right)$

$= \frac{6}{7} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}} \times \frac{7}{6} \times \frac{-4\text{ص}}{3\text{س}} = \frac{16\text{ص}^2}{9\text{س}^2}$

مثال ٣

إذا كانت النسبة بين الحدين الثالث والرابع في مفكوك : $\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^6$ حسب قوى س التنازلية هي ٥ : ٣ فما قيمة س ؟

الحل

$\because \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_4} = \frac{5}{3}$ $\therefore \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} = \frac{3}{5}$ $\therefore \frac{6 - 3 + 1}{3} \times \frac{\frac{1}{\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{4}{3} \times \frac{1}{\text{س}} = \frac{3}{5}$ $\therefore 9\text{س} = 20$ $\therefore \text{س} = \frac{20}{9}$

مثال ٤

إذا كانت قيم الحدود الثاني والثالث والرابع في مفكوك : $(2\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هي على الترتيب ٤٠ ، ٢٠ ، ٥ **فأوجد قيمة كل من : ن ، س ، ص**

الحل

$\because \text{ح}_2 = 40$ ، $\text{ح}_3 = 20$ $\therefore \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\text{ن} - 2 + 1}{2} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{\text{ن} - 1}{4} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{2}$ وبالضرب في ٤

$\therefore (\text{ن} - 1) \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2$ (١)

، $\because \text{ح}_3 = 20$ ، $\text{ح}_4 = 5$ $\therefore \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{\text{ن} - 3 + 1}{3} \times \frac{\text{ص}}{2\text{س}} = \frac{1}{4}$ $\therefore \frac{\text{ن} - 2}{6} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{4}$ وبالضرب في ٦

$\therefore (\text{ن} - 2) \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2}$ (٢)

، بقسمة (١) على (٢) : $\therefore \frac{\text{ن} - 1}{\text{ن} - 2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore 4\text{ن} - 8 = 3\text{ن} - 3$ $\therefore \text{ن} = 5$

وبالتعويض في (١) : $\therefore (5 - 1) \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2$

$\therefore 4\text{ص} = 2\text{س}$ أي $2\text{ص} = \text{س}$

، $\because \text{ح}_2 = 40$ $\therefore {}^{\text{ن}}\text{ق}_1 \, (2\text{س})^{\text{ن}-1} \, \text{ص}^1 = 40$

وبالتعويض عن ن = ٥ ، س = ٢ ص $\therefore {}^{5}\text{ق}_1 \, \text{ص} \, (4\text{ص})^4 = 40$

$\therefore 5 \times \text{ص} \times (4\text{ص})^4 = 40$ $\therefore 5 \times \text{ص} \times 256\,\text{ص}^4 = 40$

$\therefore 1280\,\text{ص}^5 = 40$ $\therefore \text{ص}^5 = \frac{40}{1280} = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$\therefore \text{ص} = \frac{1}{2}$

، $\because \text{س} = 2\text{ص}$ $\therefore \text{س} = 1$

مثال ٥

في مفكوك : $(س + أ)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان ن عددًا فرديًا أثبت أن النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب $= \frac{س}{أ}$

الحل

∵ ن عدد فردي. ∴ الحدين الأوسطين هما $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن+٣}{٢}}$

، ∵ $\frac{ح_{\frac{ن+٣}{٢}}}{ح_{\frac{ن+١}{٢}}} = \frac{ن - \left(\frac{ن+١}{٢}\right) + ١}{\frac{ن+١}{٢}} \times \frac{أ}{س} = \frac{٢ن - ن - ١ + ٢}{ن+١} \times \frac{أ}{س}$

$= \frac{ن+١}{ن+١} \times \frac{أ}{س} = \frac{أ}{س}$

∴ النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب $= \frac{ح_{\frac{ن+١}{٢}}}{ح_{\frac{ن+٣}{٢}}} = \frac{س}{أ}$

مثال ٦

في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ضعف معامل $ح_٦$ = معامل $ح_٥$ + معامل $ح_٧$

فأوجد قيمة : ن وأثبت أن هناك علاقتين أخريين تفي بالشروط السابقة.

الحل

∵ ٢ × معامل $ح_٦$ = معامل $ح_٥$ + معامل $ح_٧$

، بالقسمة على معامل $ح_٦$ ∴ $٢ = \frac{معامل\ ح_٥}{معامل\ ح_٦} + \frac{معامل\ ح_٧}{معامل\ ح_٦}$ (١)

، ∵ $\frac{معامل\ ح_{ر+١}}{معامل\ ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{معامل\ الثاني}{معامل\ الأول}$

∴ $\frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٥} = \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{١}{١} = \frac{ن - ٤}{٥}$ ∴ $\frac{معامل\ ح_٥}{معامل\ ح_٦} = \frac{٥}{ن - ٤}$ (٢)

، $\frac{معامل\ ح_٧}{معامل\ ح_٦} = \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times \frac{١}{١} = \frac{ن - ٥}{٦}$ (٣)

وبالتعويض من (٢) ، (٣) في (١) :

∴ $٢ = \frac{٥}{ن - ٤} + \frac{ن - ٥}{٦}$ وبضرب الطرفين في ٦ (ن − ٤)

∴ ١٢ (ن − ٤) = ٣٠ + (ن − ٥) (ن − ٤) ∴ ١٢ن − ٤٨ = ٣٠ + $ن^٢$ − ٩ن + ٢٠

∴ $ن^٢$ − ٢١ن + ٩٨ = ٠ ∴ (ن − ٧) (ن − ١٤) = ٠

∴ ن = ٧ أو ن = ١٤

وعندما ن = ٧ يكون معامل $ح_٥ = {}^{٧}ق_{٤} = {}^{٧}ق_{٣}$ = معامل $ح_٤$

، معامل $ح_٦ = {}^{٧}ق_{٥} = {}^{٧}ق_{٢}$ = معامل $ح_٣$

، معامل $ح_٧ = {}^{٧}ق_{٦} = {}^{٧}ق_{١}$ = معامل $ح_٢$

∴ معاملات الحدود الرابع والثالث والثاني تكون العلاقة :

٢ معامل $ح_٣$ = معامل $ح_٤$ + معامل $ح_٢$

وعندما ن = ١٤ يكون معامل $ح_٥ = {}^{١٤}ق_{٤} = {}^{١٤}ق_{١٠}$ = معامل $ح_{١١}$

، معامل $ح_٦ = {}^{١٤}ق_{٥} = {}^{١٤}ق_{٩}$ = معامل $ح_{١٠}$

، معامل $ح_٧ = {}^{١٤}ق_{٦} = {}^{١٤}ق_{٨}$ = معامل $ح_٩$

∴ معاملات الحدود الحادي عشر والعاشر والتاسع تكون العلاقة

٢ معامل $ح_{١٠}$ = معامل $ح_{١١}$ + معامل $ح_٩$

إيجاد أكبر حد وأكبر معامل فى مفكوك ذى الحدين

فى مفكوك $(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية وبمعلومية قيمتى س ، ص فإن أكبر حد عدديًا فى المفكوك وليكن $\text{ح}_{\text{ر}+1}$ يكون أكبر من أو يساوى الحدود السابقة له وأكبر من أو يساوى الحدود التالية له أى يحقق الشرطين :

① $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} \geq 1$ «أكبر من أو يساوى السابق له»

أى أن : $\frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \left|\frac{\text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}\,\text{س}}\right| \geq 1$

② $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}+2}} \geq 1$ «أكبر من أو يساوى التالى له»

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} \leq 1$ $\qquad \therefore \frac{\text{ن} - (\text{ر}+1) + 1}{\text{ر}+1} \times \left|\frac{\text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}\,\text{س}}\right| \leq 1$

وباستخدام الشرطين السابقين يمكن إيجاد أكبر حد وأكبر معامل فى المفكوك والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٧

فى مفكوك : $(2\,\text{س} - 3\,\text{ص})^{10}$ حسب قوى س التنازلية

① أوجد القيمة العددية لأكبر حد وذلك عندما س = ٣ ، ص = ٢

② أوجد القيمة العددية لأكبر حد وذلك عندما س = ١ ، ص = ٢

③ أوجد قيمة أكبر معامل فى المفكوك.

الحل

① بفرض أن أكبر حد هو $\text{ح}_{\text{ر}+1}$

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى السابق له)

$\therefore \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \left|\frac{\text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}\,\text{س}}\right| \geq 1$ $\qquad \therefore \frac{10 - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \left|\frac{-3 \times 2}{2 \times 3}\right| \geq 1$

$\therefore \frac{10 - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \geq 1$ $\qquad \therefore 10 - \text{ر} + 1 \geq \text{ر}$

$\therefore 2\,\text{ر} \leq 11$ $\qquad \therefore \text{ر} \leq 5\frac{1}{2}$ $\qquad (1)$

، $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}+2}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى التالى له)

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} \leq 1$ $\qquad \therefore \frac{10 - (\text{ر}+1) + 1}{\text{ر}+1} \times \left|\frac{\text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}\,\text{س}}\right| \leq 1$

$\therefore \frac{10 - \text{ر}}{\text{ر}+1} \times \left|\frac{-3 \times 2}{2 \times 3}\right| \leq 1$ $\qquad \therefore 10 - \text{ر} \leq \text{ر} + 1$

$\therefore 2\,\text{ر} \geq 9$ $\qquad \therefore \text{ر} \geq 4\frac{1}{2}$ $\qquad (2)$

من (١) ، (٢) : $\therefore 4\frac{1}{2} \leq \text{ر} \leq 5\frac{1}{2}$ $\qquad \therefore \text{ر} = 5$

$\therefore \text{ح}_6$ هو أكبر حدود المفكوك $(2\,\text{س} - 3\,\text{ص})^{10}$ عدديًا عندما س = ٣ ، ص = ٢

، $\text{ح}_6 = {}^{10}\text{ق}_5 \left|(-3 \times 2)^5 (2 \times 3)^5\right| = 252 \times 6^{10}$

② بفرض أن أكبر حد هو $\text{ح}_{\text{ر}+1}$

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى السابق له)

$\therefore \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \left|\frac{\text{ب}\,\text{ص}}{\text{أ}\,\text{س}}\right| \geq 1$ $\qquad \therefore \frac{10 - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \left|\frac{-3 \times 3}{2 \times 1}\right| \geq 1$

$\therefore \frac{11 - \text{ر}}{\text{ر}} \geq \frac{2}{9}$ $\qquad \therefore 99 - 9\,\text{ر} \geq 2\,\text{ر}$

$\therefore 11\,\text{ر} \leq 99$ $\qquad \therefore \text{ر} \leq 9$ $\qquad (1)$

، $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}+2}} \geq 1$ (أكبر من أو يساوى التالى له)

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} \leq 1$ $\qquad \therefore \frac{10 - (\text{ر}+1) + 1}{\text{ر}+1} \times \left|\frac{-3 \times 3}{2 \times 1}\right| \leq 1$

$\therefore \frac{10-\text{ر}}{\text{ر}+1} \times \frac{9}{2} \le 1$ $\therefore 90 - 9\text{ر} \le 2\text{ر} + 2$

$\therefore 11\text{ر} \ge 88$ $\therefore \text{ر} \ge 8$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore 8 \le \text{ر} \le 9$ $\therefore \text{ر} = 8$ أ، 9

∴ هناك حدان متساويان هما الأكبر فى المفكوك

، $\text{ح}_9 = \text{ح}_{10} = {}^{10}\text{ق}_9 \left|(-3\times 3)^9 (2\times 1)\right| = 20 \times 9^9$

(٣) لإيجاد قيمة أكبر معامل فى المفكوك نوجد قيمة أكبر حد عندما $\text{س} = \text{ص} = 1$ وبفرض أن أكبر حد هو $\text{ح}_{\text{ر}+1}$

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} \ge 1$ (أكبر من أو يساوى السابق له)

$\therefore \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \left|\frac{-3}{2}\right| \ge 1$ $\therefore \frac{10-\text{ر}+1}{\text{ر}} \ge \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{11-\text{ر}}{\text{ر}} \ge \frac{2}{3}$ $\therefore 33 - 3\text{ر} \ge 2\text{ر}$

$\therefore 5\text{ر} \le 33$ $\therefore \text{ر} \le 6\frac{3}{5}$ (١)

، $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}+2}} \ge 1$ «أكبر من أو يساوى التالى له»

$\therefore \frac{\text{ح}_{\text{ر}+2}}{\text{ح}_{\text{ر}+1}} \le 1$ $\therefore \frac{10-(\text{ر}+1)+1}{\text{ر}+1} \times \left|\frac{-3}{2}\right| \le 1$

$\therefore \frac{10-\text{ر}}{\text{ر}+1} \times \frac{3}{2} \le 1$ $\therefore 30 - 3\text{ر} \le 2\text{ر} + 2$

$\therefore 5\text{ر} \ge 28$ $\therefore \text{ر} \ge 5\frac{3}{5}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore 5\frac{3}{5} \le \text{ر} \le 6\frac{3}{5}$ $\therefore \text{ر} = 6$

∴ ح_7 عند $\text{س} = \text{ص} = 1$ هو أكبر معامل فى المفكوك.

$\therefore \text{ح}_7 = {}^{10}\text{ق}_6 \left|(-3)^6 (2)^4\right| = 2449440$

ملاحظة

فى مفكوك $(1 + \text{س})^{\text{ن}}$

(١) إذا كان : ن عددًا زوجيًا.

فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الأوسط = ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}}{2}}$

(٢) إذا كان : ن عددًا فرديًا.

فإن : معاملا الحدين الأوسطين متساويان ومعامل أى منها هو أكبر معامل فى المفكوك = ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}-1}{2}}$ أو ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}+1}{2}}$

مثال ٨

فى مفكوك : $(\text{س} + 3)^{10}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل ح_7 هو أكبر حد عدديًا.

الحل

∵ ح_7 هو أكبر حد $\therefore \frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6} \ge 1$

$\therefore \frac{10-6+1}{6} \times \left|\frac{3}{\text{س}}\right| \ge 1$ $\therefore \frac{5}{6} \times 3 \ge |\text{س}|$

$\therefore |\text{س}| \le \frac{5}{2}$ $\therefore \text{س} \in \left[-\frac{5}{2} ، \frac{5}{2}\right]$ (١)

، $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_8} \ge 1$ $\therefore \frac{\text{ح}_8}{\text{ح}_7} \le 1$

$\therefore \frac{10-7+1}{7} \times \left|\frac{3}{\text{س}}\right| \le 1$ $\therefore \frac{4}{7} \times 3 \le |\text{س}|$

$\therefore |\text{س}| \ge 1\frac{5}{7}$ $\therefore \text{س} \ge 1\frac{5}{7}$ أ، $\text{س} \le -1\frac{5}{7}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$-\frac{5}{2}$ $-1\frac{5}{7}$ $1\frac{5}{7}$ $\frac{5}{2}$

∴ س التى تجعل ح_7 هو أكبر حد $\in \left[-\frac{5}{2} ، -1\frac{5}{7}\right] \cup \left[1\frac{5}{7} ، \frac{5}{2}\right]$

تمارين 5

على النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① 📖 من مفكوك : $(\text{س} + \text{ص})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية

فإن الحد التاسع : الحد الثامن يساوى ....

(أ) $\frac{٢\,\text{ص}}{٨\,\text{س}}$ (ب) $\frac{٣\,\text{س}}{٨\,\text{ص}}$ (جـ) $\frac{٨\,\text{ص}}{٣\,\text{س}}$ (د) $\frac{٨\,\text{س}}{٣\,\text{ص}}$

② 📖 من مفكوك : $(١ - \text{س})^{١٢}$ حسب قوى س التصاعدية

فإن معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس يساوى ....

(أ) $\frac{٨}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) $\frac{-٨}{٥}$ (د) $\frac{-٥}{٨}$

③ فى مفكوك : $(٢ + \text{أ}\,\text{س})^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $\text{ح}_٣$ = معامل $\text{ح}_٤$

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٩}{٥}$ (ب) $\frac{٩}{٤}$ (جـ) $\frac{٩}{٧}$ (د) $\frac{٩}{٢}$

④ إذا كان : $\text{ح}_{١٧} = \text{ح}_{١٨}$ فى مفكوك $(٢ + \text{س})^{٥٠}$ حسب قوى س التصاعدية

فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑤ فى مفكوك : $(\text{س} + \text{ص})^{٨}$ حسب قوى س التنازلية تكون نسبة $\text{ح}_٦ : \text{ح}_٤$ تساوى ....

(أ) ٢٥ $\text{ص}^٢$: ١٦ $\text{س}^٢$

(ب) ٢٥ $\text{س}^٢$: ١٦ $\text{ص}^٢$

(جـ) ١

(د) $\text{ص}^٢ : \text{س}^٢$

⑥ 📖 من مفكوك : $(١ + \text{س})^{٢٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب ٣ : ١ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

⑦ من مفكوك : $(٣\,\text{أ} - ٢\,\text{ب})^{١١}$ حسب قوى أ التنازلية إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب تساوى $\frac{-٣}{٢}$ فإن أ : ب = ...

(أ) ٩ : ٤ (ب) ٤ : ٩ (جـ) ١ (د) ١-

⑧ فى مفكوك : $(\text{أ} - \text{ب})^{\text{ن}}$ حسب قوى أ التنازلية حيث ن ≥ ٥ إذا كان كل من $\text{ح}_٥$ ، $\text{ح}_٦$ كل منهما معكوس جمعى للآخر فإن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ن} - ٥}{٦}$ (ب) $\frac{\text{ن} - ٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{\text{ن} - ٤}$ (د) $\frac{٦}{\text{ن} - ٥}$

⑨ إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}})^{٢\text{ن}+١}$ متساويين

فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ١- (جـ) ± ١ (د) ٢

⑩ النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب فى مفكوك $(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^{٢\text{ن}-١}$ حسب قوى س التنازلية = ...

(أ) $\text{س}^٢$ (ب) $\frac{\text{س}^٢}{٢\,\text{ن}}$ (جـ) $\frac{\text{س}^٢}{\text{ن}}$ (د) $\frac{٢\,\text{ن} + ١}{٢\,\text{ن} + ٣}$

⑪ فى مفكوك : $(\frac{١}{\text{س}} - \text{س}^٢)^{٩}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $\text{ح}_٥ = ١٢\,\text{ح}_٤$

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٢- (جـ) ٨ (د) ٨-

⑫ الحدان المتتاليان فى مفكوك $(٣ + ٢\,\text{س})^{٧٤}$ حسب قوى س التصاعدية الذى معاملاهما متساويان هما ....

(أ) $\text{ح}_{٢٩}$ ، $\text{ح}_{٣٠}$ (ب) $\text{ح}_{٣٠}$ ، $\text{ح}_{٣١}$ (جـ) $\text{ح}_{٣١}$ ، $\text{ح}_{٣٢}$ (د) $\text{ح}_{٢٨}$ ، $\text{ح}_{٢٩}$

⑬ فى مفكوك : $(١ + \text{س})^{٢\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $\text{ح}_٣$ وسط حسابى بين معاملى $\text{ح}_٢$ ، $\text{ح}_٤$ فإن قيمة ٢ $\text{ن}^٢$ - ٩ ن = ...

(أ) ٨- (ب) ٦- (جـ) ٧- (د) ١٨-

⑭ إذا كانت النسبة بين معاملى حدين متتاليين فى مفكوك $(١ + \text{س})^{٢٤}$ حسب قوى س التصاعدية هى ٤ : ١ فإن الحدان هما ....

(أ) $\text{ح}_٤$ ، $\text{ح}_٥$ (ب) $\text{ح}_{٢٠}$ ، $\text{ح}_{٢١}$ (جـ) $\text{ح}_٣$ ، $\text{ح}_٤$ (د) $\text{ح}_{٢١}$ ، $\text{ح}_{٢٢}$

(١٥) فى مفكوك : $\left(أس^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد المشتمل على $س^{٦}$ فإن : $أ^{٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٦) فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{أ}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية

إذا كان معامل $س^{١٠}$ = ضعف معامل $س^{١٥}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

(١٧) فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ تكون النسبة بين الحد الخالى من س ومجموع معاملى الحدين الأوسطين = ...

(أ) $\frac{٧}{١٥}$ (ب) $\frac{٧}{٣٠}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١٨) الحد الذى له أكبر معامل فى مفكوك : $(١ + س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية هو ....

(أ) $ح_{١١}$ (ب) $ح_{٥}$ (جـ) $ح_{٦}$ (د) $ح_{١٠}$

(١٩) الحد الذى له أصغر معامل فى مفكوك : $(٢س + ٧ص)^{٣}$ حسب قوى س التنازلية هو ....

(أ) $ح_{٤}$ (ب) $ح_{٣}$ (جـ) $ح_{٢}$ (د) $ح_{١}$

(٢٠) فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد السابع هو الحد الذى له أكبر معامل فإن : ن = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٢١) أكبر معامل فى مفكوك $(٢س + ص)^{٨}$ يساوى ....

(أ) ١١٢٠ (ب) ٤٤٨ (جـ) ١٧٩٢ (د) ١٠٢٤

(٢٢) إذا كان مجموع معاملات حدود مفكوك : $(١ + ٢س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية يساوى ٦٥٦١ فإن أكبر معامل فى هذا المفكوك يساوى ....

(أ) ٨٩٦ (ب) ٣٥٩٤ (جـ) ١٧٩٢ (د) ١٩٧٢

(٢٣) أكبر حد فى مفكوك : $(١ + ٤س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية عند س = $\frac{١}{٣}$ يساوى ....

(أ) $٥٦ \times \left(\frac{٤}{٣}\right)^{٥}$ (ب) $٥٦ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٥}$ (جـ) $٥٦ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٤}$ (د) $٥٦ \times \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٤}$

(٢٤) إذا كان أكبر معامل فى مفكوك $(أ + س)^{٢٠}$ هو معامل $ح_{١١}$

فإن : أ ∋ .... حيث أ ∋ $ح^{+}$

(أ) $\left]\frac{١٠}{١١} ، \frac{١١}{١٠}\right[$ (ب) $]١٠ ، ١١[$

(جـ) $\left]\frac{-١١}{١٠} ، \frac{١٠}{١١}\right[$ (د) $\left]\frac{٩}{١١} ، \frac{١٠}{١١}\right[$

---

٢ أوجد النسبة بين الحدين الرابع والثالث فى مفكوك : $(٣ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية.

« $\frac{٢}{٣}$ س »

---

٣ أوجد النسبة بين الحدين الثالث والخامس فى مفكوك : $(س - ٢)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية.

« $\frac{٣س^{٢}}{٢٠}$ »

---

٤ أوجد النسبة بين معاملى الحدين التاسع والعاشر فى مفكوك : $(٢س - ٣ص)^{١٤}$ حسب قوى س التنازلية.

« -١ »

---

٥ أوجد النسبة بين الحدين السابع والثامن فى مفكوك :

$\left(س + \frac{١}{٣} س^{-١}\right)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية عندما س = $\frac{١}{٢}$

« $\frac{٧}{١٢}$ »

---

٦ من مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{٢}{س}\right)^{٨}$

(١) أوجد النسبة بين الحدين الخامس والسادس ، وإذا كانت النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة : س

(٢) أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خالى من س

« $\frac{٥س^{٣}}{٨}$ ، $\frac{٤}{٥}$ »

---

٧ (دور ثان ٢٠١٤) فى مفكوك : $(١ + ٢س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية ، إذا كانت النسبة بين الحدين الثامن والعاشر كنسبة ١ : ٢٨ عندما س = ٣ **فأوجد قيمة : ن**

« ١٥ »

٨ (دور ثان ٢٠١٢) أوجد رتبة وقيمة الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س^{٣} - \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية ثم أوجد النسبة بين الحد الأوسط في هذا المفكوك والحد الذي يليه عندما س = ٢

«ح٧ ، ٢٨ ، −٢٠»

٩ إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(١ + س)^{١٠}$ حسب قوى س التصاعدية يساوي ضعف الحد السابع أوجد قيمة : س

«$\frac{٢}{٥}$»

١٠ إذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س إلى الحد السابق له في مفكوك $\left(س + \frac{١}{٢س}\right)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية كنسبة ٧ : ٣ فما قيمة : س

«$\pm\frac{١}{٢}$»

١١ في مفكوك : $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{١٤}$ حسب قوى س التنازلية أثبت أنه لا يوجد حد خالٍ من س ، ثم أوجد النسبة بين الحد السابع والحد السادس في هذا المفكوك عندما س = −١

«$\frac{٣}{٢}$»

١٢ في مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٩}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيمة الحد الخالي من س ، وإذا كانت النسبة بين الحد الخالي من س والحد السادس تساوي ٩ : ٤ فأوجد قيمة : س الحقيقية.

«$\frac{٢}{٣}$»

١٣ في مفكوك : $(٥ + ٤س)^{١٦}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان أحد حدود المفكوك يساوي ثلاثة أمثال الحد التالي له فأوجد رتبة هذين الحدين إذا كانت س = ١

«ح١٢ ، ح١٣»

١٤ أوجد أكبر حد في مفكوك : $(٣ + ٢س)^{٦}$ حسب قوى س التصاعدية عندما س = ١

«ح٣»

١٥ (دور أول ٢٠١٣) في مفكوك : $\left(٢ + \frac{س}{٣}\right)^{٩}$

(١) أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين.

(٢) بدون إيجاد المفكوك أوجد قيمة أكبر معامل فيه

«٦ ، ٧٦٨»

١٦ في مفكوك : $(١ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ٢ ح٥ = ح٤ + ح٦ فأوجد قيمة : س

«٢ أو $\frac{١}{٢}$»

١٧ في مفكوك : $(٢س - ٣)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم : س التي تجعل ١٣ ح٢ + ١٠ ح٤ + ح٥ = ٠

«$\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$»

١٨ في مفكوك : $\left(\frac{٣س}{٢} + \frac{٢}{٣س^{٢}}\right)^{١٢}$ أوجد كلاً من الحد الأوسط والحد الذي يحتوي على $س^{-٣}$ ، وإذا كانت النسبة بين هذين الحدين تساوي ٧ : ٤ فأوجد قيمة : س

«$\frac{٢}{٣}$»

١٩ في مفكوك : $(س + ص)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية وجد أن النسبة بين ح٣ ، ح٤ تساوي ١ : ٤ وكان الحد الأوسط يساوي ١١٢٠ فأوجد كلاً من : س ، ص

«±١ ، ±٢»

٢٠ في مفكوك : $(٣ + ٢س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية كان ح٥ = ٦ ح٤ ، ح٨ = ٣ ح٧ أوجد كلاً من : ن ، س

«٢٧ ، $\frac{٣}{٢}$»

٢١ (دور أول ٢٠١٧) في مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ح٣ = ١٧ ، ح٢ × ح٤ = ٥٤٤ أوجد قيمة كل من : ن ، س

«١٨ ، $\pm\frac{١}{٣}$»

٢٢ في مفكوك : $\left(٢س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان ح٩ = ح١٠ ، $\frac{ح_{٦}}{ح_{٧}} = \frac{٨}{١٥}$ فأوجد قيمة ن وأثبت أنه لا يوجد حد خالي من س في هذا المفكوك.

«ن = ٢٠»

٢٣ من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $(ح_{٣})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٥}$ أوجد قيمة : ن عندما س = $\frac{٩}{٥}$

«٧»

٢٤ من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل ح١٠ هو الوسط الحسابي بين معامل ح٩ ، معامل ح١١ أوجد كلاً من :

(١) ن (٢) ن ل٣ (٣) |ن − ١٩|

«٢٣ أو ١٤ ، ١٠٦٢٦ أو ٢١٨٤ ، ٢٤»

٢٥ (دور ثان ٢٠١٣) في مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ح٥ = ح٦ ، ح٤ = $\frac{٢٥}{٣}$ ح٢ فأوجد قيمة كلًا من : ن ، س

«١٠ ، $\frac{٥}{٦}$»

٢٦ من مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول والحد الثالث عندما س = ٢ ص أوجد قيمة : ن «٨»

---

٢٧ (دور أول ٢٠١٢) فى مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢ س}\right)^{٢ ن}$ حسب قوى س التنازلية

(١) أثبت أن الحد الخالى من س رتبته (٢ ن + ١)

(٢) أوجد النسبة بين الحد الخالى من س والحد الأوسط عندما ن = ٤ ، س = ١ «$\frac{١٥}{١١٢}$»

---

٢٨ إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(ب س - أ)^{٢ ن - ١}$ متساويين فما قيمة س ؟

وإذا كان $\left(٢ س + \frac{أ}{ب}\right)^{١٠} = ١٠٢٤$ فأثبت أن : أ = ± ٢ ب «$\frac{أ}{ب}$»

---

٢٩ إذا كانت النسبة بين الحدود الخامس والسادس والسابع فى مفكوك $\left(\frac{٣ س}{٢} + \frac{٢}{٣ س}\right)^{ن}$ هى ٤٠ : ٢٤ : ١١ حسب قوى س التنازلية أوجد كلاً من : ن ، س «١٦ ، $\pm\frac{١}{٢}$»

---

٣٠ إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك : $\left(س + \frac{ك}{س^{٢}}\right)^{٢٧}$ حسب قوى س التنازلية كنسبة ١٥ : ٦ : ٢ حيث ك ∈ ص+ فأوجد رتب هذه الحدود ثم أوجد رتبة وقيمة الحد الخالى من س فى هذا المفكوك. «$ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$ ، $ح_{٢٢}$ ، $ح_{١٠}$ = $ق^{٢٧}_{٩}$»

---

٣١ (دور ثان ٢٠٠١) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ هى ٣٥ ، ٢١ ، ٧ حسب قوى س التصاعدية أوجد قيمة : ن ورتب الحدود الثلاثة. «٧ ، $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$»

---

٣٢ فى مفكوك : $(أ + ب)^{ن}$ حسب قوى أ التنازلية إذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع هى على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فأوجد قيمة كلًا من : أ ، ب ، ن «٢ ، ٣ ، ٥»

---

٣٣ إذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس فى مفكوك : $(٢ س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة : ن «١٩ أو ٨»

---

٣٤ فى مفكوك : $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان ٣ $ح_{٤}$ ، $\sqrt{٥}$ $ح_{٦}$ ، ٦ $ح_{٨}$ فى تتابع هندسى فأوجد قيمة ن «١٢»

٣٥ من مفكوك : $\left(\sqrt{س} + \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان $ح_{٤}$ ، $ح_{٥}$ ، ٢٥ $ح_{٧}$ ، $ح_{٦}$ متناسبة أوجد قيمة : س «$\frac{٥}{٢}$»

---

٣٦ (دور ثان ٢٠٠٨) أثبت أن مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{ن}$ يحتوى على حد خال من س إذا كانت ن مضاعفًا للعدد ٣ ، وإذا كان : ن = ١٢ والمفكوك حسب قوى س التنازلية فأوجد النسبة بين الحد الخالى من س ومعامل الحد التالى له مباشرة. «$\frac{٩}{٤}$»

---

٣٧ (دور ثان ٢٠٠٧) فى مفكوك : $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٢٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحدان التاسع والعاشر متساويين فأوجد قيمة س ثم أوجد رتبتى حدين متتاليين فى هذا المفكوك بحيث تكون النسبة بين أحدها والحد التالى له كنسبة ٨ : ١٥ وأثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خال من س «$\sqrt[٣]{٢}$ ، $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$»

---

٣٨ فى مفكوك : $\left(٢ س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد التاسع والعاشر متساويين والنسبة بين الحد السادس والحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ فأوجد قيمة : ن

وأثبت أن : المفكوك لا يحتوى على حد خال من س «٢٠»

---

٣٩ من مفكوك : $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كانت : ٤ $ح_{٦}$ = ٧ $ح_{٨}$ ، $\frac{ح_{٤}}{ح_{٦}} = \frac{١}{٤}$

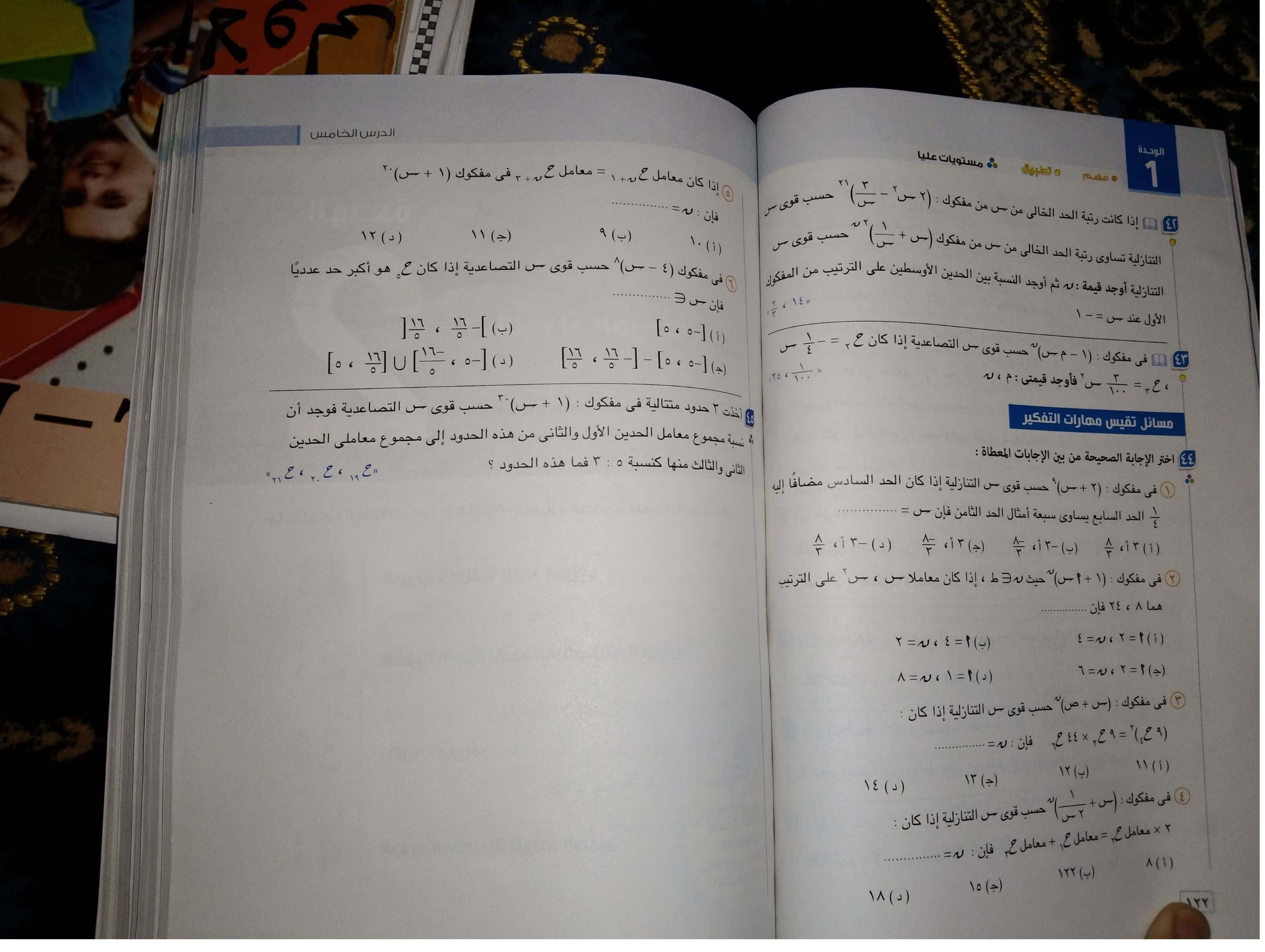
وذلك عندما س = ١ أوجد قيمة كل من : م ، ن «± ٢ ، ٨»

---

٤٠ (دور أول ٢٠٠٣) من مفكوك : $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٣ ن}$ أوجد معامل $س^{٣ ن}$ ، وإذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل $س^{٣ ن}$ ومعامل الحد الأوسط. «$ق^{٣ ن}_{ن}$ ، $\frac{٢١}{٥٥}$»

---

٤١ إذا كانت $ح_{٢}$: $ح_{٣}$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ حسب قوى أ التنازلية تساوى النسبة بين $ح_{٣}$: $ح_{٤}$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن + ٣}$ حسب قوى أ التنازلية أوجد قيمة : ن «٥»



٤٢ إذا كانت رتبة الحد الخالى من $س$ من مفكوك : $(٢ س^{٢} - \frac{٣}{س})^{٢١}$ حسب قوى $س$ التنازلية تساوى رتبة الحد الخالى من $س$ من مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية أوجد قيمة : $ن$ ثم أوجد النسبة بين الحدين الأوسطين على الترتيب من المفكوك الأول عند $س = -١$

«١٤ ، $\frac{٢}{٣}$»

٤٣ فى مفكوك : $(١ - م س)^{ن}$ حسب قوى $س$ التصاعدية إذا كان $ح_{٢} = -\frac{١}{٤} س$ ، $ح_{٣} = \frac{٣}{١٠٠} س^{٢}$ فأوجد قيمتى : $م$ ، $ن$

«$\frac{١}{١٠٠}$ ، ٢٥»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٤٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى مفكوك : $(٢ + س)^{٩}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كان الحد السادس مضافاً إليه $\frac{١}{٤}$ الحد السابع يساوى سبعة أمثال الحد الثامن فإن $س =$ ....

(أ) ٣ أو $\frac{٨}{٣}$ (ب) -٣ أو $\frac{-٨}{٣}$ (جـ) ٣ أو $\frac{-٨}{٣}$ (د) -٣ أو $\frac{٨}{٣}$

(٢) فى مفكوك : $(١ + أ س)^{ن}$ حيث $ن \in ط$ ، إذا كان معاملا $س$ ، $س^{٢}$ على الترتيب هما ٨ ، ٢٤ فإن ....

(أ) $أ = ٢$ ، $ن = ٤$ (ب) $أ = ٤$ ، $ن = ٢$

(جـ) $أ = ٢$ ، $ن = ٦$ (د) $أ = ١$ ، $ن = ٨$

(٣) فى مفكوك : $(س + ص)^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كان :

$(٩ ح_{٤})^{٢} = ٩ ح_{٣} \times ٤٤ ح_{٥}$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ١١ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٤) فى مفكوك : $(س + \frac{١}{٢ س})^{ن}$ حسب قوى $س$ التنازلية إذا كان :

٢ × معامل $ح_{٣}$ = معامل $ح_{٢}$ + معامل $ح_{٤}$ فإن : $ن =$ ....

(أ) ٨ (ب) ١٢٢ (جـ) ١٥ (د) ١٨

(٥) إذا كان معامل $ح_{ن+١}$ = معامل $ح_{ن+٣}$ فى مفكوك $(١ + س)^{٢٠}$

فإن : $ن =$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٦) فى مفكوك $(٤ - س)^{٨}$ حسب قوى $س$ التصاعدية إذا كان $ح_{٥}$ هو أكبر حد عدديًا

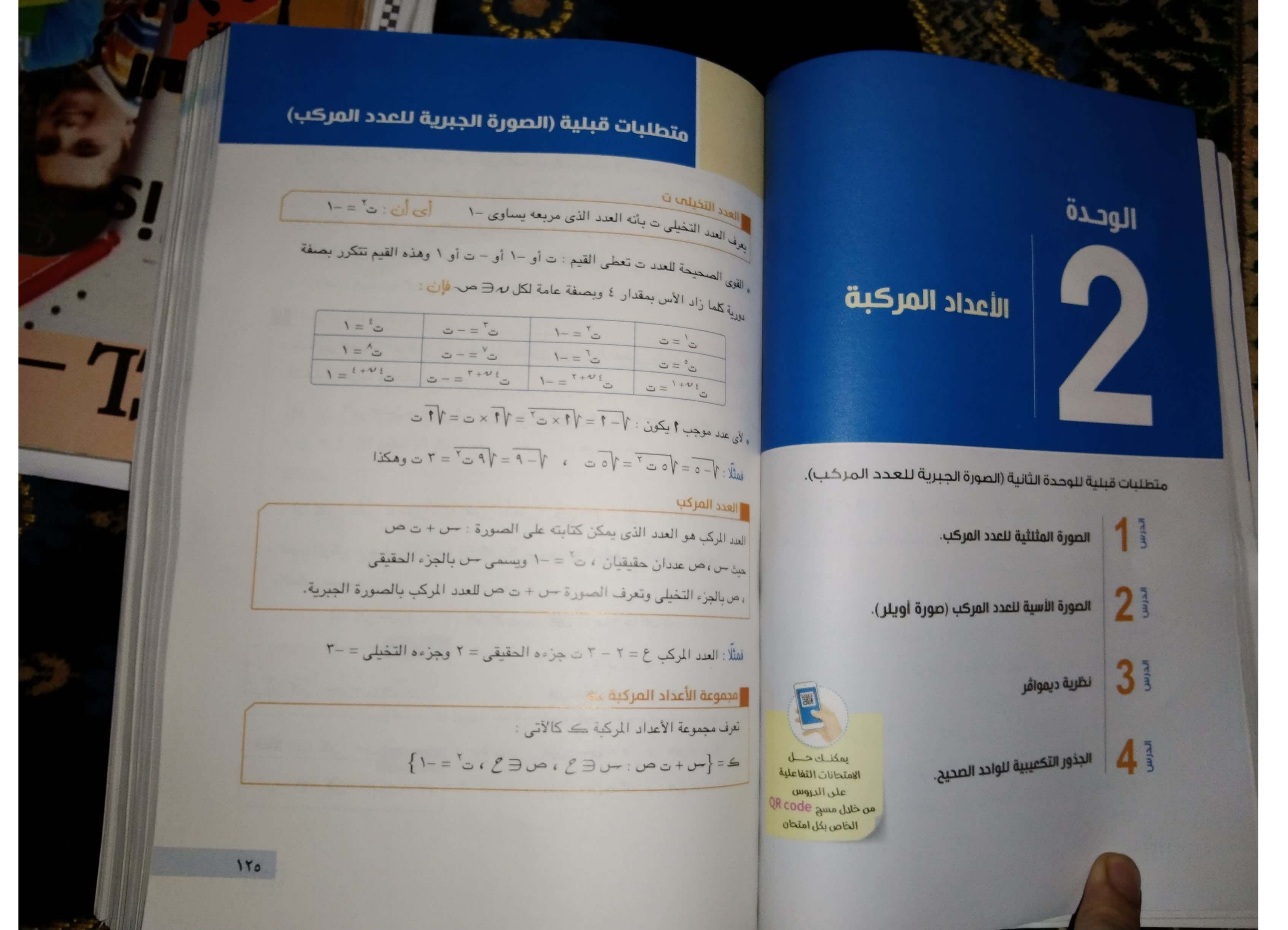
فإن $س \in$ ....

(أ) $[-٥ ، ٥]$ (ب) $]-\frac{١٦}{٥} ، \frac{١٦}{٥}[$

(جـ) $[-٥ ، ٥] -]-\frac{١٦}{٥} ، \frac{١٦}{٥}[$ (د) $[-٥ ، \frac{-١٦}{٥}] \cup [\frac{١٦}{٥} ، ٥]$

٤٥ أخذت ٣ حدود متتالية فى مفكوك : $(١ + س)^{٣٠}$ حسب قوى $س$ التصاعدية فوجد أن نسبة مجموع معامل الحدين الأول والثانى من هذه الحدود إلى مجموع معاملى الحدين الثانى والثالث منها كنسبة ٥ : ٣ فما هذه الحدود ؟

«$ح_{١٩}$ ، $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$»



الوحدة 2

الأعداد المركبة

متطلبات قبلية للوحدة الثانية (الصورة الجبرية للعدد المركب).

متطلبات قبلية (الصورة الجبرية للعدد المركب)

العدد التخيلي ت

يعرف العدد التخيلي ت بأنه العدد الذي مربعه يساوي -1 أي أن : $ت^2 = -1$

• القوى الصحيحة للعدد ت تعطى القيم : ت أو -1 أو $-$ت أو 1 وهذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار 4 وبصفة عامة لكل $ن \in ص$ فإن :

$ت^1 = ت$	$ت^2 = -1$	$ت^3 = -ت$	$ت^4 = 1$
$ت^5 = ت$	$ت^6 = -1$	$ت^7 = -ت$	$ت^8 = 1$
$ت^{4ن+1} = ت$	$ت^{4ن+2} = -1$	$ت^{4ن+3} = -ت$	$ت^{4ن+4} = 1$

• لأي عدد موجب أ يكون : $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ \times ت^2} = \sqrt{أ} \times ت = \sqrt{أ}\, ت$

فمثلاً : $\sqrt{-5} = \sqrt{5ت^2} = \sqrt{5}\, ت$ ، $\sqrt{-9} = \sqrt{9ت^2} = 3ت$ وهكذا

العدد المركب

العدد المركب هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة : س + ت ص

حيث س ، ص عددان حقيقيان ، $ت^2 = -1$ ويسمى س بالجزء الحقيقي ، ص بالجزء التخيلي وتعرف الصورة س + ت ص للعدد المركب بالصورة الجبرية.

فمثلاً : العدد المركب ع = $2 - 3$ت جزءه الحقيقي = 2 وجزءه التخيلي = -3

مجموعة الأعداد المركبة ك

تعرف مجموعة الأعداد المركبة ك كالآتي :

ك = {س + ت ص : س $\in$ ح ، ص $\in$ ح ، $ت^2 = -1$}

* لأى عدد مركب ع = س + ت ص

(١) إذا كان : س = ٠ ، ص ≠ ٠ فإن العدد المركب يصبح ع = ت ص ، ويسمى عدد مركب تخيلى صرف أى أن كل عدد تخيلى هو عدد مركب جزءه الحقيقى يساوى صفر

(٢) إذا كان : ص = ٠ فإن العدد المركب يصبح ع = س ، ويسمى عدد مركب حقيقى صرف أى أن كل عدد حقيقى هو عدد مركب جزءه التخيلى يساوى صفر ولذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية ح هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة ك

تساوى عددين مركبين

• يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان فيهما والعكس صحيح

أى أن : لأى عددين مركبين ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$ فإن :

* ع$_1$ = ع$_2$ إذا وفقط إذا كان : س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$

وبالعكس :

* إذا كان : س$_1$ = س$_2$ ، ص$_1$ = ص$_2$ فإن : ع$_1$ = ع$_2$

• العدد المركب = صفر إذا وفقط إذا كان كل من جزئيه الحقيقى والتخيلى = صفر والعكس صحيح

أى أن : إذا كان س = ٠ ، ص = ٠ فإن : س + ت ص = ٠

وبالعكس :

إذا كان : س + ت ص = ٠ فإن : س = ٠ ، ص = ٠

فمثلًا : إذا كان : س + ت ص = ٥ − ٤ ت فإن : س = ٥ ، ص = −٤

وإذا كان : س + ت ص = ٣ فإن : س = ٣ ، ص = ٠

جمع وطرح عددين مركبين

لأى عددين مركبين ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$

• ع$_1$ + ع$_2$ = (س$_1$ + س$_2$) + (ص$_1$ + ص$_2$) ت

• ع$_1$ − ع$_2$ = (س$_1$ − س$_2$) + (ص$_1$ − ص$_2$) ت

فمثلًا : (٢ + ٣ ت) + (٥ − ٤ ت) = (٢ + ٥) + (٣ + (−٤)) ت = ٧ − ت

، (−١ + ٤ ت) − (٦ − ت) = (−١ − ٦) + (٤ − (−١)) ت = −٧ + ٥ ت

ضرب عددين مركبين

لأى عددين مركبين ع$_1$ = س$_1$ + ت ص$_1$ ، ع$_2$ = س$_2$ + ت ص$_2$

ع$_1$ × ع$_2$ = (س$_1$ س$_2$ − ص$_1$ ص$_2$) + (س$_1$ ص$_2$ + س$_2$ ص$_1$) ت

يستخدم فى عملية الضرب نفس خواص ضرب الحدود والمقادير الجبرية فى إيجاد ناتج حاصل الضرب.

فمثلًا : • ٢ ت (١ − ٣ ت) = ٢ ت − ٦ ت^2 = ٦ + ٢ ت (حيث ت^2 = −١)

• (٣ − ٥ ت) (٢ + ت) = ٦ − ٧ ت − ٥ ت^2 = ١١ − ٧ ت (حيث ت^2 = −١)

(٣ ت ، −١٠ ت)

• (٤ − ت)^2 = ١٦ − ٨ ت + ت^2 (حيث ت^2 = −١)

= ١٥ − ٨ ت

• (٥ − ٣ ت) (٥ + ٣ ت) = ٢٥ − ٩ ت^2 (حيث ت^2 = −١)

= ٢٥ + ٩ = ٣٤

تذكر أن : (أ ± ب)^2 = أ^2 ± ٢ أ ب + ب^2

تذكر أن : (أ + ب) (أ − ب) = أ^2 − ب^2

الوحدة 2

مرافق العدد المركب

يرمز لمرافق العدد المركب ع = س + ت ص بالرمز $\overline{ع}$ حيث $\overline{ع}$ = س − ت ص

ويلاحظ أن: $\overline{ع}$ ينتج من تغيير إشارة الجزء التخيلي في العدد المركب ع ويكون

① $ع + \overline{ع} = (س + ت ص) + (س - ت ص) = ٢ س \in ح$

② $ع \times \overline{ع} = (س + ت ص)(س - ت ص) = س^٢ + ص^٢ \in ح$

فمثلا: إذا كان: ع = ٣ + ٢ت فإن: $\overline{ع}$ = ٣ − ٢ت

ويكون: $ع + \overline{ع} = (٣ + ٢ت) + (٣ - ٢ت) = ٦ \ (\in ح)$

، $ع \times \overline{ع} = (٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت) = ٩ + ٤ = ١٣ \ (\in ح)$

قسمة عددين مركبين

لأى عددين مركبين $ع_١$ ، $ع_٢$ حيث $ع_٢ \neq ٠$ يكون: $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ع_١ \overline{ع_٢}}{ع_٢ \overline{ع_٢}}$

أى أن: لإيجاد خارج قسمة $\frac{ع_١}{ع_٢}$ نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق $ع_٢$ أى فى $\overline{ع_٢}$

فمثلا:

• $\frac{٣٠ + ٤٥ت}{١ - ٢ت} = \frac{٣٠ + ٤٥ت}{١ - ٢ت} \times \frac{١ + ٢ت}{١ + ٢ت} = \frac{٣٠ + ١٠٥ت + ٩٠ت^٢}{١ - ٤ت^٢} = \frac{-٦٠ + ١٠٥ت}{٥} = -١٢ + ٢١ت$

• $\frac{٤ + \sqrt{-٢٥}}{٢ - \sqrt{-٩}} = \frac{٤ + ٥ت}{٢ - ٣ت} \times \frac{٢ + ٣ت}{٢ + ٣ت} = \frac{٨ + ٢٢ت + ١٥ت^٢}{٤ - ٩ت^٢} = \frac{-٧ + ٢٢ت}{١٣} = \frac{-٧}{١٣} + \frac{٢٢}{١٣}ت$

ملاحظات

① $\overline{(ع_١ \pm ع_٢)} = \overline{ع_١} \pm \overline{ع_٢}$

② $\overline{(ع_١ \times ع_٢)} = \overline{ع_١} \times \overline{ع_٢}$

③ $\overline{\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)} = \frac{\overline{ع_١}}{\overline{ع_٢}}$ حيث $ع_٢ \neq$ صفر

④ $\overline{\overline{ع}} = ع$

⑤ إذا كان: ع عددًا حقيقيًا فإن: $\overline{ع}$ = ع   فمثلا: إذا كان: ع = ٥ فإن: $\overline{ع}$ =

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى ك

مثال

أوجد مجموعة الحل فى ك لكل من المعادلتين الآتيتين:

① $س^٢ + ٤ = ٠$ ② $س^٢ + ٢س + ٢ = ٠$

الحل

① $س^٢ + ٤ = ٠$ $\therefore س^٢ = -٤$

$\therefore س = \pm\sqrt{-٤}$ $\therefore س = \pm ٢ت$

∴ مجموعة الحل فى ك = {٢ت ، −٢ت}

② $س^٢ + ٢س + ٢ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٢

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ} = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٨}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢} = \frac{-٢ \pm ٢ت}{٢}$

$= -١ \pm ت$

∴ مجموعة الحل فى ك = {−١ + ت ، −١ − ت}

ملاحظة

إذا كان: $ع = س_١ + ص_١ ت$ أحد جذرى المعادلة:

$أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ حيث $أ \in ح^*$ ، $ب \in ح$ ، $جـ \in ح$

فإن: الجذر الآخر هو $\overline{ع} = س_١ - ص_١ ت$

أى أنه: إذا كان أحد جذور المعادلة التربيعية التى معاملات حدودها أعداد حقيقية هو عدد مركب فإن الجذر الآخر هو مرافق هذا العدد المركب.

تمارين
على المتطلبات القبلية
(الصورة الجبرية للعدد المركب)

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) إذا كان : ٢ س + ٢ ت ص − ٦ + ٤ ت س = ٠ فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (٢ ، −٤) (جـ) (−٢ ، ٤) (د) (−٢ ، −٤)

(2) مجموعة حل المعادلة : $س^{٢}$ + ٩ = ٠ فى ك هى ....

(أ) {±٣} (ب) {±ت} (جـ) {±٣ ت} (د) {−٩}

(3) إذا كان : ع = ١ + ت فإن : $\frac{ع}{\bar{ع}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) − ت (د) ت

(4) إذا كان : ع = أ + ب ت ، ع + $\bar{ع}$ = ٦ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) −٦

(5) إذا كان : س + ت ص = ت (٢ + ت) فإن : س − ص = ...

(أ) ٢ (ب) −٣ (جـ) ٦ (د) −٦

(6) إذا كان : ع = ٢ − ت فإن : ع − $\bar{ع}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) −٢ ت (د) ٢ ت

(7) إذا كان : أ + ب ت = ت $(١ − ٥ ت)^{٢}$ فإن : ب = ...

(أ) ١٠ (ب) −١٠ (جـ) ٢٤ (د) −٢٤

(8) $ت^{ن} × ت^{ن+١} × ت^{ن+٢} × ت^{ن+٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ت

(9) $ت^{ن} + ت^{ن+١} + ت^{ن+٢} + ت^{ن+٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ت

(10) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ ت $س^{٢}$ − ٤ ت س + ٣ $ت^{٣}$ = ٠

فإن : $ل^{٢} + م^{٢}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

(11) $ت^{٥٧} + \frac{١}{ت^{٢٥}}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) −١

(12) $(١ + ت)^{١٢}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) −٦٤

(13) $(١ + ت)^{٥} (١ + \frac{١}{ت})^{٥}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) −٦٤

(14) ت + $ت^{٢}$ + $ت^{٣}$ + ... + $ت^{١٠٠}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠٠

(15) $(\frac{٢ ت}{١ + ت})^{٥}$ = ...

(أ) ١ + ت (ب) ١ − ت (جـ) −٤ − ٤ ت (د) ٤ − ٤ ت

(16) إذا كان : $(١ + ت)^{٢ن} = (١ − ت)^{٢ن}$ فإن أقل قيمة للعدد ن من القيم التالية تحقق ذلك هى ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ١٢

(17) إذا كان : $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{أ + ب ت}$ = ٢ + ٣ ت فإن : أ × ب = ...

حيث أ ، ب ∈ $ح^{*}$

(أ) −٦ (ب) −٥ (جـ) ٥ (د) ٦

(18) إذا كانت : د (س) = ٢ $س^{٤}$ − ٣ $س^{٣}$ + ٥ $س^{٢}$ − ٣ س + ١

فإن : د (ت) = ...

(أ) −٢ (ب) ٢ (جـ) ٢ + ت (د) ٢ − ت

(١٩) إذا كان : ٣ ، ٢ − ت جذرين لمعادلة من الدرجة الثالثة معاملاتها حقيقية

فإن الجذر الثالث لهذه المعادلة هو ....

(أ) −٣ (ب) ٢ + ت (جـ) −٢ + ت (د) ٢ − ت

(٢٠) إذا كان : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ عددين مركبين مترافقين

فإن : $\frac{١}{ع_{١}} + \frac{١}{ع_{٢}}$ يمكن أن يساوى ....

(أ) ٩ − ٤ ت (ب) ٥ ت (جـ) ١٣ (د) ١ + ت

(٢١) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $س^{٢} + ١ = ٠$

فإن : $ل^{٢٠٢٢} + م^{٢٠٢٢} =$ ....

(أ) −٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ (د) ٢٠١٨

(٢٢) إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، د أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية

فإن : $ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{د} =$ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ت

(٢٣) إذا كان : $ت^{م} = ت^{ن}$ فأى مما يأتى دائمًا صحيح ؟

① م = ن ② (م + ن) عدد زوجى ③ (ن − م) مضاعف للعدد ٤

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) جميع ما سبق.

(٢٤) إذا كان : أ < ب < ٠ < جـ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية

وكان : $\sqrt{ب(جـ − أ)} + \sqrt{أ ب} = ٢ + ٣ ت$

فإن : ب جـ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(٢٥) أى من الآتى صحيح ؟

(أ) ٢ + ٣ ت < ٣ + ٤ ت (ب) ٣ − ٤ ت < ٢ − ٣ ت

(جـ) ١ + ت < −١ − ت (د) لا شئ مما سبق.

(٢٦) $ت^{|٠} + ت^{|١} + ت^{|٢} + ت^{|٣} + ... + ت^{|٢٥} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٢ ت (جـ) ٢ ت + ٢٥ (د) ٢ ت + ٢٠

١ أوجد العدد المركب الذى يساوى كلاً مما يأتى :

① $(٣ − ٢ ت)^{٢} + (٣ + ٢ ت)^{٢}$

② $(١ + ت)^{٤} − (١ − ت)^{٤}$

③ $(١ − ت^{٥})(١ − ت^{١٠})(١ − ت^{١٥})$

④ $(\sqrt{٨} − \sqrt{−٥٤})(\sqrt{١٨} − \sqrt{−٢٤})$

⑤ $(٢ − \frac{١}{ت})^{٦}$

⑥ $\frac{٣}{٢ + ت}$

⑦ $\frac{٢ + ت}{٣ − ٤ ت}$

⑧ $\frac{٤ − ٥ ت}{٧ ت}$

٢ أوجد فى ك مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

① $س^{٢} + ١ = ٠$

② $س^{٤} − ١٦ = ٠$

③ $س^{٢} + ٤ س + ٥ = ٠$

④ $س^{٢} − ٦ س + ٢٥ = ٠$

٣ أوجد قيم س ، ص الحقيقية التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

① $٢ س − ٢ ت ص = (٥ − ت)^{٢}$

② $س^{٢} − ص^{٢} + ت (س + ص) = ٣ (١ + ت)$

③ $(س + ٢ ص ت)^{٢} + \frac{٨ (١ − ت)}{١ + ت} + ١٥ = ٠$

٤ إذا كان (−٣) جذرًا للمعادلة : $س^{٣} + س^{٢} − س + ١٥ = ٠$ فأوجد الجذرين الآخرين.

٥ إذا كانت : ع ∈ ك وكان $ع^{٢} − \bar{ع} = ٠$

فأوجد قيمة ع وأثبت أن هناك قيمتين للعدد ع مترافقتين.

٦ إذا كان ع عددًا مركبًا فأوجد مجموعة حل المعادلة : $٢ ع − ٣ \bar{ع} = ٥ + ١٠ ت$

الدرس 1

الصورة المثلثية للعدد المركب

الإحداثيات القطبية

يعتمد تعيين نقطة ولتكن (ا) فى النظام القطبى على بعد هذه النقطة عن نقطة ثابتة فى المستوى ولتكن (و) وقياس الزاوية المحصورة بين المحور القطبى وليكن و ه الذى غالبًا ما يمثله شعاع أفقى يبدأ من نقطة و ومتجهًا يمينًا والشعاع و ا ويكون قياس الزاوية موجبًا إذا كان اتجاه الزاوية بدءًا من المحور القطبى ضد اتجاه عقارب الساعة وسالبًا إذا كان مع اتجاه عقارب الساعة.

فى الشكل المقابل :

إذا رمزنا لبعد النقطة ا عن و بالرمز (ل) ولقياس الزاوية الموجهة (د ه و ا) بالرمز (θ) فإن النقطة (ا) فى النظام القطبى تعين بالزوج المرتب (ل ، θ)

فمثلًا : ①

ل = ٤ وحدات.

θ = ٤٠° أو θ = −٣٢٠°

∴ ا (٤ ، ٤٠°) أو (٤ ، −٣٢٠°)

②

ل = ٣ وحدات.

θ = −١٢٠° أو θ = ٢٤٠°

∴ ا (٣ ، −١٢٠°) أو (٣ ، ٢٤٠°)

ملاحظة

إذا كان θ أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة د ه و ا فى النظام القطبى فإنه يمكن التعبير عن ا بعدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى كل منها يكون على الصورة (ل ، θ ± ٣٦٠° ه) حيث ه ∈ ص

فمثلًا : إذا كانت : ا (٦ ، ٣٠°) فإنه يمكن التعبير عن ا بعدد لا نهائى من الأزواج المرتبة مثل : ا (٦ ، −٣٣٠°) أو (٦ ، ٣٩٠°) أو (٦ ، −٦٩٠°) أو ...

تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية :

إذا انطبق المحور القطبى على الجزء الموجب لمحور السينات فإنه يمكن تحويل الإحداثيات القطبية لأى نقطة ا (ل ، θ) إلى إحداثيات ديكارتية ا (س ، ص) كالآتى :

س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ

أى أن ا (س ، ص) = ا (ل جتا θ ، ل جا θ)

ملاحظة

يمكن تحويل الإحداثيات الديكارتية لنقطة ا (س ، ص) إلى إحداثيات قطبية ا (ل ، θ) بإيجاد ل ، θ كالآتى : ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، ظا θ = $\frac{ص}{س}$

∴ θ = ظا$^{-١}$ $\left(\frac{ص}{س}\right)$

مثال ①

عبر عن ا فى كل مما يأتى بالإحداثيات الديكارتية :

① ا (٥ ، ١٥٠°) ② ا (٣ ، −١٢٠°)

الحل

① ∵ ل = ٥ وحدات طول ، θ = ١٥٠°

∴ س = ل جتا θ = ٥ جتا ١٥٠° = $-\frac{٥}{٢}\sqrt{٣}$

، ص = ل جا θ = ٥ جا ١٥٠° = $\frac{٥}{٢}$

∴ ا $\left(-\frac{٥}{٢}\sqrt{٣} ، \frac{٥}{٢}\right)$ «الصورة الديكارتية»

② ∵ ل = ٣ وحدات طول ، θ = −١٢٠°

∴ س = ل جتا θ = ٣ جتا (−١٢٠°) = $\frac{-٣}{٢}$

، ص = ل جا θ = ٣ جا (−١٢٠°) = $\frac{-٣}{٢}\sqrt{٣}$

∴ ا $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{-٣}{٢}\sqrt{٣}\right)$ «الصورة الديكارتية»

مثال ٢

عبر عن أ بالإحداثيات القطبية فى كل مما يأتى :

① أ(٣ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ② أ(−٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$)

الحل

① ∵ ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٩ + ٢٧}$ = ٦ وحدة طول.

، ∵ θ = $ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right)$ = $ظا^{-١}\left(\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}\right)$ = $ظا^{-١}\left(\sqrt{٣}\right)$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠   ∴ θ تقع فى الربع الأول.

∴ θ = ٦٠°   ∴ أ(٦ ، ٦٠°)

② ∵ ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{٥٠ + ٥٠}$ = ١٠ وحدة طول.

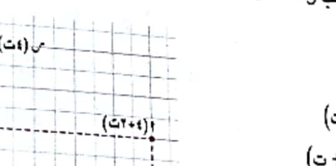
، ∵ θ = $ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right)$ = $ظا^{-١}\left(\frac{٥\sqrt{٢}}{-٥\sqrt{٢}}\right)$ = $ظا^{-١}$ (−١)

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠   ∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = ١٣٥°   ∴ أ(١٠ ، ١٣٥°)

مستوى أرجاند

استخدم العالم أرجاند المستوى الإحداثى المتعامد فى تمثيل العدد المركب على الصورة س + ت ص بجعل المحور الأفقى $\overleftrightarrow{س س}$ يمثل الجزء الحقيقى والمحور $\overleftrightarrow{ص ص}$ يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب ولذلك عرف الشكل الذى تمثل فيه الأعداد المركبة بيانيًا بشكل أرجاند أو مستوى أرجاند.



من الشكل المقابل :

أ تمثل العدد (٤ + ٢ ت)

، ب تمثل العدد (−٢ + ت)

، حـ تمثل العدد (−٤ − ٣ ت)

، ء تمثل العدد (٣ − ٢ ت)

، هـ تمثل العدد (٢)

، ر تمثل العدد (٤ ت)

، ك تمثل العدد (−٢ ت)

، ن تمثل العدد (− ٤)

ملاحظات

① النقطتان اللتان تمثلان العدد المركب ومعكوسه الجمعى على شكل أرجاند تكونان متماثلتين بالنسبة لنقطة الأصل أى هما طرفا قطعة مستقيمة تكون نقطة الأصل فى منتصفها

فمثلًا : إذا كان ع = −٣ + ٢ ت تمثله نقطة أ ومعكوسه الجمعى

− ع = ٣ − ٢ ت تمثله نقطة أ′

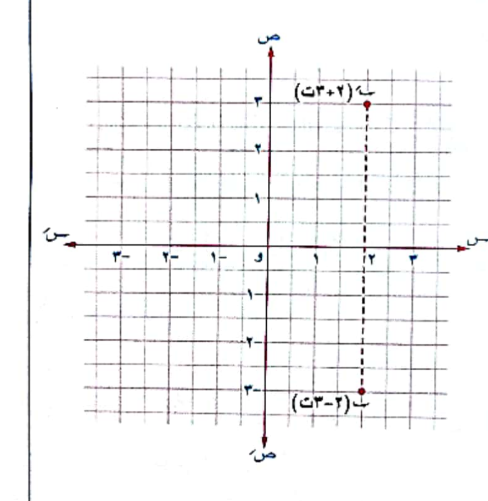
فإن : و نقطة تماثل $\overline{أأ'}$ أى و منتصف $\overline{أأ'}$

② العددان المركبان المترافقان يمثلان فى شكل أرجاند بنقطتين متماثلتين بالنسبة لمحور السينات $\overleftrightarrow{س س'}$

فمثلًا : إذا كان : ع = ٢ − ٣ ت تمثله نقطة ب ومرافقه

$\bar{ع}$ = ٢ + ٣ ت تمثله نقطة ب′

فإن : $\overleftrightarrow{س س'}$ هو محور تماثل $\overline{ب ب'}$



المقياس والسعة والصورة المثلثية للعدد المركب

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص تمثله النقطة أ (س ، ص) في الإحداثيات الديكارتية وكانت الإحداثيات القطبية لنفس النقطة أ (ل ، θ) فإن :

① مقياس العدد ع : هو بعد النقطة التي تمثل العدد ع عن نقطة الأصل ويرمز له بالرمز |ع|

أي أن : |ع| = ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

② سعة العدد ع : تسمى θ بسعة العدد ع

وإذا كانت θ ∈]−π ، π]

فإن : θ تسمى السعة الأساسية للعدد ع حيث : ظا θ = $\frac{ص}{س}$

أي أن : θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

③ الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب ع

∵ س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ ، ∵ ع = س + ت ص (الصورة الجبرية)

∴ ع = ل جتا θ + ت ل جا θ ∴ ع = ل (جتا θ + ت جا θ) (الصورة القطبية)

ملاحظات

تتحدد قيمة θ تبعًا للحالات الآتية :

① (١) إذا كان : س > ٠ ، ص > ٠ فإن : θ تقع في الربع الأول.

∴ θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

(٢) إذا كان : س < ٠ ، ص > ٠ فإن : θ تقع في الربع الثاني.

∴ θ = π + ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

(٣) إذا كان : س < ٠ ، ص < ٠ فإن : θ تقع في الربع الثالث.

∴ θ = −π + ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

(٤) إذا كان : س > ٠ ، ص < ٠ فإن : θ تقع في الربع الرابع.

∴ θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

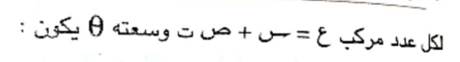
② (١) إذا كان : س > ٠ ، ص = ٠ فإن : θ = ٠

(٢) إذا كان : س < ٠ ، ص = ٠ فإن : θ = π

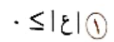
(٣) إذا كان : س = ٠ ، ص > ٠ فإن : θ = $\frac{\pi}{٢}$

(٤) إذا كان : س = ٠ ، ص < ٠ فإن : θ = $\frac{-\pi}{٢}$

• خواص المقياس والسعة للعدد المركب :



لكل عدد مركب ع = س + ص ت وسعته θ يكون :



① |ع| ≥ ٠

مع ملاحظة أن : |ع| = ٠ إذا وفقط إذا كان ع = ٠

② |ع| = |ع̄| = |−ع| = |−ع̄|

أي أن : العدد ومرافقه ومعكوسه الجمعي والمعكوس الجمعي لمرافقه لهم نفس المقياس

③ ع ع̄ = |ع|^2 = |ع̄|^2

④ سعة العدد المركب تأخذ عدد غير منته من القيم وذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات الكاملة (٢ π)

أي أن : سعة العدد المركب = θ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

⑤ سعة العدد المركب لا تتغير عند ضربه في عدد حقيقي موجب

أي أن : سعة (ع) = سعة (ك ع) حيث ك ∈ ح$^+$

مثال ③

أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية :

① $ع_1 = \sqrt{3} - ت$ ② $ع_2 = \frac{-1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,ت}$

③ $ع_3 = -4ت$ ④ $ع_4 = 6$

الحل

① ∵ $ع_1 = \sqrt{3} - ت$

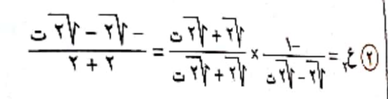
∴ $س = \sqrt{3}$ ، $ص = -1$

∴ $|ع_1| = ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$ وحدة طول.

∵ $س > 0$ ، $ص < 0$ ∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{6}$

∴ مقياس العدد $ع_1 = 2$ وحدة طول ، والسعة الأساسية للعدد $ع_1 = \frac{-\pi}{6}$



② $ع_2 = \frac{-1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}\,ت} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,ت}{\sqrt{2} + \sqrt{2}\,ت} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,ت}{2 + 2}$

$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,ت}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\,ت$

∴ $س = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ ، $ص = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

∴ $|ع_2| = ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$

∵ $س < 0$ ، $ص < 0$ ∴ θ تقع فى الربع الثالث.

∴ $\theta = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = -\pi + ظا^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{4} \div \frac{-\sqrt{2}}{4}\right) = -\pi + ظا^{-1}(1) = -\frac{3}{4}\pi$

∴ مقياس العدد $ع_2 = \frac{1}{2}$ وحدة طول ، السعة الأساسية للعدد $ع_2 = -\frac{3}{4}\pi$

③ $ع_3 = -4ت$

∴ $س = 0$ ، $ص = -4$

∴ $|ع_3| = \sqrt{0 + 16} = 4$ وحدة طول.

∵ $س = 0$ ، $ص < 0$

∴ $\theta = \frac{-\pi}{2}$

∴ مقياس العدد $ع_3 = 4$ وحدة طول.

، والسعة الأساسية للعدد $ع_3 = \frac{-\pi}{2}$

④ $ع_4 = 6$

∴ $س = 6$ ، $ص = 0$

∴ $|ع_4| = \sqrt{36 + 0} = 6$ وحدة طول.

∵ $س > 0$ ، $ص = 0$

∴ $\theta = 0$

∴ مقياس العدد $ع_4 = 6$ وحدة طول ، السعة الأساسية للعدد $ع_4 = 0$

مثال ④

عبر عن كل من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :

① $ع_1 = -2 + 2ت$ ② $ع_2 = -4 - 4\sqrt{3}\,ت$ ③ $ع_3 = 2\sqrt{3} - 2ت$

الحل

① $ع_1 = -2 + 2ت$ ∴ $س = -2$ ، $ص = 2$

∴ $|ع_1| = ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$

∵ $س < 0$ ، $ص > 0$ ∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ $\theta = \pi + ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = \pi + ظا^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right)$

$= \pi + ظا^{-1}(-1) = \pi + \left(\frac{-1}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi$

∵ $ع_1 = ل(جتا\,\theta + ت\,جا\,\theta)$ ∴ $ع_1 = 2\sqrt{2}\left(جتا\,\frac{3}{4}\pi + ت\,جا\,\frac{3}{4}\pi\right)$

② $\text{ع}_2 = -4 - 4\sqrt{3}\,\text{ت}$ ∴ $\text{س} = -4$ ، $\text{ص} = -4\sqrt{3}$

∴ $|\text{ع}_2| = \text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{16 + 48} = 8$

، ∵ $\text{س} < 0$ ، $\text{ص} < 0$ ∴ θ تقع فى الربع الثالث.

∴ $\theta = -\pi + \text{ظا}^{-1}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) = -\pi + \text{ظا}^{-1}\left(\frac{-4\sqrt{3}}{-4}\right)$

$= -\pi + \text{ظا}^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = -\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{-2}{3}\pi$

، ∵ $\text{ع}_2 = \text{ل}\,(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta)$ ∴ $\text{ع}_2 = 8\left(\text{حتا}\left(\frac{-2}{3}\pi\right) + \text{ت}\,\text{حا}\left(\frac{-2}{3}\pi\right)\right)$

③ $\text{ع}_3 = 2\sqrt{3} - 2\,\text{ت}$ ∴ $\text{س} = 2\sqrt{3}$ ، $\text{ص} = -2$

∴ $|\text{ع}_3| = \text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$

، ∵ $\text{س} > 0$ ، $\text{ص} < 0$ ∴ θ تقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right) = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) = \text{ظا}^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$

∴ $\text{ع}_3 = \text{ل}\,(\text{حتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{حا}\,\theta) = 4\left(\text{حتا}\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \text{ت}\,\text{حا}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

لاحظ أن

الأعداد المركبة ١ ، ت ، −١ ، −ت يمثلها جميعًا فى شكل أرجاند نقط تقع على دائرة مركزها «و» وطول نصف قطرها الوحدة وتنتج من تقاطع هذه الدائرة مع محورى الإحداثيات نجد أن مقياس كل منها يساوى الواحد الصحيح أى ل = ١ والسعة الأساسية لكل منها على الترتيب هى : 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{-\pi}{2}$ ولذلك يمكن التعبير عنها بالصورة المثلثية كالآتى :

$1 = \text{حتا}\,0^\circ + \text{ت}\,\text{حا}\,0^\circ$ ، $\text{ت} = \text{حتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\frac{\pi}{2}$

، $-1 = \text{حتا}\,\pi + \text{ت}\,\text{حا}\,\pi$ ، $-\text{ت} = \text{حتا}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \text{ت}\,\text{حا}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

مثال ٥

اكتب كلاًّ من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :

① ٥ ② ٣ ت ③ $-\sqrt{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ت

الحل

① $5 = 5 \times 1 = 5\,(\text{حتا}\,0^\circ + \text{ت}\,\text{حا}\,0^\circ)$

② $3\,\text{ت} = 3 \times \text{ت} = 3\left(\text{حتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\frac{\pi}{2}\right)$

③ $-\sqrt{3} = \sqrt{3} \times -1 = \sqrt{3}\,(\text{حتا}\,\pi + \text{ت}\,\text{حا}\,\pi)$

④ $-\frac{1}{2}\,\text{ت} = \frac{1}{2} \times -\text{ت} = \frac{1}{2}\left(\text{حتا}\left(\frac{-\pi}{2}\right) + \text{ت}\,\text{حا}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

مثال ٦

عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة المثلثية وكذا الصورة الجبرية :

① العدد ع_1 الذى مقياسه ٢ وسعته الأساسية $\frac{\pi}{2}$

② العدد ع_2 الذى مقياسه ٣ وسعته $\frac{4\pi}{3}$

③ العدد ع_3 الذى مقياسه $2\sqrt{2}$ وسعته 315°

④ العدد ع_4 الذى مقياسه ٤ وسعته $\frac{\pi}{4} + 2\,\text{ن}\,\pi$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}$

الحل

① ∵ $|\text{ع}_1| = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ∴ $\text{ع}_1 = 2\left(\text{حتا}\frac{\pi}{2} + \text{ت}\,\text{حا}\frac{\pi}{2}\right)$ «الصورة المثلثية»

، ∵ $\text{حتا}\frac{\pi}{2} = 0$ ، $\text{حا}\frac{\pi}{2} = 1$ ∴ $\text{ع}_1 = 2\,(0 + \text{ت} \times 1) = 2\,\text{ت}$ «الصورة الجبرية»

② ∵ $|\text{ع}_2| = 3$ ، ∵ سعة العدد $\text{ع}_2 = \frac{4\pi}{3}$

∴ السعة الأساسية للعدد ع_2 $(\theta) = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{-2}{3}\pi$

∴ $\text{ع}_2 = 3\left(\text{حتا}\left(\frac{-2}{3}\pi\right) + \text{ت}\,\text{حا}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$ «الصورة المثلثية»

، ∵ $\text{حتا}\left(\frac{-2}{3}\pi\right) = \text{حتا}\,(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$ ، ∵ $\text{حا}\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \text{حا}\,(-120^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

∴ $\text{ع}_2 = 3\left(\frac{-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}\,\text{ت}\right) = \frac{-3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{ت}$ «الصورة الجبرية»

③ ∵ $|ع_٣| = ٢\sqrt{٢}$ ، ∵ سعة العدد $ع_٣ = ٣١٥°$

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_٣$ $(\theta) = ٣١٥° - ٣٦٠° = -٤٥°$

∴ $ع_٣ = ٢\sqrt{٢}$ (جتا $(-٤٥°)$ + ت جا $(-٤٥°)$) «الصورة المثلثية»

، ∵ جتا $(-٤٥°) = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، جا $(-٤٥°) = \frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

∴ $ع_٣ = ٢\sqrt{٢}\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت\right) = ٢ - ٢ت$ «الصورة الجبرية»

④ ∵ $|ع_٤| = ٤$ ، ∵ سعة العدد $ع_٤ = \frac{\pi}{٤} + ٢ ن \pi$ حيث ن ∈ ص

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_٤$ $(\theta) = \frac{\pi}{٤}$

∴ $ع_٤ = ٤$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) «الصورة المثلثية»

، ∵ جتا $\frac{\pi}{٤}$ = جتا ٤٥° $= \frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، جا $\frac{\pi}{٤}$ = جا ٤٥° $= \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ $ع_٤ = ٤\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت\right) = ٢\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢}ت$ «الصورة الجبرية»

تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية الى الصورة القياسية

- نحدد الربع حسب الإشارة التى أمام الدوال المثلثية بالجزئين الحقيقى والتخيلى.
- فى حالة وجود دالة جيب التمام بالجزء الحقيقى ودالة الجيب بالجزء التخيلى (الدوال المثلثية مضبوطة) تنسب الزوايا إلى ١٨٠° أو ٣٦٠°
- فى حالة وجود دالة الجيب بالجزء الحقيقى ودالة جيب التمام بالجزء التخيلى (الدوال المثلثية معكوسة) تنسب الزوايا إلى ٩٠° ، -٩٠° ثم نستخدم الشكل التالى :

الربع الثانى	الربع الأول
١٨٠° - θ ، ٩٠° + θ	θ ، ٩٠° - θ
-١٨٠° + θ ، -٩٠° - θ	٣٦٠° - θ ، -θ ، -٩٠° + θ
الربع الثالث	الربع الرابع

الربع الأول

- إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تبقى كما هى : ع = ل (جتا θ + ت جا θ)
- إذا كان : ع = ل (جا θ + ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول للصورة
  ع = ل [جتا (٩٠° - θ) + ت جا (٩٠° - θ)]

الربع الثانى

- إذا كان : ع = ل (- جتا θ + ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تحول إلى ع
  = ل [جتا (١٨٠° - θ) + ت جا (١٨٠° - θ)]
- إذا كان : ع = ل (- جا θ + ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول إلى
  ع = ل [جتا (٩٠° + θ) + ت جا (٩٠° + θ)]

الربع الرابع

- إذا كان : ع = ل (جتا θ - ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تحول إلى ع
  = ل [جتا (-θ) + ت جا (-θ)]
- إذا كان : ع = ل (جا θ - ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول إلى
  ع = ل [جتا (-٩٠° + θ) + ت جا (-٩٠° + θ)]

الربع الثالث

- إذا كان : ع = ل (- جتا θ - ت جا θ) (الدوال المثلثية مضبوطة)
  تحول إلى ع
  = ل [جتا (-١٨٠° + θ) + ت جا (-١٨٠° + θ)]
- إذا كان : ع = ل (- جا θ - ت جتا θ) (الدوال المثلثية معكوسة)
  تحول إلى
  ع = ل [جتا (-٩٠° - θ) + ت جا (-٩٠° - θ)]

لاحظ أن

- الطريقة السابقة تستخدم لكل ل > ٠ ، θ ∈ [٠ ، ٢π[
- إذا كانت السعة التى حصلنا عليها ∈]-π ، π] فإنها تكون هى السعة الأساسية.
- إذا لم تكن السعة التى حصلنا عليها أساسية نضيف إليها ٣٦٠° أو نحذف منها ٣٦٠° نحصل على السعة الأساسية.

مثال ٧

أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد الآتية واكتب العدد بصورته المثلثية :

① $ع_١ = -٤$ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

② $ع_٢ = ٦$ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ + ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)

③ $ع_٣ = ٣$ (جا ١٢٠° + ت جتا ١٢٠°)

④ $ع_٤ = ٨$ (جتا ٢٤٠° - ت جا ٢٤٠°)



الحل

① ع₁ = ٤ (− جتا ٤٥° − ت جا ٤٥°)

∵ إشارتي الدوال المثلثية (− ، −)

∴ نختار الربع الثالث.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ السعة الأساسية للعدد ع₁ = −١٨٠° + θ

= −١٨٠° + ٤٥° = −١٣٥°

، مقياس العدد ع₁ = ٤ وصورته المثلثية هى : ع₁ = ٤ (جتا (−١٣٥°) + ت جا (−١٣٥°))

② ع₂ = ٦ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ + ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$)

∵ إشارتي الدوال المثلثية (+ ، +)

∴ نختار الربع الأول.

، ∵ الدوال المثلثية معكوسة.

∴ السعة الأساسية للعدد ع₂ = ٩٠° − θ = $\frac{\pi}{٢} - \frac{٤}{٣}\pi = -\frac{٥}{٦}\pi$

ومقياس العدد ع₂ = ٦ وصورته المثلثية = ٦ (جتا ($-\frac{٥}{٦}\pi$) + ت جا ($-\frac{٥}{٦}\pi$))

③ ع₃ = ٣ (جا ١٢٠° + ت جتا ١٢٠°)

∵ إشارتي الدوال المثلثية (+ ، +)

∴ نختار الربع الأول.

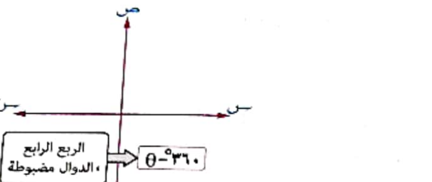
، ∵ الدوال المثلثية معكوسة.

∴ السعة الأساسية للعدد ع₃ = ٩٠° − θ

= ٩٠° − ١٢٠° = −٣٠°

، مقياس العدد ع₃ = ٣ ، وصورته المثلثية = ٣ (جتا (−٣٠°) + ت جا (−٣٠°))

④ ع₄ = ٨ (جتا ٢٤٠° − ت جا ٢٤٠°)



∵ إشارتي الدوال المثلثية (− ، +)

∴ نختار الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ السعة الأساسية للعدد ع₄ = ٣٦٠° − θ = ٣٦٠° − ٢٤٠°

= ١٢٠°

، مقياس العدد ع₄ = ٨ ، وصورته المثلثية ع₄ = ٨ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

مثال ٨

إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ)

فاكتب الصورة المثلثية لكل من الأعداد الآتية حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[:

① −ع | ② $\bar{ع}$ | ③ −$\bar{ع}$

④ $\frac{١}{ع}$ | ⑤ $\frac{١}{\bar{ع}}$

الحل

① −ع = −ل (جتا θ + ت جا θ) = ل (−جتا θ − ت جا θ)

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ −ع يقع فى الربع الثالث.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد (−ع) = −١٨٠° + θ

ومقياس العدد (−ع) = ل

∴ −ع = ل (جتا (θ − ١٨٠°) + ت جا (θ − ١٨٠°))

② $\bar{ع} = ل\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ $\bar{ع}$ تقع في الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $\bar{ع} = -\theta$

ومقياس العدد $\bar{ع} = ل$

∴ $\bar{ع} = ل\,(\text{جتا}\,(-\theta) + ت\,\text{جا}\,(-\theta))$

③ $-\bar{ع} = -ل\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta) = ل\,(-\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)$

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ $-\bar{ع}$ تقع في الربع الثاني.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $-\bar{ع} = (١٨٠^\circ - \theta)$

، مقياس العدد $(-\bar{ع}) = ل$

∴ $-\bar{ع} = ل\,(\text{جتا}\,(١٨٠^\circ - \theta) + ت\,\text{جا}\,(١٨٠^\circ - \theta))$

④ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل\,(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)}$ بالضرب × $(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)$ بسطاً ومقاماً.

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل} \times \frac{١}{(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)} \times \frac{(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)}{(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)}$

$= \frac{١}{ل} \times \frac{(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)}{\text{جتا}^٢\,\theta + \text{جا}^٢\,\theta} = \frac{١}{ل}\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)$

تذكر أن: $\text{جا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta = ١$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠.

∴ العدد $\frac{١}{ع}$ يقع في الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة.

∴ سعة العدد $\frac{١}{ع} = -\theta$ ومقياس العدد $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}$

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل}\,(\text{جتا}\,(-\theta) + ت\,\text{جا}\,(-\theta))$

⑤ $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{ل\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)} = \frac{١}{ل} \times \frac{١}{\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta} \times \frac{\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta}$

$= \frac{١}{ل} \times \frac{\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}^٢\,\theta + \text{جا}^٢\,\theta} = \frac{١}{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)$

∴ سعة العدد $\frac{١}{\bar{ع}} = \theta$ ومقياس العدد $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{ل}$

∴ $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + ت\,\text{جا}\,\theta)$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية

إذا كان: $ع_١ = ل_١\,(\text{جتا}\,\theta_١ + ت\,\text{جا}\,\theta_١)$ ، $ع_٢ = ل_٢\,(\text{جتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جا}\,\theta_٢)$ فإن:

① $ع_١\,ع_٢ = ل_١\,ل_٢\,(\text{جتا}\,(\theta_١ + \theta_٢) + ت\,\text{جا}\,(\theta_١ + \theta_٢))$

الإثبات:

$ع_١\,ع_٢ = ل_١\,(\text{جتا}\,\theta_١ + ت\,\text{جا}\,\theta_١) \times ل_٢\,(\text{جتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جا}\,\theta_٢)$

$= ل_١\,ل_٢\,(\text{جتا}\,\theta_١ + ت\,\text{جا}\,\theta_١)\,(\text{جتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جا}\,\theta_٢)$

$= ل_١\,ل_٢\,(\text{جتا}\,\theta_١\,\text{جتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جتا}\,\theta_١\,\text{جا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جا}\,\theta_١\,\text{جتا}\,\theta_٢ - \text{جا}\,\theta_١\,\text{جا}\,\theta_٢)$

$= ل_١\,ل_٢\,((\text{جتا}\,\theta_١\,\text{جتا}\,\theta_٢ - \text{جا}\,\theta_١\,\text{جا}\,\theta_٢) + ت\,(\text{جا}\,\theta_١\,\text{جتا}\,\theta_٢ + \text{جتا}\,\theta_١\,\text{جا}\,\theta_٢))$

$= ل_١\,ل_٢\,(\text{جتا}\,(\theta_١ + \theta_٢) + ت\,\text{جا}\,(\theta_١ + \theta_٢))$

ونلاحظ أن: مقياس حاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مقياسيهما

أي $|ع_١\,ع_٢| = ل_١\,ل_٢ = |ع_١|\,|ع_٢|$

، سعة حاصل ضرب عددين مركبين = مجموع سعتيهما

أي سعة $(ع_١\,ع_٢)$ = سعة $ع_١$ + سعة $ع_٢ = \theta_١ + \theta_٢$

② $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢}\,(\text{جتا}\,(\theta_١ - \theta_٢) + ت\,\text{جا}\,(\theta_١ - \theta_٢))$

الإثبات:

$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١\,(\text{جتا}\,\theta_١ + ت\,\text{جا}\,\theta_١)}{ل_٢\,(\text{جتا}\,\theta_٢ + ت\,\text{جا}\,\theta_٢)}$ وبضرب البسط والمقام × مرافق المقام

$$\therefore \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{جتا\theta_1 + ت جا\theta_1}{جتا\theta_2 + ت جا\theta_2} \times \frac{جتا\theta_2 - ت جا\theta_2}{جتا\theta_2 - ت جا\theta_2}$$

$$= \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{جتا\theta_1 جتا\theta_2 - ت جتا\theta_1 جا\theta_2 + ت جا\theta_1 جتا\theta_2 + جا\theta_1 جا\theta_2}{جتا^2\theta_2 + جا^2\theta_2}$$

$$= \frac{ل_1}{ل_2} \times \frac{(جتا\theta_1 جتا\theta_2 + جا\theta_1 جا\theta_2) + ت(جا\theta_1 جتا\theta_2 - جتا\theta_1 جا\theta_2)}{1}$$

$$= \frac{ل_1}{ل_2} \left(جتا(\theta_1 - \theta_2) + ت جا(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

ولاحظ أن: مقياس خارج قسمة عددين مركبين = خارج قسمة مقياسيهما أن :

$$\left|\frac{ع_1}{ع_2}\right| = \frac{ل_1}{ل_2} = \frac{|ع_1|}{|ع_2|}$$

سعة خارج قسمة عددين مركبين = الفرق بين سعتيهما

أى أن سعة $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)$ = سعة $ع_1$ − سعة $ع_2$ = $\theta_1 - \theta_2$

ملاحظة هامة

لاستخدام قواعد الضرب والقسمة فى الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية يجب أن تكون الأعداد فى صورتها المثلثية القياسية أى على الصورة ل $(جتا\theta + ت جا\theta)$

مثال 9

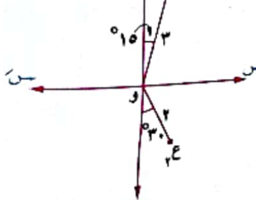
أوجد $ع_1 ع_2$ ، $\frac{ع_1}{ع_2}$ بالصورة المثلثية فى كل من الحالات الآتية :

① إذا كان : $ع_1 = 2(جتا 60^\circ + ت جا 60^\circ)$ ، $ع_2 = 4(جتا 150^\circ + ت جا 150^\circ)$

② إذا كان : $ع_1 = 2(جتا \frac{\pi}{5} + ت جا \frac{\pi}{5})$ ، $ع_2 = 8(جتا \frac{-2\pi}{5} + ت جا \frac{-2\pi}{5})$

③ إذا كان : $ع_1 = 2(جتا 120^\circ - ت جا 120^\circ)$ ، $ع_2 = 3(جا 120^\circ + ت جتا 120^\circ)$

④ إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ ممثلين على أشكال أرجاند كما فى الشكل المقابل :



الحل

① $ع_1 ع_2 = 2(جتا 60^\circ + ت جا 60^\circ) \times 4(جتا 150^\circ + ت جا 150^\circ)$

$= 8(جتا(60^\circ + 150^\circ) + ت جا(60^\circ + 150^\circ))$

$= 8(جتا 210^\circ + ت جا 210^\circ) = 8(جتا(-150^\circ) + ت جا(-150^\circ))$

، $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2(جتا 60^\circ + ت جا 60^\circ)}{4(جتا 150^\circ + ت جا 150^\circ)} = \frac{1}{2}(جتا(60^\circ - 150^\circ) + ت جا(60^\circ - 150^\circ))$

$= \frac{1}{2}(جتا(-90^\circ) + ت جا(-90^\circ))$

② $ع_1 ع_2 = 2(جتا \frac{\pi}{5} + ت جا \frac{\pi}{5}) \times 8(جتا(\frac{-2\pi}{5}) + ت جا(\frac{-2\pi}{5}))$

$= 2 \times 8(جتا(\frac{\pi}{5} + (\frac{-2\pi}{5})) + ت جا(\frac{\pi}{5} + (\frac{-2\pi}{5})))$

$= 16(جتا(\frac{-\pi}{5}) + ت جا(\frac{-\pi}{5}))$

، $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{2(جتا(\frac{\pi}{5}) + ت جا(\frac{\pi}{5}))}{8(جتا(\frac{-2\pi}{5}) + ت جا(\frac{-2\pi}{5}))}$

$= \frac{1}{4}(جتا(\frac{\pi}{5} - (\frac{-2\pi}{5})) + ت جا(\frac{\pi}{5} - (\frac{-2\pi}{5})))$

$= \frac{1}{4}(جتا(\frac{3\pi}{5}) + ت جا(\frac{3\pi}{5}))$

③ $\because ع_1 = 2(جتا 120^\circ - ت جا 120^\circ)$

، ∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، −) ∴ نختار الربع الرابع.

، ∵ الدوال المثلثية مضبوطة. ∴ السعة الأساسية للعدد $ع_1 = -120^\circ$

$\therefore ع_1 = 2(جتا(-120^\circ) + ت جا(-120^\circ))$

، $\because ع_2 = 3(جا 120^\circ + ت جتا 120^\circ)$

، ∵ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، +) ∴ نختار الربع الأول.

، ∵ الدوال المثلثية معكوسة.

∴ السعة الأساسية للعدد $ع_2 = 90^\circ - 120^\circ = -30^\circ$

$\therefore ع_2 = 3(جتا(-30^\circ) + ت جا(-30^\circ))$



$\therefore$ ع١ ع٢ = ٢ × ٣ (جتا (−١٢٠° − ٣٠°) + ت جا (−١٢٠° − ٣٠°))

= ٦ (جتا (−١٥٠°) + ت جا (−١٥٠°))

، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ (جتا (−١٢٠° + ٣٠°) + ت جا (−١٢٠° + ٣٠°))

= $\frac{٢}{٣}$ (جتا (−٩٠°) + ت جا (−٩٠°))

④ من الشكل : ع١ = ٣ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°)

، ع٢ = ٢ (جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°))

$\therefore$ ع١ ع٢ = ٣ × ٢ (جتا (٧٥° − ٦٠°) + ت جا (٧٥° − ٦٠°))

= ٦ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ (جتا (٧٥° + ٦٠°) + ت جا (٧٥° + ٦٠°))

= $\frac{٣}{٢}$ (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°)

نتائج

① إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) فإن :

(١) $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{ل}$ (جتا (−θ) + ت جا (−θ))   (٢) ع² = ل² (جتا (٢ θ) + ت جا (٢ θ))

② إذا كان : ع١ = ل١ (جتا θ١ + ت جا θ١)

، ع٢ = ل٢ (جتا θ٢ + ت جا θ٢) ، ... ، عن = لن (جتا θن + ت جا θن)

فإن: ع١ ع٢ ... عن

= ل١ ل٢ ... لن (جتا (θ١ + θ٢ + ... + θن) + ت جا (θ١ + θ٢ + ... + θن))

أى أنه يمكن تعميم قاعدة الضرب على عدد محدود من الأعداد المركبة.

إذا كان : ع١ = ع٢ = ع٣ = ... = ع

فإن : عⁿ = لⁿ (جتا (ن θ) + ت جا (ن θ))

ومنها نجد أن : |عⁿ| = |ع|ⁿ

مثال ١٠

إذا كان ع١ = ٢ (جتا ١٢٠° − ت جا ١٢٠°) ، ع٢ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)

فأوجد على الصورة المثلثية القياسية والصورة الجبرية :

① ع١ ع٢   ② $\frac{١}{ع_١}$ ③ ع١²   ④ ع٢⁴

الحل

نضع أولاً كلاً من ع١ ، ع٢ على الصورة المثلثية القياسية.

$\because$ ع١ = ٢ (جتا ١٢٠° − ت جا ١٢٠°)

، $\because$ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، −) $\therefore$ نختار الربع الرابع

، $\because$ الدوال المثلثية مضبوطة $\therefore$ السعة الأساسية للعدد ع١ = −١٢٠°

$\therefore$ ع١ = ٢ (جتا (−١٢٠°) + ت جا (−١٢٠°))

، $\because$ ع٢ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)

، $\because$ إشارتى الدوال المثلثية (+ ، +) $\therefore$ نختار الربع الأول

، $\because$ الدوال المثلثية معكوسة $\therefore$ السعة الأسية للعدد ع٢ = ٩٠° − ١٥٠° = −٦٠°

$\therefore$ ع٢ = ٣ (جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°))

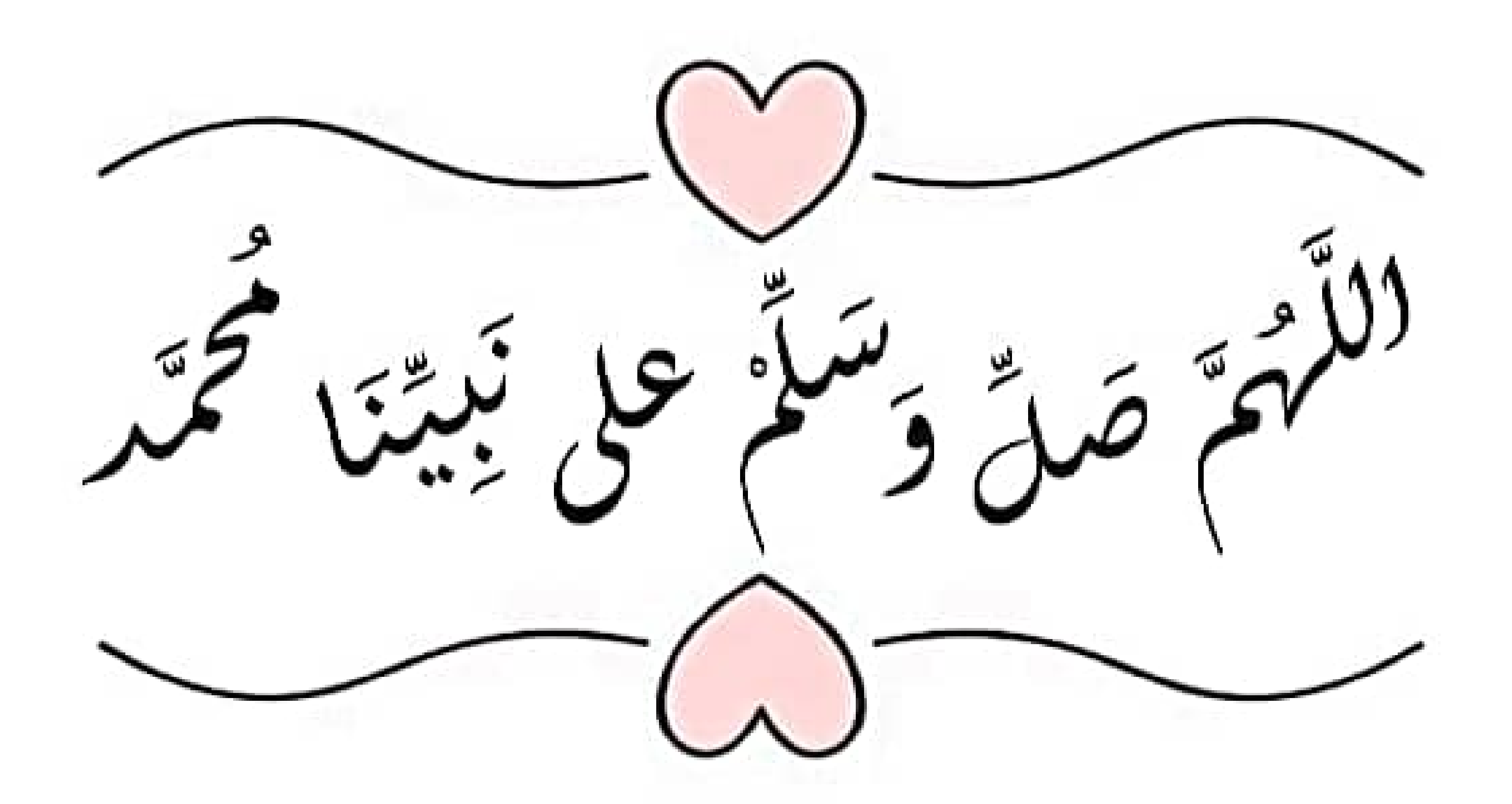
① ع١ ع٢ = ٢ × ٣ (جتا (−١٢٠° − ٦٠°) + ت جا (−١٢٠° − ٦٠°))

= ٦ (جتا (−١٨٠°) + ت جا (−١٨٠°)) = ٦ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°) «الصورة المثلثية»

، ع١ ع٢ = ٦ (−١ + ت × ٠) = −٦ «الصورة الجبرية»

② $\frac{١}{ع_١}$ = $\frac{١}{٢ (جتا (−١٢٠°) + ت جا (−١٢٠°))}$ = $\frac{١}{٢}$ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) «الصورة المثلثية»

$\therefore$ $\frac{١}{ع_١}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{−١}{٢}$ + ت × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = $\frac{−١}{٤}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ت «الصورة الجبرية»


اللَّهُمَّ صَلِّ وَسَلِّمْ على نَبِيِّنَا مُحَمَّد

③ $ع_٢^٢ = ٢^٢$ (جتا ٢ (−١٢٠°) + ت جا ٢ (−١٢٠°)) = ٤ (جتا (−٢٤٠°) + ت جا (−٢٤٠°))

= ٤ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) «الصورة المثلثية»

$ع_٢^٢$ = ٤ $\left(\frac{-١}{٢} + ت \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = −٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ت «الصورة الجبرية»

④ $ع_٢^٤ = ٢^٤$ (جتا ٤ (−٦٠°) + ت جا ٤ (−٦٠°)) = ٨١ (جتا (−٢٤٠°) + ت جا (−٢٤٠°))

= ٨١ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) «الصورة المثلثية»

= ٨١ $\left(\frac{-١}{٢} + ت \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ = $\frac{-٨١}{٢}$ + $\frac{٨١\sqrt{٣}}{٢}$ ت «الصورة الجبرية»

مثال ⑪

إذا كان : ع عدد مركب وكانت السعة الأساسية للعدد (−ع) تساوى $\frac{-٥\pi}{٦}$

أوجد السعة الأساسية للعدد : $\left(\frac{\bar{ع}}{ت}\right)$

الحل

نفرض أن السعة الأساسية للعدد المركب ع هى θ

∴ السعة الأساسية للعدد (−ع) هى θ − π

∴ θ − π = $\frac{-٥\pi}{٦}$ ∴ θ = $\frac{\pi}{٦}$

، السعة الأساسية للعدد $(\bar{ع})$ = $\frac{-\pi}{٦}$

∴ السعة الأساسية للعدد $\left(\frac{\bar{ع}}{ت}\right)$ = (سعة العدد $\bar{ع}$) − (سعة العدد ت)

= $\frac{-\pi}{٦} - \frac{\pi}{٢} = \frac{-٢\pi}{٣}$

مثال ⑫

إذا كان : ع = ٢ (جتا θ + ت جا θ) حيث θ ∈]π ، $\frac{٣}{٢}$π[، ظا θ = $\frac{٣}{٤}$

فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من : $\frac{١}{ع}$ ، $ع^{-٢}$ ، $\frac{١}{\bar{ع}}$

الحل

∵ ع = ٢ (جتا θ + ت جا θ)

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}$ (جتا (−θ) + ت جا (−θ)) «الصورة المثلثية»

= $\frac{١}{٢}$ (جتا θ − ت جا θ) = $\frac{١}{٢}$ $\left(-\frac{٤}{٥} + \frac{٣}{٥} ت\right)$

∴ $\frac{١}{ع} = -\frac{٢}{٥} + \frac{٣}{١٠}$ ت «الصورة الجبرية»

∵ $ع^٢$ = ٤ $(جتا θ + ت جا θ)^٢$

∴ $ع^٢$ = ٤ (جتا ٢θ + ت جا ٢θ)

∴ $\frac{١}{ع^٢} = \frac{١}{٤}$ (جتا (−٢θ) + ت جا (−٢θ)) «الصورة المثلثية»

= $\frac{١}{٤}$ (جتا ٢θ − ت جا ٢θ) = $\frac{١}{٤}$ (٢ $جتا^٢$ θ − ١ − ت × ٢ جا θ جتا θ)

= $\frac{١}{٤}$ $\left(\frac{٣٢}{٢٥} - ١ - ت \times ٢ \times \frac{-٣}{٥} \times \frac{-٤}{٥}\right)$ = $\frac{١}{٤}$ $\left(\frac{٧}{٢٥} - \frac{٢٤}{٢٥} ت\right)$

∴ $ع^{-٢} = \frac{٧}{١٠٠} - \frac{٦}{٢٥}$ ت «الصورة الجبرية»

، ∵ $\bar{ع}$ = ٢ (جتا θ − ت جا θ) = ٢ (جتا (−θ) + ت جا (−θ))

∴ $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{٢}$ (جتا −(−θ) + ت جا −(−θ)) = $\frac{١}{٢}$ (جتا θ + ت جا θ) «الصورة المثلثية»

= $\frac{١}{٢}$ $\left(-\frac{٤}{٥} - \frac{٣}{٥} ت\right)$

∴ $\frac{١}{\bar{ع}} = -\frac{٢}{٥} - \frac{٣}{١٠}$ ت «الصورة الجبرية»

مثال ١٣

إذا كان : ع١ = ٥ (جتا θ − ت جا θ) ، ع٢ = −٦ (جتا ٢θ + ت جا ٢θ)

حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[، طا θ = $\frac{4}{3}$ فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من :

(١) $ع_1^2$ (٢) ع١ ع٢

الحـل

∵ ع١ = ٥ (جتا θ − ت جا θ) = ٥ (جتا (−θ) + ت جا (−θ))

، ع٢ = ٦ (− جتا ٢θ − ت جا ٢θ) = ٦ (جتا (− π + ٢θ) + ت جا (− π + ٢θ))

(١) $ع_1^2$ = ٢٥ $(\text{جتا}(-\theta) + \text{ت جا}(-\theta))^2$

= ٢٥ (جتا (−٢θ) + ت جا (−٢θ)) «الصورة المثلثية»

∴ $ع_1^2$ = ٢٥ (جتا ٢θ − ت جا ٢θ)

∵ جتا ٢θ = ١ − ٢ جا^2 θ = ١ − ٢ × $\frac{16}{25}$ = $-\frac{7}{25}$

، جا ٢θ = ٢ جا θ جتا θ = ٢ × $\frac{4}{5}$ × $\frac{3}{5}$ = $\frac{24}{25}$

∴ $ع_1^2$ = ٢٥ $\left(\frac{-7}{25} - ت \times \frac{24}{25}\right)$ = −٧ − ٢٤ ت «الصورة الجبرية»

(٢) ع١ ع٢ = ٥ (جتا (−θ) + ت جا (−θ)) × ٦ (جتا (− π + ٢θ) + ت جا (− π + ٢θ))

= ٣٠ (جتا (− π + θ) + ت جا (− π + θ)) «الصورة المثلثية»

∴ ع١ ع٢ = ٣٠ (− جتا θ − ت جا θ) = ٣٠ $\left(\frac{-3}{5} - ت \times \frac{4}{5}\right)$

= −١٨ − ٢٤ ت «الصورة الجبرية»

ملاحظات

(١) إذا كان : ع = $\frac{س + ت ص}{س - ت ص}$ فإن : | ع | = ١ (حيث أن البسط مرافق المقام)

فمثلًا : $\left|\frac{3+ت}{3-ت}\right| = 1$ ، $\left|\frac{\sqrt{أ+2} - 4ت}{\sqrt{أ+2} + 4ت}\right| = 1$

(٢) إذا كان ع عدد مركب سعته θ فإن العدد (ت ع) هو صورة العدد (ع) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° وبالتالي يكون | ت ع | = | ع | وسعته (ت ع) = ٩٠° + θ

تمارين 6 على الصورة المثلثية للعدد المركب

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق ••• مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

١ إذا كانت : ع = ٣ + ٤ ت مثل على شكل أرجاند كلاً من الأعداد الآتية :

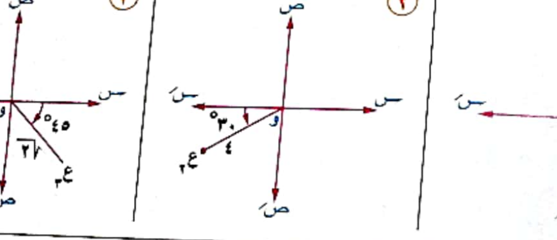
(١) ع (٢) $\bar{ع}$ (٣) − ع (٤) − $\bar{ع}$ (٥) ١ + ع

٢ اكتب الصورة المثلثية وكذا الصورة الجبرية لكلٍ من الأعداد الآتية :

(١) العدد الذى مقياسه ٢ وسعته صفر (٢) العدد الذى مقياسه ٢ وسعته $\frac{3\pi}{2}$

(٣) العدد الذى مقياسه ١ وسعته ٢١٠° (٤) العدد الذى مقياسه $\sqrt{2}$ وسعته $\frac{5\pi}{4}$

٣ اكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :



٤ أوجد المقياس والسعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية ثم ضع كلًا منها فى الصورة المثلثية :

(١) −٣ (٢) ٢ ت (٣) ١ + ت

📖 (٤) $-\sqrt{3}$ + ت 📖 (٥) −١ − ت (٦) ٤ − ٤ $\sqrt{3}$ ت

📖 (٧) $\frac{-4}{\sqrt{3} + ت}$ 📖 (٨) $-\sqrt{3}$ + ٤ ت

٥ ضع كلاً من الأعداد الآتية على الصورة س + ت ص حيث س ، ص ∈ ح ثم اكتب الصورة المثلثية لكل منها :

(١) $\frac{8}{\sqrt{3} + ت}$ (٢) $\frac{2 - 2ت}{2ت}$ (٣) $\frac{5 - \sqrt{3}ت}{\sqrt{3} - 2ت}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ع = ٣ + ٤ ت فإن : | ع | = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) 📖 العدد ع = ٣ − ٤ ت يمثل على شكل أرجاند بالنقطة أ حيث أ = ...

(أ) (٣ ، ٤) (ب) (٣ ، −٤) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٣ ، −٤)

(٣) إذا كانت النقطة أ ($\sqrt{3}$ ، −١) تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند فإن المقياس والسعة الأساسية للعدد ع هما ....

(أ) (٢ ، $\frac{\pi}{6}$) (ب) (٢ ، $\frac{5\pi}{6}$) (جـ) (٢ ، $-\frac{5\pi}{6}$) (د) (٢ ، $\frac{-\pi}{6}$)

(٤) سعة العدد المركب ع = −٣ تساوى ....

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٥) إذا كان : ع = −١ + $\sqrt{3}$ ت فإن : | $\bar{ع}$ | = ...

(أ) −١ − $\sqrt{3}$ ت (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) ٢ (د) −٢

(٦) العدد المركب ع = −٢ ت بالصورة المثلثية يساوى ....

(أ) ٢ (جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°) (ب) ٢ (جتا − ٩٠° + ت جا − ٩٠°)

(جـ) ٢ (جتا ٠° + ت جا ٠°) (د) ٢ (جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°)

(٧) السعة الأساسية للعدد المركب ع = ١ − ت هى ....

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{-\pi}{4}$ (جـ) $\frac{-7\pi}{4}$ (د) $\frac{7\pi}{4}$

(٨) 📖 أى مما يأتى يمثل الصورة الجبرية للعدد ٢ (جتا $\frac{2\pi}{3}$ + ت جا $\frac{2\pi}{3}$) ؟

(أ) −$\sqrt{3}$ + ت

(ب) −١ + $\sqrt{3}$ ت

(جـ) −$\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ ت

(د) −$\sqrt{3}$ − $\sqrt{3}$ ت

(٩) 📖 (دور ثان ٢٠١٧) إذا كان : ع = $\sqrt{2}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°) فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(١٠) 📖 إذا كان ع عددًا مركبًا سعته الأساسية θ فإن :

أولًا : سعة ($\bar{ع}$) = ...

(أ) θ (ب) − θ (جـ) $\frac{\pi}{2}$ − θ (د) π − θ

ثانيًا : سعة (٢ ع) = ...

(أ) θ (ب) − θ (جـ) ٢ θ (د) −٢ θ

ثالثًا : سعة ($\frac{1}{ع}$) = ...

(أ) θ (ب) − θ (جـ) π − θ (د) − π + θ

(١١) 📖 إذا كان : ع = $\frac{1}{ع}$ فإن : | ع | = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ±١

(١٢) إذا كان : | ع | = ١٠ فإن : ع $\bar{ع}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١ (د) −١٠٠

(١٣) إذا كان : | ع | = ٦ فإن : | − $\bar{ع}$ | = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) $\frac{1}{6}$ (د) −$\frac{1}{6}$

(١٤) إذا كان : ع = ٦ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) فإن : | $\bar{ع}$ | = ...

(أ) ٦ (ب) −٦ (جـ) ٣ $\sqrt{3}$ (د) ٦ $\sqrt{3}$

(١٥) (دور أول ٢٠١٧) السعة الأساسية للعدد ٢ [جتا $\frac{\pi}{4}$ − ت جا $\frac{\pi}{4}$] هى ....

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{-\pi}{4}$ (جـ) $\frac{3\pi}{4}$ (د) $\frac{-3\pi}{4}$

(١٦) إذا كان : | ع | + | $\bar{ع}$ | = ١٢ فإن : | ت ع | = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٢ ت (جـ) ٦ (د) −٦

(١٧) إذا كان ع عدد مركب غير صفرى فإن سعة (ع) الأساسية + سعة ($\bar{ع}$) الأساسية = ...

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) −٩٠°

(١٨) إذا كانت سعة العدد ع = ٢٨° فإن سعة العدد $\left(\frac{ت}{ع}\right)$ = ...

(أ) ٢٨° (ب) ٦٢° (جـ) ١١٨° (د) −٢٨°

(١٩) إذا كان : ع عدد مركب فأى العبارات الآتية خطأ ؟

(أ) ع $\bar{ع}$ = | ع |^{٢} (ب) ع $\bar{ع}$ = | $\bar{ع}$ |^{٢}

(جـ) سعة (ع) = سعة ($\bar{ع}$) (د) $\overline{ع_١ + ع_٢} = \bar{ع}_١ + \bar{ع}_٢$

(٢٠) إذا كان : ع + ٢ = ت (ع − ٢) فإن العدد المركب ع = ... (بالصورة المثلثية)

(أ) ٢ (حتا ٠° + ت حا ٠°) (ب) ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)

(جـ) ٢ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) (د) ٢ (حتا −٩٠° + ت حا −٩٠°)

(٢١) (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن : | ع | = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ٥

(٢٢) إذا كان : س = حتا ١٧° + ت حا ١٧° ، ص = حتا ١١° + ت حا ١١°

فإن العدد المركب ع = س^{٣} ص^{٩} على الصورة المثلثية هو ....

(أ) حتا ٣٠° + ت حا ٣٠° (ب) حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°

(جـ) حتا −١٢٠° + ت حا −١٢٠° (د) حتا −٦٠° + ت حا −٦٠°

(٢٣) إذا كانت نقطة أ تمثل العدد ع على مستوى أرجاند ، ب تمثل العدد $\bar{ع}$ على مستوى أرجاند فإن ب صورة أ بالانعكاس فى ....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (جـ) محور ص (د) المستقيم ص = س

(٢٤) إذا كان : ع$_١$ = ٢ $\sqrt{٣}$ − ت ، ع$_٢$ = ٢ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

فإن : $\bar{ع}_١ - \bar{ع}_٢$ = ...

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ + ت (ب) $\sqrt{٣}$ − ت (جـ) $\sqrt{٣}$ + ٢ ت (د) ٣ $\sqrt{٣}$ + ٢ ت

(٢٥) إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع$_١$ هى $\theta_١$ والسعة الأساسية للعدد ع$_٢$ هى $\theta_٢$ فإن السعة الأساسية للعدد ع$_١$ ع$_٢$ هى ....

(أ) $\theta_١ + \theta_٢$ (ب) $\theta_١ \times \theta_٢$ (جـ) $\theta_١ - \theta_٢$ (د) $\theta_١ \div \theta_٢$

(٢٦) ٣ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°) × ٦ (حتا ٧٠° + ت حا ٧٠°) = ...

(أ) ١٨ (حتا ٢١٠° + ت حا ١٠٠°) (ب) ٩ (حتا ١٠٠° + ت حا ١٠٠°)

(جـ) ١٨ (حتا ١٠٠° + ت حا ١٠٠°) (د) ٩ (حتا ٤٠° + ت حا ٤٠°)

(٢٧) ٦ (حتا ٢١٠° + ت حا ٢١٠°) ÷ ٣ (حتا ٧٠° + ت حا ٧٠°) = ...

(أ) ٢ (حتا ٣° + ت حا ٣°) (ب) ٣ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

(جـ) ٣ (حتا ١٤٠° + ت حا ١٤٠°) (د) ٢ (حتا ١٤٠° + ت حا ١٤٠°)

(٢٨) [٥ (حتا ١٠° + ت حا ١٠°)]^{٢} = ...

(أ) ٢٥ (حتا ١٠٠° + ت حا ١٠٠°) (ب) ١٠ (حتا ١٠٠° + ت حا ١٠٠°)

(جـ) ٢٥ (حتا ٢٠° + ت حا ٢٠°) (د) ١٠ (حتا ٢٠° + ت حا ٢٠°)

(٢٩) الجزء الحقيقى للعدد المركب الذى مقياسه $\sqrt{٢}$ وسعته $\frac{٧ \pi}{٦}$ هو ....

(أ) $-\sqrt{٣}$ (ب) $-\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (جـ) $-\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ (د) $-\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

(٣٠) الصورة المثلثية للعدد (ت^{٢٥})^{٣} حيث ت^{٢} = −١ هى ....

(أ) حتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{\pi}{٢}$ (ب) حتا π + ت حا π

(جـ) حتا π − ت حا π (د) حتا $\frac{\pi}{٢}$ − ت حا $\frac{\pi}{٢}$

(٣١) الشكل المقابل يمثل العدد المركب ....

(أ) ٣ (حتا ٣٠° + ت حا ٣٠°)

(ب) ٣ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

(جـ) ٣ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

(د) ٣ (حتا ١٥٠° + ت حا ١٥٠°)

(٣٢) الشكل المقابل يوضح العددين المركبين ع$_١$ ، ع$_٢$ فإن السعة الأساسية لـ (ع$_١$ ع$_٢$) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-\pi}{٢}$

(جـ) π (د) $\frac{-\pi}{٨}$



(٣٣) إذا كان : ع عدد مركب غير حقيقى فأى الأعداد الآتية لها نفس سعة ع؟

(أ) −ع (ب) $\bar{ع}$ (ج) $\frac{١}{ع}$ (د) $\frac{١}{\bar{ع}}$

(٣٤) إذا كان : ع = −٣ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°) فإن سعة العدد ع = ...

(أ) −١٣٥° (ب) ١٣٥° (ج) ٤٥° (د) −٤٥°

(٣٥) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $ع_١ = \frac{٤\pi}{٥}$ والسعة الأساسية للعدد $ع_٢ = \frac{٢\pi}{٣}$ فإن السعة الأساسية للعدد $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)$ = ...

(أ) $\frac{٢\pi}{١٥}$ (ب) $\frac{\pi}{١٥}$ (ج) $\frac{٢٢\pi}{١٥}$ (د) $\frac{٣\pi}{١٠}$

(٣٦) إذا كان العدد ع تخيلى بحت وكانت سعته الأساسية هى (٤ θ + ١٠°) فإن : θ = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٢٠° أ، −٢٥° (ج) ٩٠° أ، −٩٠° (د) −٩٠°

(٣٧) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان وكانت سعة $ع_١$ = (٣ θ − ١١٠°) وسعة $ع_٢$ = (٢ θ + ٥٠°) فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٨}$ (ج) $\frac{\pi}{١٢}$ (د) $\frac{\pi}{١٥}$

(٣٨) إذا كان ع عدد مركب مقياسه = ٢ وسعته $\frac{\pi}{٢}$ فإن :

أولاً : مقياس العدد المركب (ع + ٢) = ...

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٥}$ (ج) $\sqrt{٦}$ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

ثانياً : سعة العدد المركب (ع + ٢) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (ج) $\frac{٢\pi}{٤}$ (د) π

(٣٩) إذا كانت النقطتان أ ، ب يمثلان فى مستوى أرجاند العددين المركبين $ع_١$ ، $ع_٢$ على الترتيب فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ تمثل العدد المركب ....

(أ) $ع_١ + ع_٢$ (ب) $ع_١ - ع_٢$ (ج) $\frac{١}{٢}(ع_١ + ع_٢)$ (د) $\frac{١}{٢}(ع_١ - ع_٢)$

(٤٠) إذا كانت ع عدد مركب فأى من الأعداد المركبة التالية لها نفس سعة العدد المركب ع؟

(أ) ع + ١ (ب) ع + ت (ج) ٢ ع (د) −٢ ع

(٤١) إذا كان : $ع_١$ = ١٠ (جتا θ + ت جا θ) ، $ع_٢$ = ٥ (جتا α + ت جا α) وكان θ − α = $\frac{٣\pi}{٤}$ فإن : $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ...

(أ) −$\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت (ب) $\sqrt{٢}$ − $\sqrt{٢}$ ت (ج) ١ − $\sqrt{٣}$ ت (د) −١ + $\sqrt{٣}$ ت

(٤٢) إذا كان : ع = جتا θ − ت جا θ فإن : $\frac{ع^٢ - ١}{ع ت}$ = ...

(أ) −٢ جا θ (ب) ٢ جا θ (ج) جا θ (د) جا ٢ θ

(٤٣) إذا كان : $ع_١$ = جتا $θ_١$ + ت جا $θ_١$ حيث ٠ < $θ_١$ < $\frac{\pi}{٢}$ ، $ع_٢$ = جتا $θ_٢$ + ت جا $θ_٢$ حيث ٠ < $θ_٢$ < $\frac{\pi}{٢}$ وكان : $ع_١^٢ ع_٢^{-٤} = ١$ فإن : $\frac{θ_١}{θ_٢}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٤٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : $ع_١$ = جتا θ + ت جا θ ، $ع_٢$ = جتا ٢ θ + ت جا ٢ θ فإن السعة الأساسية للعدد المركب ٣ $ع_١ \times ع_٢$ = ... حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٦}$[

(أ) ٩ θ (ب) θ (ج) ٥ θ (د) ٣ θ

(٤٥) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان : ع = ل (جا $\frac{٤}{٣}$ π − ت جتا $\frac{٤}{٣}$ π) حيث ل < صفر فإن : $ع^٦$ = ...

(أ) $ل^٦$ (ب) ٦ ل (ج) −$ل^٦$ (د) −٦ ل

٧ إذا كان : ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) فاكتب الصورة المثلثية لكلٍ من الأعداد :

−ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $\frac{١}{\bar{ع}}$

٨ إذا كان : ع = −$\sqrt{٣}$ + ت فاكتب الصورة المثلثية لكلٍ من الأعداد :

ع ، −ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$ ، $\frac{١}{\bar{ع}}$

٩ أوجد المقياس والسعة لكلٍ من الأعداد الآتية حيث θ زاوية حادة :

(١) −٨ (جتا ٤٥° + ت جا ٤٥°)

(٢) ٤ (جتا ١٥٠° − ت جا ١٥٠°)

(٣) جا ٢٤٠° + ت جتا ٢٤٠°

(٤) −٢ (جا ٢١٠° − ت جتا ٢١٠°)

الوحدة 2 • فهم • تطبيق • مستويات عليا

⑤ $\Box$ ٢ (جا $\frac{٤}{٣}\pi$ − ت جتا $\frac{٤}{٣}\pi$) ⑥ $\Box$ ١ + ت ظا ٢٠°

⑦ ل (جتا θ − ت جا θ) ⑧ −ل (جتا θ + ت جا θ)

⑨ ل (−جتا θ + ت جا θ) ⑩ ل (جا θ − ت جتا θ)

١٠ أوجد العدد ع على الصورة المثلثية حيث $ت^٢ = −١$ ، θ ∈]$\frac{−\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[في كل مما يأتي :

① ع = $\frac{١}{١ + ت ظا θ}$ ② ع = $\frac{١ + ت ظا θ}{١ − ت ظا θ}$ ③ ع = $\frac{جا θ − ت جتا θ}{جا \frac{θ}{٢} + ت جتا \frac{θ}{٢}}$

١١ أوجد الصورة المثلثية لحاصل الضرب $ع_١ ع_٢$ إذا كان :

① $ع_١$ = $ل_١$ (جتا (أ + ب) + ت جا (أ + ب)) ، $ع_٢$ = $ل_٢$ (جتا (أ − ب) + ت جا (أ − ب))

② $ع_١$ = ١٢ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) ، $ع_٢$ = $\frac{٣}{٤}$ (جتا ١٥٠° − ت جا ١٥٠°)

③ $ع_١$ = −٢ (جتا $\frac{٢\pi}{٤}$ − ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$) ، $ع_٢$ = ٨ (جا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جتا $\frac{\pi}{٤}$)

④ $ع_١$ = − جا ٢٤٠° − ت جتا ٢٤٠° ، $ع_٢$ = ٧ (جا ١٢٠° − ت جتا ١٢٠°)

⑤ $ع_١$ = $\sqrt{٣}$ − ت ، $ع_٢$ = ٤ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

١٢ أوجد الصورة المثلثية لخارج القسمة $ع_١ ÷ ع_٢$ إذا كان :

① $ع_١$ = ٣ (جتا ٣θ − ت جا ٣θ) ، $ع_٢$ = ٤ (جتا ٤θ − ت جا ٤θ)

② $ع_١$ = ل (جتا θ − ت جا θ)^٢ ، $ع_٢$ = ل (جتا θ + ت جا θ)

③ $ع_١$ = ١ ، $ع_٢$ = (جتا ٢θ + ت جا ٢θ)^٢

④ $ع_١$ = ١٠ (جتا ٣٠٠° − ت جا ٣٠٠°) ، $ع_٢$ = ٢ (جا ٣٠٠° − ت جتا ٣٠٠°)

⑤ $ع_١$ = ١٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)^٢ ، $ع_٢$ = ٧ (− جا ٧٥° − ت جتا ٧٥°)^٢

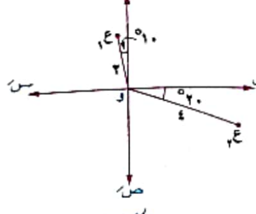
١٣ عبر عن كل مما يأتي بالصورة س + ص ت :

① ٣ (جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{١٢}$) × ٤ (جتا $\frac{\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{١٢}$)

② ٣ (جتا $\frac{\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{١٢}$) × $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ − ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

③ $\frac{\sqrt{٢} (جتا \frac{\pi}{٢} + ت جا \frac{\pi}{٢})}{\frac{١}{٢} (جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤})}$

١٤ $\Box$ إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين ممثلين على مستوى أرجاند في كل من الشكلين الآتيين فأوجد $\frac{ع_٢}{ع_١}$ على الصورة س + ص ت :



شكل (١)

شكل (٢)

١٥ $\Box$ إذا كان : $ع_١$ = ٢ (جتا ١٠° + ت جا ١٠°) ، $ع_٢$ = ٣ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°)

أوجد العدد $ع_١^٤ ع_٢^٢$ على الصورة س + ص ت

١٦ إذا كان : $ع_١$ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢$ = ١ + ت أوجد كلاً مما يأتي في الصورة المثلثية :

① $\Box$ $ع_١ ع_٢$ ② $\Box$ $\frac{ع_٢}{ع_١}$

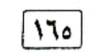
③ $(ع_١)^٨$ ④ $\Box$ $(ع_٢)^٦$

١٧ إذا كان : $ع_١$ = جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $ع_٢$ = جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$

فأوجد المقياس والسعة للعدد : $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right)^ن$ حيث $ت^٢ = −١$

١٨ $\Box$ إذا كان : ع = $\frac{(١ + ت)(٢ − ت)}{(١ − ت)(٣ + ت)}$ أوجد : |ع|

١٩ $\Box$ إذا كان : ع = $\frac{(أ + ب) + ت (أ − ب)}{(أ − ب) − ت (أ + ب)}$ فأوجد العدد ع في أبسط صورة ثم أوجد |ع| حيث أ ، ب ∈ ح



٢٠ (دور ثان ٢٠١٠) ضع كلًا من العددين : $ع_١ = جتا \frac{٤\pi}{٣} - ت جا \frac{٤\pi}{٣}$ ، $ع_٢ = \sqrt{٣} ...$
على الصورة المثلثية ، ثم أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع حيث $ع = ع_١ ع_٢$

٢١ (دور ثان ٢٠٠٦) إذا كان : $ع = جتا \frac{\pi}{٣} + ت جا \frac{\pi}{٣}$ حيث $ت^٢ = -١$
فأوجد كلًا من العددين : $ع_١ = ع - ١$ ، $ع_٢ = ع + ١$ فى الصورة المثلثية
ومن ثم برهن على أن : العدد المركب $\frac{ع_١}{ع_٢}$ يكون عددًا تخيليًا صرفًا.

٢٢ إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين حيث $ع_١ = -٩ + ٣\sqrt{٣} ت$ ، $|ع_٢| = ...$
، سعة $ع_٢ = \frac{٧\pi}{١٢}$ أوجد كلًا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة :
ل (جتا θ + ت جا θ) حيث $-\pi < \theta \le \pi$

① $ع_١$ ② $ع_٢$ ③ $ع_١ ع_٢$ ④ $\frac{ع_١}{ع_٢}$

٢٣ إذا كان : $ع_١ = \frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(١ - ت)}{١ + ت}$ ، $ع_٢ = \frac{(١ - \sqrt{٣} ت)(١ + ت)}{١ - ت}$

أوجد : $\frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة المثلثية.

٢٤ إذا كان : $ع_١ = جتا ١١٤° + ت جا ٦٦°$ ، $ع_٢ = جتا ٤٢° + ت جا ١٣٨°$
، $ع_٣ = جا ٢٤° + ت جا ١١٤°$ أوجد الصورة الجبرية للعدد : $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المعكوس الضربى للعدد المركب ع حيث $|ع| \ne ١$ هو ....

(أ) $\bar{ع}$ (ب) $\frac{\bar{ع}}{|ع|^٢}$ (جـ) $\frac{\bar{ع}}{|ع|}$ (د) $\frac{ع}{|ع|^٢}$

② العدد المركب $\left(\frac{١ + ٢ت}{١ - ت}\right)$ يقع فى مستوى أرجاند فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

③ إذا كان : $أ \ne ٠$ وكان $ع_١ = ١ + \sqrt{٢} ت$ ، $ع_٢ = ٢ \left(جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤}\right)$
فإن : $\left|\frac{ع_١}{ع_٢}\right| = $ ....

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\sqrt{٦}$

④ فى الشكل المقابل :
$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان
فإن : $\frac{ع_١}{ع_٢} = $ ....

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) -٢ ت (د) ٢ ت

⑤ فى الشكل المقابل :
$ع_١$ ، $ع_٢$ عددان مركبان
وكان $(ع_١ ع_٢)$ عدد مركب
فإن : $ع_٢ = $ ....

(أ) -٢ ت (ب) - ت (جـ) ت (د) ٢ ت

⑥ إذا كانت : $ع_١$ ، $ع_٢$، $ع_٣$، $ع_٤$ أعداد مركبة
فإن سعة $(ع_١ ع_٢ ع_٣ ع_٤) = $ ....

(أ) -٩٠° (ب) صفر° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٧) أ ب حـ ء مربع مرسوم في مستوى أرجاند مركزه عند نقطة الأصل فإذا كانت النقطة أ تمثل العدد المركب $(1 + \sqrt{3}\,ت)$ فإن النقطة حـ تمثل العدد المركب ....

(أ) $-1-\sqrt{3}\,ت$ (ب) $1-\sqrt{3}\,ت$ (جـ) $-1+\sqrt{3}\,ت$ (د) $2(1+\sqrt{3}\,ت)$

(٨) إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ عددان مركبان ، سعة $(ع_1 ع_2) = \frac{5\pi}{18}$ ، سعة $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right) = \frac{\pi}{9}$ فإن سعة $ع_1$ = ...

(أ) $\frac{5\pi}{36}$ (ب) $\frac{7\pi}{36}$ (جـ) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(٩) إذا كانت سعة $(ع_1 ع_2) = \frac{\pi}{6}$ ، سعة $(ع_2 ع_3) = \frac{2\pi}{9}$ ، سعة $(ع_1 ع_3) = \frac{5\pi}{18}$ فإن سعة $(ع_1 ع_2 ع_3)$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (جـ) $\frac{\pi}{5}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

(١٠) إذا كان ع عدد مركب وكان سعة $(ع - 2) = \frac{\pi}{2}$ ، سعة $(ع - 4) = \frac{2\pi}{4}$ فإن سعة ع = ...

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{3\pi}{4}$

(١١) إذا كانت : $ع_1 = 3 + 3\sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = -4 - 4\sqrt{3}\,ت$ فإن سعة $(ع_1 + ع_2)$ = ...

(أ) $60°$ (ب) $-120°$ (جـ) $180°$ (د) $-60°$

(١٢) إذا كانت : $ع = 1 + \sqrt{3}\,ت$ فإن السعة الأساسية للعدد $(1+\sqrt{3}\,ت)^{8}$ هي ....

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{2\pi}{3}$ (جـ) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{-2\pi}{3}$

(١٣) (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : $ع = (1+\sqrt{3}\,ت)^{ن}$ وكان $|ع| = 8$ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\frac{\pi}{6}$ (د) π

(١٤) إذا كان $ع_1 = 2\,ت$ ، $ع_2 = -1 + 3\,ت$ حيث $ت^2 = -1$ فإن سعة $(ع_1 - ع_2)$ تساوى ....

(أ) $\frac{3\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $-\frac{\pi}{4}$ (د) $-\frac{3\pi}{4}$

(١٥) إذا كانت : $ع_1 = ل_1 (جتا\,\theta_1 + ت\,جا\,\theta_1)$ ، $ع_2 = ل_2 (جتا\,\theta_2 + ت\,جا\,\theta_2)$ وكان $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ فإن : $ع_1 ع_2$ = ...

(أ) $ل_1 ل_2$ (ب) $-ل_1 ل_2$ (جـ) $ل_1 ل_2\,ت$ (د) $-ل_1 ل_2\,ت$

(١٦) إذا كانت سعة العدد المركب $ع \in]-\pi ، 0[$ فإن سعة $(-ع)$ − سعة $(ع)$ = ...

(أ) π (ب) $-\pi$ (جـ) $-\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

(١٧) إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ عددان مركبان غير صفريان وكان $|ع_1| = |ع_2|$ ، سعة $(ع_1)$ + سعة $(ع_2) = \pi$ فإن : $ع_1$ = ...

(أ) $ع_2$ (ب) $\overline{ع_2}$ (جـ) $-ع_2$ (د) $-\overline{ع_2}$

(١٨) إذا كان : $|ع_1| = |ع_2|$ وسعة $(ع_1)$ + سعة $(ع_2)$ = صفر فإن : ....

(أ) $\overline{ع_1} = ع_2$ (ب) $ع_1 = ع_2$ (جـ) $ع_1 + ع_2 = 0$ (د) $\overline{ع_1} = \overline{ع_2}$

(١٩) إذا كان : ع عدد مركب سعته θ ، $|ع| = 1$ فإن سعة العدد المركب $\left(\frac{1+ع}{1+\overline{ع}}\right)$ تساوى ....

(أ) $-\theta$ (ب) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (جـ) θ (د) $\pi - \theta$

(٢٠) إذا كانت : $|ع| = |ع - 2|$ فإن الجزء الحقيقي للعدد ع يساوى ....

(أ) 1 (ب) -1 (جـ) -2 (د) 2

(٢١) إذا كان : ع عدد مركب وكان $|ع - 3| = |ع|$ وكانت السعة الأساسية للعدد (ع) تساوى $\frac{-\pi}{4}$ فإن : $|ع|$ = ...

(أ) $3\sqrt{2}$ (ب) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $2\sqrt{2}$ (د) 2

(٢٢) إذا كان : ع = س + ت ص عددًا مركبًا وكان $\left|\frac{ع - 3\,ت}{ع + 3\,ت}\right| = 1$ فإن : ع في مستوى أرجاند يقع ....

(أ) على محور السينات. (ب) على محور الصادات.

(جـ) في الربع الأول. (د) في الربع الثاني.

(٢٣) إذا كانت : ع = $\frac{ت}{جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°}$ فإن السعة الأساسية للعدد $(ع^{٦})$ تساوى ....

(أ) $\frac{٥\pi}{٦}$ (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢٤) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $(\bar{ع})$ = $\frac{-\pi}{٣}$ فإن السعة الأساسية للعدد (ع + ع ...

تساوى .... حيث ع عدد مركب.

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٢٥) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $(ع^{٤})$ تزيد عن ثلاثة أمثال السعة الأساسية للعدد (٥ ع) بمقدار $\frac{\pi}{٣}$ فإن السعة الأساسية للعدد $(\bar{ع})$ تساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{-\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{-\pi}{٣٣}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٢٦) إذا كان : ع عدد مركب وكان ع = جا ٢٠° (١ + ت ظتا ٢٠°) فإن :

أولاً : |ع| = ...

(أ) ١ (ب) جا ٢٠° (جـ) جتا ٢٠° (د) ظا ٢٠°

ثانيًا : السعة الأساسية للعدد (ع) تساوى ....

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٥٠° (د) ٧٠°

(٢٧) مقياس العدد المركب ع = (١ + ت ظا ١٥°) يساوى ....

(أ) جا ١٥° (ب) جتا ١٥° (جـ) ظا ١٥° (د) قا ١٥°

(٢٨) إذا كان : ع عدد مركب حيث ع + |ع| = ٨ + ١٢ ت

فإن : $|ع|^{٢}$ = ...

(أ) ١٢١ (ب) ١٤٤ (جـ) ١٦٩ (د) ٢٢٨

(٢٩) إذا كان : $\frac{جتا θ - ت جا θ}{جتا ٢θ - ت جا ٢θ}$ = ت فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(٣٠) إذا كان : س + ص ت = $\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ فإن : $س^{٢} + ص^{٢}$ = ...

(أ) $أ^{٢} + ب^{٢}$ (ب) $أ^{٢} - ب^{٢}$ (جـ) أ − ب (د) ١

(٣١) إذا كان : أ عددًا حقيقيًا فإن مرافق العدد $\frac{أ^{٢} + ت}{أ^{٢} + أ ت - ١}$ هو ....

(أ) أ − ت (ب) أ + ت (جـ) $\frac{أ^{٢} - ت}{أ^{٢} + أ ت - ١}$ (د) $\frac{أ^{٢} + ت}{أ^{٢} - أ ت - ١}$

(٣٢) إذا كانت : ع = $\left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\right)^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب

وكان ع = ١ فإن أصغر قيم ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ١

(٣٣) سعة العدد المركب [(١ − جتا θ) + ت جا θ] تساوى .... حيث ٠ < θ < π

(أ) $\frac{\pi}{٤} - \frac{θ}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٢} - \frac{θ}{٢}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢} - θ$ (د) $\frac{\pi}{٢} - \frac{θ}{٤}$

(٣٤) إذا كان : ع = ١ + جتا ٢θ + ت جا ٢θ فإن : |ع| = ...

حيث θ قياس زاوية حادة.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٢ جتا θ (د) ٢ جا ٢θ

(٣٥) إذا كانت : ع = ١ + جتا ٤٠° + ت جا ٤٠° فإن سعة (ع) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٩}$ (جـ) $\frac{\pi}{١٨}$ (د) $\frac{٢\pi}{٩}$

(٣٦) إذا كان : $ع_{١}$ = جتا ٧٠° + ت جا ٧٠° ، $ع_{٢}$ = جتا ٢٠° + ت جا ٢٠° فإن :

أولاً : سعة العدد $(ع_{١} + ع_{٢})$ = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٤٠°

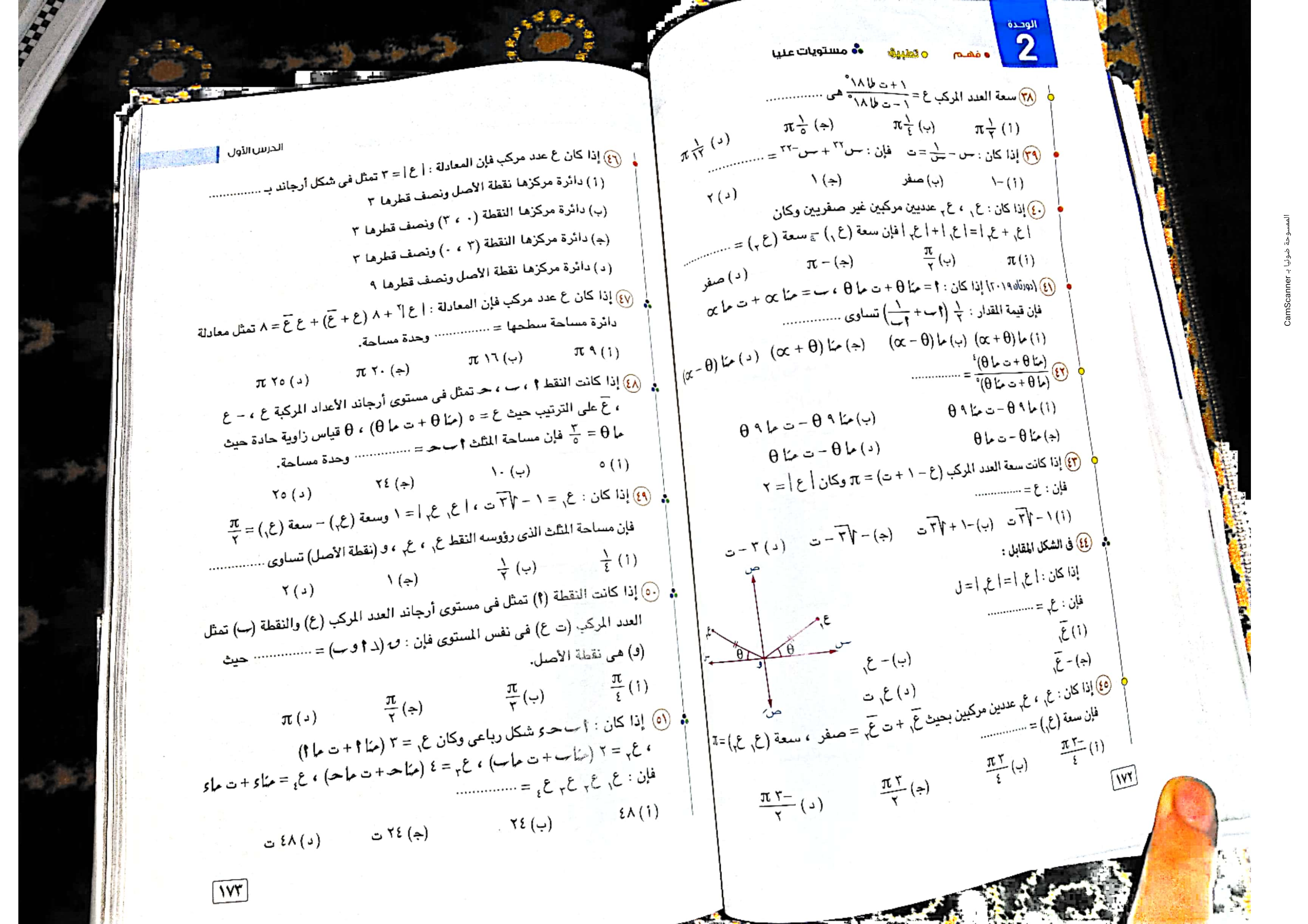
ثانيًا : مقياس العدد $(ع_{١} + ع_{٢})$ = ...

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) جتا ٢٠° (جـ) جا ٢٠° (د) $\sqrt{٢}$ (جتا ٢٠° + جا ٢٠°)

(٣٧) إذا كان : $ع_{١}$ = جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $ع_{٢}$ = جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$

فإن : سعة العدد $\left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)^{٧}$ هى ....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) π (جـ) $-\frac{١}{٢}\pi$ (د) ٢π



(٣٨) سعة العدد المركب $ع = \frac{١ + ت\ طا ١٨°}{١ - ت\ طا ١٨°}$ هى ....

(أ) $\frac{١}{٢}\pi$ (ب) $\frac{١}{٤}\pi$ (جـ) $\frac{١}{٥}\pi$ (د) $\frac{١}{١٢}\pi$

(٣٩) إذا كان : $س - \frac{١}{س} = ت$ فإن : $س^{٣٢} + س^{-٣٢} =$ ....

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٤٠) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين غير صفريين وكان $|ع_١ + ع_٢| = |ع_١| + |ع_٢|$ فإن سعة $(ع_١) -$ سعة $(ع_٢) =$ ....

(أ) π (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $-\pi$ (د) صفر

(٤١) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان : $أ = جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta$ ، $ب = جتا\ \alpha + ت\ جا\ \alpha$ فإن قيمة المقدار : $\frac{١}{٢}\left(أ ب + \frac{١}{أ ب}\right)$ تساوى ....

(أ) $جا(\theta + \alpha)$ (ب) $جا(\theta - \alpha)$ (جـ) $جتا(\theta + \alpha)$ (د) $جتا(\theta - \alpha)$

(٤٢) $\frac{(جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta)^٤}{(جا\ \theta + ت\ جتا\ \theta)^٥} =$ ....

(أ) $جا\ ٩\theta - ت\ جتا\ ٩\theta$ (ب) $جتا\ ٩\theta - ت\ جا\ ٩\theta$

(جـ) $جتا\ \theta - ت\ جا\ \theta$ (د) $جا\ \theta - ت\ جتا\ \theta$

(٤٣) إذا كانت سعة العدد المركب $(ع - ١ + ت) = \pi$ وكان $|ع| = ٢$ فإن : ع = ...

(أ) $١ - \sqrt{٣}\ ت$ (ب) $-١ + \sqrt{٣}\ ت$ (جـ) $-\sqrt{٣} - ت$ (د) $٣ - ت$

(٤٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = ل$

فإن : $ع_٢ =$ ....

(أ) $\bar{ع_١}$ (ب) $-ع_١$

(جـ) $-\bar{ع_١}$ (د) $ع_١\ ت$

(٤٥) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين بحيث $\bar{ع_١} + ت\ \bar{ع_٢} =$ صفر ، سعة $(ع_١ ع_٢) = \pi$ فإن سعة $(ع_١) =$ ....

(أ) $\frac{-٣\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٣\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $\frac{-٣\pi}{٢}$

(٤٦) إذا كان ع عدد مركب فإن المعادلة : $|ع| = ٣$ تمثل فى شكل أرجاند بـ ....

(أ) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٣

(ب) دائرة مركزها النقطة (٠ ، ٣) ونصف قطرها ٣

(جـ) دائرة مركزها النقطة (٣ ، ٠) ونصف قطرها ٣

(د) دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٩

(٤٧) إذا كان ع عدد مركب فإن المعادلة : $|ع|^٢ + ٨(ع + \bar{ع}) + ع\ \bar{ع} = ٨$ تمثل معادلة دائرة مساحة سطحها = ... وحدة مساحة.

(أ) ٩π (ب) ١٦π (جـ) ٢٠π (د) ٢٥π

(٤٨) إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ تمثل فى مستوى أرجاند الأعداد المركبة ع ، $-ع$ ، $\bar{ع}$ على الترتيب حيث $ع = ٥(جتا\ \theta + ت\ جا\ \theta)$ ، θ قياس زاوية حادة حيث $جا\ \theta = \frac{٣}{٥}$ فإن مساحة المثلث أ ب حـ = ... وحدة مساحة.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

(٤٩) إذا كان : $ع_١ = ١ - \sqrt{٣}\ ت$ ، $|ع_١ ع_٢| = ١$ وسعة $(ع_٢) -$ سعة $(ع_١) = \frac{\pi}{٢}$ فإن مساحة المثلث الذى رؤوسه النقط $ع_١$ ، $ع_٢$ ، و (نقطة الأصل) تساوى ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

(٥٠) إذا كانت النقطة (أ) تمثل فى مستوى أرجاند العدد المركب (ع) والنقطة (ب) تمثل العدد المركب (ت ع) فى نفس المستوى فإن : ق(∠ أ و ب) = ... حيث (و) هى نقطة الأصل.

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٥١) إذا كان : أ ب حـ ء شكل رباعى وكان $ع_١ = ٣(جتا\ أ + ت\ جا\ أ)$ ، $ع_٢ = ٢(جتا\ ب + ت\ جا\ ب)$ ، $ع_٣ = ٤(جتا\ حـ + ت\ جا\ حـ)$ ، $ع_٤ = جتا\ ء + ت\ جا\ ء$ فإن : $ع_١\ ع_٢\ ع_٣\ ع_٤ =$ ....

(أ) ٤٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٤ ت (د) ٤٨ ت

٢٦ إذا كان : ع عدد مركب ، $|ع| = ع + ٣ - ٢ ت$ فأوجد : ع

٢٧ إذا كان : سعة $(ع + ت) = \frac{\pi}{٤}$ ، سعة $(ع - ٣) = \frac{٣\pi}{٤}$

أوجد : ع على الصورة الجبرية حيث ع عدد مركب.

٢٨ إذا كان : سعة $ع_١ = \frac{\pi}{٣}$ ، وسعة $ع_٢ = \frac{٣\pi}{٤}$ ، وسعة $ع_٣ = \frac{\pi}{٦}$ أوجد :

① سعة $(ع_١^٢ ع_٢^٣)$ ② سعة $(٢ ع_١ . ع_٣)$

③ سعة $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$ ④ سعة $(ع_٣^٦)$

٢٩ إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = ١$ ، سعة $(ع_١ ع_٢^٣) = ٨١°$ ، سعة $\left(\frac{ع_١}{ع_٢}\right) = ٣٣°$

أوجد على صورة : س + ص ت العدد : $(ع_١^{١٥} ع_٢^{١٥})$

٣٠ إذا كان $|ع_١| = |ع_٢| = ١$ ، سعة $(ع_١ \times ع_٢^٥)$ تساوى $١٠٥°$ ،

سعة $(ع_١ \div ع_٢)$ تساوى $٣٣°$ وكان س + ص ت $= ع_١^{١٤} + ع_٢^{١٥}$

فأوجد قيمة كلًا من : س ، ص

« -١ ، -١ »

٣١ اختصر لأبسط صورة : $\frac{\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٩} + ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٩}\right)^٣ \left(\text{جتا}\frac{\pi}{٦} + ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٦}\right)^٤}{\left(\text{جتا}\frac{\pi}{٣} - ت\ \text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)^٤}$

« $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ »

٣٢ أثبت أن : $\frac{(١ + ت)^٥ \times (\text{جتا}\theta + ت\ \text{جا}\theta)}{(-١ + ت)^٤} = \sqrt{٢}\left(\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} + \theta\right)\right)$

٣٣ إذا كان : $ع_١ = \text{جتا}\ ٧٥° + ت\ \text{جا}\ ٧٥°$ ، $ع_٢ = \text{جتا}\ ١٥° + ت\ \text{جا}\ ١٥°$

أوجد الصورة المثلثية للعدد : $ع_١ + ع_٢$

« $\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ ٤٥° + ت\ \text{جا}\ ٤٥°)$ »

٣٤ إذا كان : $ع = \text{جتا}\theta + ت\ \text{جا}\theta$ ، $ع_١ = \frac{ع + ١}{ع - ١}$ أثبت أن : $ع_١ = ت\ \text{ظتا}\frac{\theta}{٢}$

٣٥ إذا كانت : $\theta \in]-\pi ، \pi[$ أوجد مقياس وسعة العدد : $ع = ١ + \text{جتا}\theta + ت\ \text{جا}\theta$

٣٦ إذا كان : $س + \frac{١}{س} = ٢\ \text{جتا}\theta$ أثبت أن : $س^ن - \frac{١}{س^ن} = \pm ٢ ت\ \text{جا}(ن\theta)$

٣٧ إذا كان : $ع_١ = ٤\ (\text{جتا}\ ٢\theta + ت\ \text{جا}\ ٢\theta)$ ، $ع_٢ = ١٣\ (\text{جتا}\theta - ت\ \text{جا}\theta)$

حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ، $\text{ظا}\theta = \frac{٥}{١٢}$

فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من : $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٢^٢$

٣٨ إذا كان : $ع = ٥\ (\text{جتا}\theta + ت\ \text{جا}\theta)$ حيث $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، $\text{جتا}\theta = \frac{٣}{٥}$

فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من : $ع^{-١}$ ، $ع^{-٢}$ ، $(\bar{ع})^{-٢}$

٣٩ أثبت أن : $\left(\frac{\text{جتا}\frac{\theta}{٢} - ت\ \text{جا}\frac{\theta}{٢}}{\text{جا}\frac{\theta}{٢} - ت\ \text{جتا}\frac{\theta}{٢}}\right)^ن = \text{جتا}\ ن\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) + ت\ \text{جا}\ ن\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

٤٠ (دور ثان ٢٠٠٢) بوضع $ى = \frac{\pi}{٢} - ٢\theta$ أو بأية طريقة أخرى ، حيث $ت^٢ = -١$

أثبت أن : $\left(\frac{١ + \text{جا}\ ى + ت\ \text{جتا}\ ى}{١ + \text{جا}\ ى - ت\ \text{جتا}\ ى}\right)^ن = \text{جتا}\ ن\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right) + ت\ \text{جا}\ ن\left(\frac{\pi}{٢} - ى\right)$

٤١ أثبت أن : $ت\left((١ - ت)^ن - (١ + ت)^ن\right) = ٢^{\frac{ن + ٢}{٢}} \text{جا}\frac{ن\pi}{٤}$

٤٢ إذا كان : $ع_١ \in ك$ ، $ع_٢ \in ك$

فأثبت أن : $|ع_١ + ع_٢|^٢ + |ع_١ - ع_٢|^٢ = ٢\ (|ع_١|^٢ + |ع_٢|^٢)$

٤٣ إذا كان س + ت ص $= (أ + ب ت)^ن$ فأثبت أن : $س^٢ + ص^٢ = (أ^٢ + ب^٢)^ن$

٤٤ أوجد باستخدام الأعداد المركبة قيمة : $\frac{\text{جا}\ ٥\ س}{\text{جا}\ س}$ بدلالة جتا س

٤٥ أوجد $(١ + ت)^ن$ على كل من الصورتين الجبرية والمثلثية

ومن ذلك استنتج قيمتي : أ ، ب إذا كان أ + ب ت $= (١ + ت)^ن$

مسائل تقيس مهارات التفكير

٤٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ثلاثة أعداد مركبة
بحيث $|ع_١| = |ع_٢| = |ع_٣| = \left|\frac{١}{ع_١} + \frac{١}{ع_٢} + \frac{١}{ع_٣}\right| = ١$
وكان $|ع_١ + ع_٢ + ع_٣| = أ$ فإن ....

(أ) $أ = ١$ (ب) $أ > ١$ (جـ) $أ < ٣$ (د) $أ = ٣$

② النقط التى تمثل الأعداد المركبة ع ، ت ع ، ع + ت ع فى مستوى أرجاند هى رؤوس Δ أ ب حـ فإن مساحة Δ أ ب حـ = ...

(أ) $|ع|$ (ب) $|ع|^٢$ (جـ) $٢|ع|^٢$ (د) $\frac{١}{٢}|ع|^٢$

③ فى الشكل المقابل :




إذا كان : $|ع_١| = |ع_٢| = \sqrt{٣}$
فإن : $|ع_١ + ع_٢| =$ ....

(أ) ٢ (ب) $٢\sqrt{٣}$
(جـ) $\sqrt{٦}$ (د) ٣

④ إذا كان : $(٢\sqrt{٢} + ت)^{٥٠} = ٣^{٤٩}(أ + ب ت)$ فإن : $أ^٢ + ب^٢ =$ ....

(أ) ٩ (ب) ٢٥ (جـ) ٤٩ (د) ٥٠

⑤ إذا كان : $ع_١ = ٤\sqrt{٣}$ (جتا ١٤٠° + ت جا ١٤٠°) ، $ع_٢ = ٤$ (جتا ٢٣٠° + ت جا ٢٣٠°)
فإن : $|ع_١ - ع_٢| =$ ....

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) $١٢\sqrt{٢}$

⑥ إذا كان : ع عدد مركب وكان $|ع - ٤| < |ع - ٢|$ فإن الجزء الحقيقى للعدد المركب يمكن أن يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑦ إذا كان $ع_ن =$ جتا $\frac{\pi}{٢^ن}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢^ن}$
فإن : $(ع_١ \times ع_٢ \times ع_٣ \times ....$ إلى ∞) تساوى ....

(أ) ١- (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ∞

الدرس 2

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

تمهيد

قبل دراسة الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) يجب أن نتعرف على بعض المتسلسلات التى يعرف كل منها بمتسلسلة ماكلورين أو مفكوك ماكلورين والتى تستخدم فى التعبير عن الدالة بصورة متسلسلة من قوى متغير هذه الدالة وفيما يلى نورد مفكوك ماكلورين لبعض الدوال التى سوف تستخدم فى دراسة العدد المركب فى صورته الأسية.

- دالة الجيب : ص = جا س : جا س = $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-١)^ن}{\underline{|٢ن + ١}} س^{٢ن+١}$

أى أن : جا س = $\frac{س}{\underline{|١}} - \frac{س^٣}{\underline{|٣}} + \frac{س^٥}{\underline{|٥}} -$ ....

- دالة جيب التمام : ص = جتا س : جتا س = $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{(-١)^ن}{\underline{|٢ن}} س^{٢ن}$

أى أن : جتا س = $١ - \frac{س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{س^٤}{\underline{|٤}} -$ ....

- الدالة الأسية : ص = $هـ^س$: $هـ^س = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{س^ن}{\underline{|ن}}$

أى أن : $هـ^س = ١ + \frac{س}{\underline{|١}} + \frac{س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{س^٣}{\underline{|٣}} +$ ....

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

بملاحظة أن : $هـ^{ت س} = ١ + \frac{ت س}{\underline{|١}} + \frac{ت^٢ س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{ت^٣ س^٣}{\underline{|٣}} + \frac{ت^٤ س^٤}{\underline{|٤}} +$ ....

$= ١ + \frac{ت س}{\underline{|١}} - \frac{س^٢}{\underline{|٢}} - \frac{ت س^٣}{\underline{|٣}} + \frac{س^٤}{\underline{|٤}} -$ ....

$= \left(١ - \frac{س^٢}{\underline{|٢}} + \frac{س^٤}{\underline{|٤}} - ......\right) + ت\left(\frac{س}{\underline{|١}} - \frac{س^٣}{\underline{|٣}} + ...\right)$

∴ $هـ^{ت س} =$ جتا س + ت جا س

أي أن: العدد المركب ع = س + ت ص = ل (جتا θ + ت جا θ)

يمكن كتابته على الصورة [ع = ل $هـ^{\theta ت}$] وتسمى هذه الصورة بالصورة الأسية للعدد المركب ع حيث θ بالتقدير الدائرى.

مثال ①

ضع كلًا من الأعداد المركبة الآتية على الصورة الأسية (صورة أويلر) :

① $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\,ت$ ② $ع_2 = \frac{1}{1 + ت}$

الحل

① $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\,ت$ ∴ س = ١ ، ص = $-\sqrt{3}$

، ∵ ل = $|ع_1| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ∴ ل = $\sqrt{1 + 3} = 2$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ $ع_1$ يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-1}\frac{ص}{س} = ظا^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$ ∴ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

∴ $ع_1 = 2\,هـ^{-\frac{\pi}{3}ت}$ (الصورة الأسية)

② $ع_2 = \frac{1}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{1-ت}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ت$ ∴ س = $\frac{1}{2}$ ، ص = $-\frac{1}{2}$

، ∵ ل = $|ع_2| = \sqrt{س^2 + ص^2}$ ∴ ل = $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ $ع_2$ يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-1}\left(\frac{-1}{2} \div \frac{1}{2}\right) = ظا^{-1}(-1)$

∴ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ∴ $ع_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,هـ^{-\frac{\pi}{4}ت}$ (الصورة الأسية)

حل آخر :

∵ $ع_2 = \frac{1}{1+ت}$ وبفرض أن ١ + ت = ع

∴ $|ع| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ ع يقع فى الربع الأول.

∴ $\theta = ظا^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

∴ $ع = \sqrt{2}\,هـ^{\frac{\pi}{4}ت}$

∴ $ع_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,هـ^{\frac{\pi}{4}ت}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,هـ^{-\frac{\pi}{4}ت}$

تذكر أن : $\frac{1}{أ^ن} = أ^{-ن}$ بشرط أ ≠ ٠ .

مثال ②

ضع على الصورة المثلثية العدد المركب $ع = \frac{2(1+ت)}{1-ت}$ ثم اكتب الصورة الأسية للعدد ع

الحل

$ع = \frac{2(1+ت)}{1-ت} \times \frac{1+ت}{1+ت} = \frac{2(1+ت)^2}{1+1} = \frac{\cancel{2}(1 + 2ت + ت^2)}{\cancel{2}} = 2ت$

∴ ع = ٢ × ت = ٢ $\left(جتا\frac{\pi}{2} + ت\,جا\frac{\pi}{2}\right)$ (الصورة المثلثية)

∴ ل = |ع| = ٢ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ∴ $ع = 2\,هـ^{\frac{\pi}{2}ت}$ (الصورة الأسية)

ملاحظة

$ت = جتا\frac{\pi}{2} + ت\,جا\frac{\pi}{2} = هـ^{\frac{\pi}{2}ت}$ ، $-ت = جتا\frac{-\pi}{2} + ت\,جا\frac{-\pi}{2} = هـ^{\frac{-\pi}{2}ت}$

$1 = جتا\,0 + ت\,جا\,0 = هـ^{صفر}$ ، $-1 = جتا\,\pi + ت\,جا\,\pi = هـ^{\pi ت}$

مثال ③

ضع على الصورة الأسية (صورة أويلر) العدد $ع = 4\left(جتا\frac{\pi}{3} - ت\,جا\frac{\pi}{3}\right)$

الحل

∵ $ع = 4\left(جتا\frac{\pi}{3} - ت\,جا\frac{\pi}{3}\right)$ ∴ |ع| = ل = ٤

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ العدد ع يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

∴ $ع = 4\left(جتا\left(\frac{-\pi}{3}\right) + ت\,جا\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$ الصورة المثلثية.

∴ $ع = ل\,هـ^{\theta ت} = 4\,هـ^{\frac{-\pi}{3}ت}$ (الصورة الأسية)

مثال ٤

أوجد الصورة الجبرية لكل مما يأتى : ① $ع = \sqrt{٣}\, هـ^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$ ② $ع = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت}$

الحل

① $ع = \sqrt{٣}\, هـ^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$ $\therefore ل = |ع| = \sqrt{٣}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٣} - ٢\pi = -\frac{\pi}{٣}$

$\therefore ع = ل(جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta) = \sqrt{٣}\left(جتا\left(\frac{-\pi}{٣}\right) + ت\, جا\left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right)$ (الصورة المثلثية)

$\therefore ع = \sqrt{٣}\left(\frac{١}{٢} + ت \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}ت$ (الصورة الجبرية)

② $ع = هـ^{٣ + \frac{\pi}{٦}ت} = هـ^{٣} \times هـ^{\frac{\pi}{٦}ت}$ $\therefore ل = |ع| = هـ^{٣}$ ، $\theta = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore ع = ل(جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta) = هـ^{٣}\left(جتا\,\frac{\pi}{٦} + ت\, جا\,\frac{\pi}{٦}\right)$ (الصورة المثلثية)

$\therefore ع = هـ^{٣}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{١}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}هـ^{٣} + \frac{١}{٢}هـ^{٣}ت$ (الصورة الجبرية)

مثال ٥

أثبت أن : ① $جتا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}}{٢}$ ② $جا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{٢ت}$

③ $هـ^{٣ + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = (١ - هـ)(١ + هـ + هـ^{٢})$

الحل

$\because هـ^{\theta ت} = جتا\,\theta + ت\, جا\,\theta$ (١)

$\therefore هـ^{-\theta ت} = جتا(-\theta) + ت\, جا(-\theta)$

$\therefore هـ^{-\theta ت} = جتا\,\theta - ت\, جا\,\theta$ (٢)

① بجمع (١) ، (٢) : $\therefore هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} = ٢\, جتا\,\theta$ $\therefore جتا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}}{٢}$

② بطرح (٢) من (١) : $\therefore هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت} = ٢ت\, جا\,\theta$ $\therefore جا\,\theta = \frac{هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}}{٢ت}$

③ $\because هـ^{٣ + \pi ت} = هـ^{٣} \times هـ^{\pi ت} = هـ^{٣}(جتا\,\pi + ت\, جا\,\pi) = هـ^{٣}(-١ + ٠) = -هـ^{٣}$

، $\because هـ^{-\pi ت} = جتا(-\pi) + ت\, جا(-\pi) = -١ + صفر = -١$

$\therefore هـ^{٣ + \pi ت} - هـ^{-\pi ت} = -هـ^{٣} + ١ = ١ - هـ^{٣} = (١ - هـ)(١ + هـ + هـ^{٢})$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية

① إذا كان : $ع_{١} = ل_{١}\, هـ^{\theta_{١}ت}$ ، $ع_{٢} = ل_{٢}\, هـ^{\theta_{٢}ت}$ فإن :

(١) $ع_{١}\, ع_{٢} = ل_{١}\, هـ^{\theta_{١}ت} \times ل_{٢}\, هـ^{\theta_{٢}ت} = ل_{١}\, ل_{٢}\, هـ^{\theta_{١}ت + \theta_{٢}ت}$

أى أن : $ع_{١}\, ع_{٢} = ل_{١}\, ل_{٢}\, هـ^{(\theta_{١} + \theta_{٢})ت}$

(٢) $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{ل_{١}\, هـ^{\theta_{١}ت}}{ل_{٢}\, هـ^{\theta_{٢}ت}} = \frac{ل_{١}}{ل_{٢}}\, هـ^{\theta_{١}ت - \theta_{٢}ت}$ أى أن : $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{ل_{١}}{ل_{٢}}\, هـ^{(\theta_{١} - \theta_{٢})ت}$

② لأى عدد $ع = ل\, هـ^{\theta ت}$ يكون $ع^{ن} = ل^{ن}\, هـ^{ن\theta ت}$ حيث $ن \in ص$

مثال ٦

إذا كان : $ع_{١} = ١٠\,(جتا\, ٣١٠^{\circ} + ت\, جا\, ٣١٠^{\circ})$ ، $ع_{٢} = ٥\,(جتا\, ١٠٠^{\circ} + ت\, جا\, ١٠٠^{\circ})$

فأوجد الصورة الأسية لكل من : ① $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ ② $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}}$

الحل

① $\because ع_{١} = ١٠\,(جتا\, ٣١٠^{\circ} + ت\, جا\, ٣١٠^{\circ}) = ١٠\,(جتا\,(-٥٠^{\circ}) + ت\, جا\,(-٥٠^{\circ}))$

، $ع_{٢} = ٥\,(جتا\, ١٠٠^{\circ} + ت\, جا\, ١٠٠^{\circ})$

$\therefore \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{١٠}{٥}\,[جتا\,(-٥٠^{\circ} - ١٠٠^{\circ}) + ت\, جا\,(-٥٠^{\circ} - ١٠٠^{\circ})]$

$= ٢\,(جتا\,(-١٥٠^{\circ}) + ت\, جا\,(-١٥٠^{\circ}))$

وقيمة الزاوية -١٥٠° بالتقدير الدائرى $= \frac{-١٥٠^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} \times \pi = \frac{-٥}{٦}\pi$

$\therefore \frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = ٢\left(جتا\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right) + ت\, جا\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right)\right)$

والصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = ٢\, هـ^{\frac{-٥\pi}{٦}ت}$

② الصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{ع_{٢}}{ع_{١}} = \left(\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}\right)^{-١} = \frac{١}{٢}\, هـ^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$

مثال ٤

أوجد الصورة الجبرية لكل مما يأتى: (١) $\text{ع} = \sqrt{٣}\,\text{هـ}^{\frac{٥\pi}{٣}\text{ت}}$ (٢) $\text{ع} = \text{هـ}^{٢ + \frac{\pi}{٦}\text{ت}}$

الحل

(١) $\text{ع} = \sqrt{٣}\,\text{هـ}^{\frac{٥\pi}{٣}\text{ت}}$

$\therefore \text{ل} = |\text{ع}| = \sqrt{٣}$ ، $\theta = \frac{٥\pi}{٣} - ٢\pi = -\frac{\pi}{٣}$

$\therefore \text{ع} = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta) = \sqrt{٣}\left(\text{جتا}\left(\frac{-\pi}{٣}\right) + \text{ت}\,\text{جا}\left(\frac{-\pi}{٣}\right)\right)$ (الصورة المثلثية)

$\therefore \text{ع} = \sqrt{٣}\left(\frac{١}{٢} + \text{ت} \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٣}{٢}\,\text{ت}$ (الصورة الجبرية)

(٢) $\text{ع} = \text{هـ}^{٢ + \frac{\pi}{٦}\text{ت}} = \text{هـ}^{٢} \times \text{هـ}^{\frac{\pi}{٦}\text{ت}}$ $\therefore \text{ل} = |\text{ع}| = \text{هـ}^{٢}$ ، $\theta = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore \text{ع} = \text{ل}\,(\text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta) = \text{هـ}^{٢}\left(\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦} + \text{ت}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٦}\right)$ (الصورة المثلثية)

$\therefore \text{ع} = \text{هـ}^{٢}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \text{ت} \times \frac{١}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{هـ}^{٢} + \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{٢}\,\text{ت}$ (الصورة الجبرية)

مثال ٥

أثبت أن: (١) $\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}}{٢}$ (٢) $\text{جا}\,\theta = \frac{\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}}{٢\text{ت}}$

(٣) $\text{هـ}^{٣+\pi\text{ت}} - \text{هـ}^{-\pi\text{ت}} = (١ - \text{هـ})(١ + \text{هـ} + \text{هـ}^{٢})$

الحل

$\because \text{هـ}^{\theta\text{ت}} = \text{جتا}\,\theta + \text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ (١)

$\therefore \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = \text{جتا}(-\theta) + \text{ت}\,\text{جا}(-\theta)$

$\therefore \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = \text{جتا}\,\theta - \text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ (٢)

(١) بجمع (١) ، (٢): $\therefore \text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = ٢\,\text{جتا}\,\theta$ $\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{\text{هـ}^{\theta\text{ت}} + \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}}{٢}$

(٢) بطرح (٢) من (١): $\therefore \text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}} = ٢\text{ت}\,\text{جا}\,\theta$ $\therefore \text{جا}\,\theta = \frac{\text{هـ}^{\theta\text{ت}} - \text{هـ}^{-\theta\text{ت}}}{٢\text{ت}}$

(٣) $\because \text{هـ}^{٣+\pi\text{ت}} = \text{هـ}^{٣} \times \text{هـ}^{\pi\text{ت}} = \text{هـ}^{٣}(\text{جتا}\,\pi + \text{ت}\,\text{جا}\,\pi) = \text{هـ}^{٣}(-١ + ٠) = -\text{هـ}^{٣}$

، $\because \text{هـ}^{-\pi\text{ت}} = \text{جتا}(-\pi) + \text{ت}\,\text{جا}(-\pi) = -١ + \text{صفر} = -١$

$\therefore \text{هـ}^{٣+\pi\text{ت}} - \text{هـ}^{-\pi\text{ت}} = -\text{هـ}^{٣} + ١ = ١ - \text{هـ}^{٣} = (١ - \text{هـ})(١ + \text{هـ} + \text{هـ}^{٢})$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية

(١) إذا كان: $\text{ع}_{١} = \text{ل}_{١}\,\text{هـ}^{\theta_{١}\text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٢} = \text{ل}_{٢}\,\text{هـ}^{\theta_{٢}\text{ت}}$ فإن:

(١) $\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢} = \text{ل}_{١}\,\text{هـ}^{\theta_{١}\text{ت}} \times \text{ل}_{٢}\,\text{هـ}^{\theta_{٢}\text{ت}} = \text{ل}_{١}\,\text{ل}_{٢}\,\text{هـ}^{\theta_{١}\text{ت} + \theta_{٢}\text{ت}}$

أى أن: $\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢} = \text{ل}_{١}\,\text{ل}_{٢}\,\text{هـ}^{(\theta_{١} + \theta_{٢})\text{ت}}$

(٢) $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{\text{ل}_{١}\,\text{هـ}^{\theta_{١}\text{ت}}}{\text{ل}_{٢}\,\text{هـ}^{\theta_{٢}\text{ت}}} = \frac{\text{ل}_{١}}{\text{ل}_{٢}}\,\text{هـ}^{\theta_{١}\text{ت} - \theta_{٢}\text{ت}}$ أى أن: $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{\text{ل}_{١}}{\text{ل}_{٢}}\,\text{هـ}^{(\theta_{١} - \theta_{٢})\text{ت}}$

(٢) لأى عدد $\text{ع} = \text{ل}\,\text{هـ}^{\theta\text{ت}}$ يكون $\text{ع}^{\text{ن}} = \text{ل}^{\text{ن}}\,\text{هـ}^{\text{ن}\theta\text{ت}}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}$

مثال ٦

إذا كان: $\text{ع}_{١} = ١٠\,(\text{جتا}\,٣١٠° + \text{ت}\,\text{جا}\,٣١٠°)$ ، $\text{ع}_{٢} = ٥\,(\text{جتا}\,١٠٠° + \text{ت}\,\text{جا}\,١٠٠°)$

أوجد الصورة الأسية لكل من: (١) $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$ (٢) $\frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}}$

الحل

(١) $\because \text{ع}_{١} = ١٠\,(\text{جتا}\,٣١٠° + \text{ت}\,\text{جا}\,٣١٠°) = ١٠\,(\text{جتا}\,-٥٠° + \text{ت}\,\text{جا}\,-٥٠°)$

، $\text{ع}_{٢} = ٥\,(\text{جتا}\,١٠٠° + \text{ت}\,\text{جا}\,١٠٠°)$

$\therefore \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{١٠}{٥}\left[\text{جتا}(-٥٠° - ١٠٠°) + \text{ت}\,\text{جا}(-٥٠° - ١٠٠°)\right]$

$= ٢\,(\text{جتا}(-١٥٠°) + \text{ت}\,\text{جا}(-١٥٠°))$

وقيمة الزاوية $-١٥٠°$ بالتقدير الدائرى $= \frac{-١٥٠°}{١٨٠°} \times \pi = \frac{-٥}{٦}\pi$

$\therefore \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = ٢\left(\text{جتا}\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right) + \text{ت}\,\text{جا}\left(\frac{-٥\pi}{٦}\right)\right)$

والصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{-٥\pi}{٦}\text{ت}}$

(٢) الصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار المركب $\frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} = \left(\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}\right)^{-١} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٥\pi}{٦}\text{ت}}$

مثال ٧

ضع العدد المركب $ع = \left(\sqrt{٣} + ت\right)^{٤}$ على صورة أويلر.

الحل

نضع $ع_١ = \sqrt{٣} + ت$ على الصورة المثلثية حيث $س = \sqrt{٣}$ ، $ص = ١$

$\therefore |ع_١| = \sqrt{٣ + ١} = \sqrt{٤} = ٢$

، $\because س > ٠$ ، $ص > ٠$ $\therefore ع_١$ يقع فى الربع الأول.

$\therefore θ_١ = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{π}{٦}$

$\therefore \sqrt{٣} + ت = ٢\left(جتا\frac{π}{٦} + ت\ جا\frac{π}{٦}\right)$ وهى الصورة المثلثية.

$\therefore \left(\sqrt{٣} + ت\right)^{٤} = ٢^{٤}\left(جتا\frac{π}{٦} × ٤ + ت\ جا\frac{π}{٦} × ٤\right)$

$\therefore \left(\sqrt{٣} + ت\right)^{٤} = ١٦\left(جتا\frac{٢π}{٣} + ت\ جا\frac{٢π}{٣}\right) = ١٦\ هـ^{\frac{٢π}{٣}ت}$ «صورة أويلر»

حل آخر: نفرض أن $ع_١ = \sqrt{٣} + ت$ $\therefore |ع_١| = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

، $θ = ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{π}{٦}$ $\therefore ع_١ = ٢\left(جتا\frac{π}{٦} + ت\ جا\frac{π}{٦}\right) = ٢\ هـ^{\frac{π}{٦}ت}$

$\therefore ع = ع_١^{٤} = ٢^{٤}\ هـ^{\frac{٤π}{٦}ت} = ١٦\ هـ^{\frac{٢π}{٣}ت}$

مثال ٨

ضع كلًا من العددين: $\sqrt{٢}\ ت$ ، $١ + ت$ على الصورة المثلثية

ثم أوجد الصورة الأسية وكذلك الصورة الجبرية للمقدار: $\left(\frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت}\right)^{٦}$

الحل

$\because ت = \left(جتا\frac{π}{٢} + ت\ جا\frac{π}{٢}\right)$ $\therefore \sqrt{٢}\ ت = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{π}{٢} + ت\ جا\frac{π}{٢}\right)$

، بفرض أن $ع = ١ + ت$ $\therefore س = ١$ ، $ص = ١$

، $ل = |ع| = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$

، $\because س > ٠$ ، $ص > ٠$ $\therefore ع$ يقع فى الربع الأول

$\therefore θ = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}(١) = \frac{π}{٤}$ $\therefore ١ + ت = \sqrt{٢}\left(جتا\frac{π}{٤} + ت\ جا\frac{π}{٤}\right)$

$\therefore \frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت} = \frac{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{π}{٢} + ت\ جا\frac{π}{٢}\right)}{\sqrt{٢}\left(جتا\frac{π}{٤} + ت\ جا\frac{π}{٤}\right)} = جتا\left(\frac{π}{٢} - \frac{π}{٤}\right) + ت\ جا\left(\frac{π}{٢} - \frac{π}{٤}\right)$

$\therefore \frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت} = جتا\frac{π}{٤} + ت\ جا\frac{π}{٤}$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{٢}\ ت}{١ + ت}\right)^{٦} = جتا\frac{٣π}{٢} + ت\ جا\frac{٣π}{٢} = جتا\left(\frac{-π}{٢}\right) + ت\ جا\left(-\frac{π}{٢}\right) = هـ^{\frac{-π}{٢}ت}$ «الصورة الأسية»

، الصورة الجبرية للمقدار $= جتا(-٩٠°) + ت\ جا(-٩٠°) = -ت$

تمارين 7

على الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

اختبار تفاعلي

• فهم • تطبيق • مستويات عليا | من أسئلة الكتاب المدرسي

1 ضع على الصورة الأسية (صورة أويلر) كلاً مما يأتى :

(1) -2ت (2) 7 (3) $2\sqrt{3} - 2$ت

(4) $\frac{8}{\sqrt{3} - ت}$ (5) $\frac{4}{1 + \sqrt{3}ت}$

2 أوجد الصورة الجبرية للعدد ع فى كل مما يأتى :

(1) ع $= 2$ هـ$^{\pi ت}$ (2) ع $= \sqrt{2}$ هـ$^{-\frac{\pi}{2}ت}$ (3) ع $= 8$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$

3 عبر عن كلًا من الأعداد الآتية بالصورة الأسية :

(1) $\frac{1}{2}$ (جتا $60°$ + ت جا $60°$)

(2) -4 (جتا $\frac{7\pi}{6}$ + ت جا $\frac{7\pi}{6}$)

(3) -2 (جا $\frac{\pi}{3}$ − ت جتا $\frac{\pi}{3}$)

(4) $\sqrt{2}$ (− جا $\frac{3\pi}{4}$ + ت جتا $\frac{3\pi}{4}$)

4 إذا كانت : ع $= \sqrt{6} - 3\sqrt{2}$ ت فأوجد الصورة المثلثية والأسية لكل من :

(1) ع (2) $\bar{ع}$ (3) − ع

(4) − $\bar{ع}$ (5) $\frac{1}{ع}$ (6) $\frac{1}{\bar{ع}}$

5 إذا كانت : $\theta \in]0 , \frac{\pi}{2}[$ فاكتب كلًا من الأعداد المركبة الآتية بالصورة الأسية :

(1) ل (جتا θ − ت جا θ) (2) − ل (جتا θ + ت جا θ)

(3) 6 (− جتا θ + ت جا θ) (4) 2 (− جا θ + ت جتا θ)

(5) − ل (جا θ + ت جتا θ) (6) $\frac{1}{\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta}$

6 ضع العدد ع فى كل مما يأتى على الصورة س + ت ص ثم أوجد الصورة المثلثية والصورة الأسية له :

(1) ع $= \frac{2 - 2ت}{2ت}$ (2) ع $= \frac{2\sqrt{3}ت}{1 + ت}$ (3) ع $= \frac{(ت - 1)(3 - 4ت)}{(1 + 2ت)^2}$

7 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(1) هـ$^{2\pi ت}$ = ... (على الصورة الجبرية)

(أ) $1 +$ ت (ب) $1 -$ ت (ج) 1 (د) -1

(2) 3ت = ... (على الصورة الأسية)

(أ) هـ$^{\frac{-\pi}{2}ت}$ (ب) 3 هـ$^{\frac{\pi}{2}ت}$ (ج) 3 هـ$^{\frac{-\pi}{2}ت}$ (د) 3 هـ$^{\pi ت}$

(3) الصورة الجبرية للعدد المركب ع $= \sqrt{2}$ هـ$^{\frac{\pi}{4}ت}$ هى ....

(أ) $1 +$ ت (ب) $1 -$ ت (ج) $-1 +$ ت (د) $-1 -$ ت

(4) $\left(\text{جتا}\,\frac{5\pi}{3} + ت\,\text{جا}\,\frac{5\pi}{3}\right)^4$ = هـ$^{..............}$

(أ) $\frac{2\pi}{3}$ ت (ب) $-\frac{1}{3}\pi$ ت (ج) $\frac{1}{3}\pi$ ت (د) $\frac{-5}{3}\pi$ ت

(5) إذا كان : ع = جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$ فإن : ع + 1 = ... (على الصورة الأسية)

(أ) هـ$^{\frac{\pi}{6}ت}$ (ب) $\sqrt{3}$ هـ$^{\frac{\pi}{6}ت}$ (ج) $\sqrt{3}$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$ (د) $(\sqrt{2} + 1)$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$

(6) من الشكل المقابل :

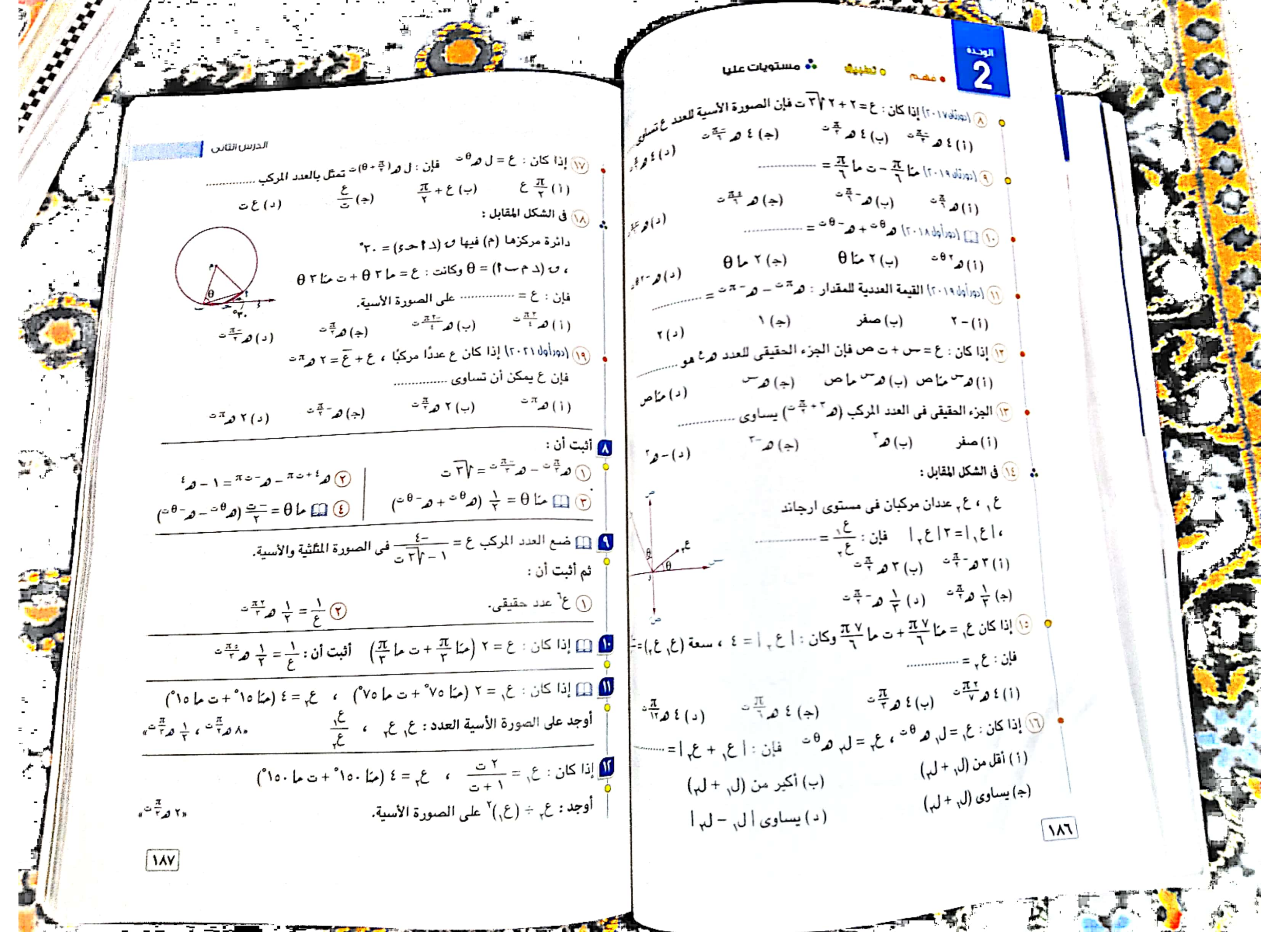
العدد ع على الصورة الأسية = ...

(أ) هـ$^{\frac{13}{18}\pi ت}$ (ب) هـ$^{\frac{-13}{18}\pi ت}$ (ج) 3 هـ$^{\frac{13}{18}\pi ت}$ (د) 3 هـ$^{\frac{-13}{18}\pi ت}$

ص، س، س′، ص′، ع، 3، °50، و

(7) إذا كان : ع = − 1 − ت فإن الصورة الأسية للعدد ع = ...

(أ) هـ$^{\frac{3\pi}{4}ت}$ (ب) هـ$^{\frac{\pi 5}{4}ت}$ (ج) $\sqrt{2}$ هـ$^{-\frac{3\pi}{4}ت}$ (د) $\sqrt{3}$ هـ$^{225° ت}$



الوحدة **2** • مهم • تطبيق • مستويات عليا

٨ (دور ثان ٢٠١٧) إذا كان: ع $= ٢ + ٢\sqrt{٣}$ ت فإن الصورة الأسية للعدد ع تساوي ......

(أ) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (ب) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (ج) ٤ هـ$^{-\frac{\pi}{٦}ت}$ (د) ٤ هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

٩ (دور ثان ٢٠١٩) جتا $\frac{\pi}{٦}$ − ت جا $\frac{\pi}{٦}$ = ...

(أ) هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (ب) هـ$^{-\frac{\pi}{٦}ت}$ (ج) هـ$^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ (د) هـ$^{-\frac{٥\pi}{٦}ت}$

١٠ (دور أول ٢٠١٨) هـ$^{\theta ت}$ + هـ$^{-\theta ت}$ = ...

(أ) هـ$^{٢\theta ت}$ (ب) ٢ جتا θ (ج) ٢ جا θ (د) هـ$^{-٢\theta ت}$

١١ (دور أول ٢٠١٩) القيمة العددية للمقدار: هـ$^{\pi ت}$ − هـ$^{-\pi ت}$ = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (ج) ١ (د) ٢

١٢ إذا كان: ع = س + ت ص فإن الجزء الحقيقي للعدد هـ^{ع} هو ......

(أ) هـ^{س} جتا ص (ب) هـ^{س} جا ص (ج) هـ^{س} (د) جتا ص

١٣ الجزء الحقيقي في العدد المركب (هـ$^{٢ + \frac{\pi}{٢}ت}$) يساوي ......

(أ) صفر (ب) هـ^{٢} (ج) هـ$^{-٢}$ (د) −هـ^{٢}

١٤ في الشكل المقابل:

ع$_١$، ع$_٢$ عددان مركبان في مستوى ارجاند، |ع$_١$| = ٢ |ع$_٢$| فإن: $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = ...

(أ) ٢ هـ$^{-\frac{\pi}{٢}ت}$ (ب) ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (د) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{-\frac{\pi}{٢}ت}$

١٥ إذا كان ع$_١$ = جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٦}$ وكان: |ع$_١$| = |ع$_٢$| = ٤، سعة (ع$_١$ ع$_٢$) = ... فإن: ع$_٢$ = ...

(أ) ٤ هـ$^{\frac{٢\pi}{٧}ت}$ (ب) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (ج) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{٦}ت}$ (د) ٤ هـ$^{\frac{\pi}{١٢}ت}$

١٦ إذا كان: ع$_١$ = ل$_١$ هـ$^{\theta ت}$، ع$_٢$ = ل$_٢$ هـ$^{\theta ت}$ فإن: |ع$_١$ + ع$_٢$| = ...

(أ) أقل من (ل$_١$ + ل$_٢$) (ب) أكبر من (ل$_١$ + ل$_٢$) (ج) يساوي (ل$_١$ + ل$_٢$) (د) يساوي |ل$_١$ − ل$_٢$|

١٨٦

الدرس الثاني

١٧ إذا كان: ع = ل هـ$^{\theta ت}$ فإن: ل هـ$^{(\frac{\pi}{٢} + \theta)ت}$ تمثل بالعدد المركب ......

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ ع (ب) ع + $\frac{\pi}{٢}$ (ج) $\frac{ع}{ت}$ (د) ع ت

١٨ في الشكل المقابل:

دائرة مركزها (م) فيها ق(∠ ء أ حـ) = ٣٠°، ق(∠ م ب أ) = θ وكانت: ع = جا ٢θ + ت جتا ٢θ فإن: ع = ... على الصورة الأسية.

(أ) هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ (ب) هـ$^{-\frac{٢\pi}{٣}ت}$ (ج) هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ (د) هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$

١٩ (دور أول ٢٠٢١) إذا كان ع عددًا مركبًا، ع + $\bar{ع}$ = ٢ هـ$^{\pi ت}$ فإن ع يمكن أن تساوي ......

(أ) هـ$^{\pi ت}$ (ب) ٢ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (ج) هـ$^{-\frac{\pi}{٢}ت}$ (د) ٢ هـ$^{\pi ت}$

٨ أثبت أن:

① هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$ − هـ$^{-\frac{\pi}{٣}ت}$ = $\sqrt{٣}$ ت

② هـ$^{٤+\pi ت}$ − هـ$^{-\pi ت}$ = ١ − هـ^{٤}

③ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{\theta ت}$ + هـ$^{-\theta ت}$)

④ جا θ = $\frac{-ت}{٢}$ (هـ$^{\theta ت}$ − هـ$^{-\theta ت}$)

٩ ضع العدد المركب ع = $\frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}ت}$ في الصورة المثلثية والأسية.

ثم أثبت أن:

① ع^{٦} عدد حقيقي.

② $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

١٠ إذا كان: ع = ٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) أثبت أن: $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{٥\pi}{٣}ت}$

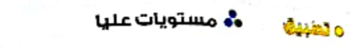
١١ إذا كان: ع$_١$ = ٢ (جتا ٧٥° + ت جا ٧٥°)، ع$_٢$ = ٤ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

أوجد على الصورة الأسية العدد: ع$_١$ ع$_٢$، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ «٨ هـ$^{\frac{\pi}{٢}ت}$، $\frac{١}{٢}$ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$»

١٢ إذا كان: ع$_١$ = $\frac{٢ت}{١ + ت}$، ع$_٢$ = ٤ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

أوجد: ع$_٢$ ÷ (ع$_١$)^{٢} على الصورة الأسية. «٢ هـ$^{\frac{\pi}{٣}ت}$»

١٨٧



١٣ في الشكل المقابل :

أوجد على الصورة الأسية العدد : $\frac{ع_1}{ع_2}$

«$\frac{1}{2}$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$»

١٤ إذا كان : $ع_1 = ٦ (\text{جتا } ٢٤٠° + ت \text{ جا } ٢٤٠°)$ ، $ع_2 = ٢ (\text{جتا } ٣٠٠° + ت \text{ جا } ٣٠٠°)$

فأوجد على الصورة الأسية كلًا من :

① $\frac{ع_1}{ع_2}$ ② $\frac{ع_2}{ع_1}$ ③ $ع_1^2$ ④ $ع_2^4$

«٣ هـ$^{\frac{-\pi}{3}ت}$ ، $\frac{1}{3}$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$ ، ٣٦ هـ$^{\frac{2\pi}{3}ت}$ ، ١٦ هـ$^{\frac{2\pi}{3}ت}$»

١٥ إذا كان : $ع_1 = ٢ (\text{جتا } ١٥٠° - ت \text{ جا } ١٥٠°)$ ، $ع_2 = ٣ (\text{جا } ١٥٠° + ت \text{ جتا } ١٥٠°)$

فأوجد على الصورة الأسية كلًا من : $ع_1 ع_2$ ، $ع_1^2$ ، $ع_2^4$

«٦ هـ$^{\frac{5\pi}{6}ت}$ ، ٤ هـ$^{\frac{5\pi}{3}ت}$ ، ٨١ هـ$^{\frac{2\pi}{3}ت}$»

١٦ ضع الناتج في كلًا مما يأتي على الصورة الأسية والصورة المثلثية :

① ٢ هـ$^{\frac{\pi}{6}ت}$ × ٣ هـ$^{\frac{2\pi}{3}ت}$

② ٤ هـ$^{\frac{7\pi}{4}ت}$ ÷ ٢ هـ$^{\frac{5\pi}{3}ت}$

③ $\frac{٣\sqrt{٢} \text{ هـ}^{\frac{7\pi}{12}ت} \times \sqrt{٢} \text{ هـ}^{\frac{4\pi}{9}ت}}{\text{هـ}^{\frac{\pi}{6}ت} \times ٢ \text{ هـ}^{\frac{2\pi}{3}ت}}$

١٧ (دور أول ٢٠٠٦) إذا كان : $ع_1 = ٤ (\text{جتا } \frac{5\pi}{3} - ت \text{ جا } \frac{5\pi}{3})$ ، $ع_2 = $ هـ$^{\frac{5\pi}{2}ت}$ حيث $ت^2 = -١$

فأوجد العدد : $ع = \frac{ع_2}{ع_1}$ في الصورة المثلثية.

«$\frac{1}{4}(\text{جتا } \frac{\pi}{6} + ت \text{ جا } \frac{\pi}{6})$»

١٨ (دور ثان ٢٠٠٩) إذا كان : $ع_1 = ١ + \sqrt{٣}\, ت$ ، $ع_2 = \text{جتا } \frac{\pi}{6} - ت \text{ جا } \frac{\pi}{6}$

فأوجد العدد : $\frac{ع_1}{ع_2}$ على الصورة الأسية.

«٢ هـ$^{\frac{\pi}{2}ت}$»

١٩ (دور ثان ٢٠٠٣) إذا كان : $ع_1 = ١ - \sqrt{٣}\, ت$ ، $ع_2 = ١ + ت$ حيث $ت^2 = -١$

فأوجد العدد : $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$ في الصورة الأسية ثم أثبت أن : $ع^{١٢}$ عدد حقيقي. «$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{-7\pi}{12}ت}$»

١٠ (دور أول ٢٠١٠) إذا كان : $ع_1 = \sqrt{٢} (\text{جتا } \frac{\pi}{4} - ت \text{ جا } \frac{\pi}{4})$ ، $ع_2 = ١ + ت$

فأوجد الصورة الأسية للعدد : ع حيث $ع = \frac{ع_1^2}{ع_2}$

«$\sqrt{٢}$ هـ$^{\frac{-3\pi}{4}ت}$»

١١ (دور أول ٢٠٠٧) إذا كان : $ع_1 = ٦ (\text{جتا } \frac{4\pi}{3} - ت \text{ جا } \frac{4\pi}{3})^2$ ، $ع_2 = ٢$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$

حيث $ت^2 = -١$ فأوجد العدد : $ع = ع_1 ع_2^2$ في الصورة المثلثية.

«$٢٤ (\text{جتا } \frac{2}{3}\pi + ت \text{ جا } \frac{2}{3}\pi)$»

١٢ ضع كلًا من المقدارين : $\sqrt{٢}\, ت^٥$ ، $ت^٤ + ت^٥$ على الصورة المثلثية ثم

أوجد الصورة الجبرية وكذلك الصورة الأسية للمقدار : $\left(\frac{\sqrt{٢}\, ت^٥}{ت^٤ + ت^٥}\right)^٤$

«-١ ، هـ$^{\pi ت}$»

١٣ ضع الناتج في كلًا مما يأتي على الصورة الجبرية :

① $ع = ٣ (\text{جتا } \frac{2\pi}{3} + ت \text{ جا } \frac{2\pi}{3}) \times ٢$ هـ$^{\frac{\pi}{3}ت}$ «$-٣\sqrt{٣} + ٣$ ت»

② $ع = -٢ (١ - ت)$ هـ$^{\frac{\pi}{2}ت}$ «$-٢ - ٢$ ت»

١٤ إذا كان : $ع_1 = \text{جتا } ٤٥° + ت \text{ جا } ٤٥°$ ، $ع_2 = \text{جتا } \frac{\pi}{3} + ت \text{ جا } \frac{\pi}{3}$

، $ع_3 = \text{جتا } ٣٠° + ت \text{ جا } ٣٠°$

فأوجد الصورة الأسية (صورة أويلر) للمقدار : $\frac{ع_1^٦ ع_2^٢}{ع_3^٤}$ «هـ$^{\frac{\pi}{2}ت}$»

١٥ إذا كان : $ع_1 = \text{جتا } \frac{7\pi}{4} - ت \text{ جا } \frac{7\pi}{4}$ ، $ع_2 = -١ + ت$ ، $ع_3 = \text{جا } ٦٠° + ت \text{ جتا } ٦٠°$

أوجد العدد : $ع = \frac{ع_1^٤ ع_2^٢}{ع_3^٦}$ على الصورة الأسية والصورة الجبرية.

«٢ هـ$^{\frac{-\pi}{2}ت}$ ، $١ - \sqrt{٣}$ ت»

٢٠ إذا كان : ع = هـ$^{\theta ت}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد : $\frac{١ + ع}{١ - ع}$ «$\text{ظتا } \frac{\theta}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$»

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $ت^{ت} = $ ....

(أ) $هـ^{\frac{\pi}{2}}$ (ب) $هـ^{-\frac{\pi}{2}}$ (جـ) -1 (د) 1

② إذا كان : $أ هـ^{2\theta ت} + ب هـ^{-2\theta ت} = 4 جتا 2\theta - 6 ت جا 2\theta$

فإن : $أ \times ب = $ .... حيث أ ، ب أعداد حقيقية.

(أ) -1 (ب) 5 (جـ) -5 (د) 4

③ إذا كان : $س + ت ص = هـ^{\theta ت}$ فإن أقل قيمة للعدد س ص هى ....

(أ) $-\frac{1}{2}$ (ب) -1 (جـ) -2 (د) 1

④ الشكل المقابل :

يمثل العددان المركبان $ع_1$ ، $ع_2$

على شكل ارجاند

فإن $\left(\frac{ع_1}{ع_2}\right)^6 = $ ....

(أ) $8 هـ^{-\frac{\pi}{6} ت}$ (ب) $8 هـ^{\frac{\pi}{4} ت}$

(جـ) $8 هـ^{-\frac{\pi}{3} ت}$ (د) $8 هـ^{-\frac{\pi}{2} ت}$

الدرس 3

نظرية ديموافر

نظرية ديموافر

لأى عدد مركب $ع = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$ حيث θ سعة العدد ع

١ نظرية ديموافر بأس صحيح موجب

إذا كان : $ن$ عدد صحيح موجب فإن : $ع^{ن} = ل^{ن} (جتا ن\theta + ت جا ن\theta)$

فمثلاً : إذا كان : $ع = 3 (جتا 30° + ت جا 30°)$

فإن : $ع^4 = 3^4 (جتا (4 \times 30°) + ت جا (4 \times 30°)) = 81 (جتا 120° + ت جا 120°)$

٢ نظرية ديموافر بأس نسبى موجب

إذا كان $ن$ عدد صحيح موجب ، θ مقاسة بالتقدير الستينى فإن :

$ع^{\frac{1}{ن}} = ل^{\frac{1}{ن}} \left(جتا \left(\frac{\theta + 360° ر}{ن}\right) + ت جا \left(\frac{\theta + 360° ر}{ن}\right)\right)$ لكل $ر = 0 ، 1 ، 2 ، ..... ، (ن - 1)$

وإذا كانت θ مقاسة بالتقدير الدائرى نستخدم 2π بدلاً من $360°$ والأعداد الناتجة من التعويض عن $ر = 0 ، 1 ، 2 ، ... (ن - 1)$ تسمى الجذور النونية للعدد ع

فمثلاً : إذا كان : $ع = 8 (جتا 30° + ت جا 30°)$ فإن :

$ع^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} (جتا 30° + ت جا 30°)^{\frac{1}{3}}$

$= 2 \left(جتا \frac{30° + 360° ر}{3} + ت جا \frac{30° + 360° ر}{3}\right)$ لكل $ر = 0 ، 1 ، 2$

وعند $ر = 0$ يكون $ع_1 = 2 \left(جتا \frac{30°}{3} + ت جا \frac{30°}{3}\right) = 2 (جتا 10° + ت جا 10°)$

وعند $ر = 1$ يكون $ع_2 = 2 \left(جتا \frac{30° + 1 \times 360°}{3} + ت جا \frac{30° + 1 \times 360°}{3}\right) = 2 (جتا 130° + ت جا 130°)$

وعند $ر = 2$ يكون $ع_3 = 2 \left(جتا \frac{30° + 2 \times 360°}{3} + ت جا \frac{30° + 2 \times 360°}{3}\right)$

$= 2 (جتا 250° + ت جا 250°) = 2 (جتا (-110°) + ت جا (-110°))$

أى أن :

$ع^{\frac{1}{3}}$ له ثلاث قيم هى $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ وكل منها يسمى الجذر الثالث (التكعيبى) للعدد ع


اللهم صل وسلم
على نبينا محمد
محتويات

لاحظ أن

يمكن إيجاد $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ باختيار قيم للعدد ر تجعل سعة كلًّا منهم فى الفترة $]-\pi ، \pi]$ مباشرة كالآتى :

$\because \theta = ٦٠° = \frac{\pi}{٣} \in]٠ ، \pi[$

∴ نضع ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ (أربع قيم تبدأ بالسالب بعد الصفر)

عند ر = ٠ ∴ $ع_1 = \sqrt{٢}$ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°)

عند ر = −١ ∴ $ع_2 = \sqrt{٢}$ (جتا (−٧٥°) + ت جا (−٧٥°))

عند ر = ١ ∴ $ع_3 = \sqrt{٢}$ (جتا ١٠٥° + ت جا ١٠٥°)

عند ر = −٢ ∴ $ع_4 = \sqrt{٢}$ (جتا (−١٦٥°) + ت جا (−١٦٥°))

مثال ٢

أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار : $(\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٢}{٥}}$

الحل

بفرض أن : ع = $\sqrt{٣}$ + ت ∴ س = $\sqrt{٣}$ ، ص = ١

∴ $|ع| = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ع يقع فى الربع الأول.

∴ $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = ٣٠°$

∴ ع = ٢ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

، ∵ $ع^{\frac{٢}{٥}} = (ع^٢)^{\frac{١}{٥}} = [(٢ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°))^٢]^{\frac{١}{٥}} = (٤ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°))^{\frac{١}{٥}}$

$= ٤^{\frac{١}{٥}}$ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)$^{\frac{١}{٥}}$

$= \sqrt[5]{٤}$ (جتا $\frac{٦٠° + ٣٦٠° ر}{٥}$ + ت جا $\frac{٦٠° + ٣٦٠° ر}{٥}$)

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

عند ر = ٠ ∴ $ع_1 = \sqrt[5]{٤}$ (جتا ١٢° + ت جا ١٢°)

عند ر = ١ ∴ $ع_2 = \sqrt[5]{٤}$ (جتا ٨٤° + ت جا ٨٤°)

عند ر = ٢ ∴ $ع_3 = \sqrt[5]{٤}$ (جتا ١٥٦° + ت جا ١٥٦°)

عند ر = ٣ ∴ $ع_4 = \sqrt[5]{٤}$ (جتا ٢٢٨° + ت جا ٢٢٨°) = $\sqrt[5]{٤}$ [جتا (−١٣٢°) + ت جا (−١٣٢°)]

عند ر = ٤ ∴ $ع_5 = \sqrt[5]{٤}$ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°) = $\sqrt[5]{٤}$ [جتا (−٦٠°) + ت جا (−٦٠°)]

∴ $(\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٢}{٥}}$ له خمسة قيم هى $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ ، $ع_5$

مثال ٣

أوجد قيم $(-٦٤ ت)^{\frac{١}{٦}}$ ومثل هذه القيم على شكل أرجاند.

الحل

بفرض أن : ع = −٦٤ ت

∴ ع = ٦٤ × (−ت)

= ٦٤ (جتا (−٩٠°) + ت جا (−٩٠°))

= ٦٤ (جتا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$)

∴ $ع^{\frac{١}{٦}} = (٦٤)^{\frac{١}{٦}}$ (جتا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\pi}{٢}\right)$)$^{\frac{١}{٦}}$

= ٢ (جتا $\left(\frac{-\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٦}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\frac{\pi}{٢} + ٢\pi ر}{٦}\right)$)

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

عند ر = ٠ ∴ $ع_1$ = ٢ (جتا $\left(\frac{-\pi}{١٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-\pi}{١٢}\right)$)

عند ر = ١ ∴ $ع_2$ = ٢ (جتا $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ + ت جا $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$)

عند ر = ٢ ∴ $ع_3$ = ٢ (جتا $\left(\frac{٧\pi}{١٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{٧\pi}{١٢}\right)$)

عند ر = ٣ ∴ $ع_4$ = ٢ (جتا $\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)$ + ت جا $\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)$)

عند ر = ٤ ∴ $ع_5$ = ٢ (جتا $\left(\frac{-٣\pi}{٤}\right)$ + ت جا $\left(\frac{-٣\pi}{٤}\right)$)

تذكر أن :

١ = جتا ٠° + ت جا ٠°

ت = جتا ٩٠° + ت جا ٩٠°

−١ = جتا ١٨٠° + ت جا ١٨٠°

−ت = جتا (−٩٠°) + ت جا (−٩٠°)

عند ر = ٥ ∴ $ع_٦ = ٢ \left(جتا\left(\frac{-٥\pi}{١٢}\right) + ت\ جا\left(\frac{-٥\pi}{١٢}\right)\right)$

لاحظ أن: النقط الست التى تمثل قيم العدد $(-٦٤\ ت)^{\frac{١}{٦}}$ فى شكل أرجاند تقع جميعها على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول و تقسم الدائرة إلى ست أقواس متساوية فى القياس.

أى أن: ق(∠ $ع_ر$ و $ع_{ر+١}$) = $\frac{٣٦٠^\circ}{٦} = ٦٠^\circ$ أى يساوى $\frac{\pi}{٣}$

الجذور النونية

المعادلة $س^ن = أ$ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة $س = أ^{\frac{١}{ن}}$ وتكون الجذور جميعًا فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة طول نصف قطرها $|أ|^{\frac{١}{ن}}$ وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

مثال ٤

مثل على شكل أرجاند جذور المعادلة : $ع^٥ + ٣٢ = ٠$.

الحل

∵ $ع^٥ + ٣٢ = ٠$ ∴ $ع^٥ = -٣٢$ ∴ $ع = (-٣٢)^{\frac{١}{٥}}$

∴ $ع = (٣٢ \times -١)^{\frac{١}{٥}}$ ∴ $ع = ٣٢^{\frac{١}{٥}} (جتا ١٨٠^\circ + ت\ جا ١٨٠^\circ)^{\frac{١}{٥}}$

∴ $ع = ٢ \left(جتا \frac{١٨٠^\circ + ٣٦٠^\circ ر}{٥} + ت\ جا \frac{١٨٠^\circ + ٣٦٠^\circ ر}{٥}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

عند ر = ٠ ∴ $ع_١ = ٢ (جتا ٣٦^\circ + ت\ جا ٣٦^\circ)$

عند ر = ١ ∴ $ع_٢ = ٢ (جتا ١٠٨^\circ + ت\ جا ١٠٨^\circ)$

عند ر = ٢ ∴ $ع_٣ = ٢ (جتا ١٨٠^\circ + ت\ جا ١٨٠^\circ)$

عند ر = ٣

∴ $ع_٤ = ٢ (جتا ٢٥٢^\circ + ت\ جا ٢٥٢^\circ) = ٢ (جتا (-١٠٨^\circ) + ت\ جا (-١٠٨^\circ))$

عند ر = ٤ ∴ $ع_٥ = ٢ (جتا ٣٢٤^\circ + ت\ جا ٣٢٤^\circ) = ٢ (جتا (-٣٦^\circ) + ت\ جا (-٣٦^\circ))$

ملاحظة

جذور المعادلة تمثل فى شكل أرجاند برؤوس مضلع خماسى تقع على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل «و» وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول بحيث ق(∠ $ع_ر$ و $ع_{ر+١}$) = $\frac{٣٦٠^\circ}{٥} = ٧٢^\circ$ ولذلك يمكن إيجاد الجذر الأول $ع_١$ بوضع ر = ٠ فيكون $ع_١ = ٢ (جتا ٣٦^\circ + ت\ جا ٣٦^\circ)$ ثم إضافة ٧٢° إلى سعة $ع_١$ للحصول على سعة $ع_٢$ وتكرار ذلك للحصول على باقى الجذور.

مثال ٥

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}\ ت$ على الصورة الجبرية.

الحل

∵ $ع = ٢ - ٢\sqrt{٣}\ ت$ ∴ س = ٢ ، $ص = -٢\sqrt{٣}$

∴ $|ع| = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = ٤$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ ع يقع فى الربع الرابع.

∴ $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-١}\left(\frac{-٢\sqrt{٣}}{٢}\right) = ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = -٦٠^\circ$

∴ $ع = ل (جتا \theta + ت\ جا \theta) = ٤ (جتا (-٦٠^\circ) + ت\ جا (-٦٠^\circ))$

∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = ٤^{\frac{١}{٢}} ((جتا (-٦٠^\circ) + ت\ جا (-٦٠^\circ))^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢ \left(جتا \frac{-٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ ر}{٢} + ت\ جا \frac{-٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ ر}{٢}\right)$ حيث ر = ٠ ، ١

عند ر = ٠ ∴ $ع_١ = ٢ (جتا (-٣٠^\circ) + ت\ جا (-٣٠^\circ)) = ٢ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{-١}{٢}\right) = \sqrt{٣} - ت$

عند ر = ١ ∴ $ع_٢ = ٢ (جتا ١٥٠^\circ + ت\ جا ١٥٠^\circ) = ٢ \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} + ت \times \frac{١}{٢}\right) = -\sqrt{٣} + ت$

∴ الجذران التربيعيان للعدد ع هما ± $(\sqrt{٣} - ت)$

حل آخر : (باستخدام الصورة الجبرية دون التحويل إلى الصورة المثلثية)

بفرض أن : $ع^{\frac{١}{٢}} = س + ت\ ص$ حيث س ، ص ∈ ح

ملاحظة

يمكن الحصول على الجذور النونية للعدد المركب بحيث تكون سعة كلًا منها $\frac{\theta + 360^\circ ر}{ن}$ في الفترة $]-\pi ، \pi]$ مباشرة بوضع ر = … ، –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، … بحيث إذا كان :

① ن عدد فردى فإن : $\frac{1-ن}{2} \geq ر \geq \frac{ن-1}{2}$

أى أن : ر = صفر ، ١ ، –١ ، ٢ ، –٢ ، ٣ ، –٣ ، … إلى عدد ن من القيم

② ن عدد زوجى فإن :

- $\frac{-ن}{2} \leq ر < \frac{ن}{2}$ لكل $\theta \in]0 ، \pi]$

أى أن : ر = صفر ، –١ ، ١ ، –٢ ، ٢ ، –٣ ، … إلى عدد ن من القيم

«لاحظ أنه بعد الصفر نبدأ بالسالب»

- $\frac{-ن}{2} < ر \leq \frac{ن}{2}$ لكل $\theta \in]-\pi ، 0]$

أى أن : ر = صفر ، ١ ، –١ ، ٢ ، –٢ ، ٣ ، … إلى عدد ن من القيم

«لاحظ أنه بعد الصفر نبدأ بالموجب»

فمثلًا :

① لإيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب ع

نضع ر = ٠ ، ١ ، –١ (ثلاث قيم)

② لإيجاد الجذر الرابع للعدد المركب ع

- إذا كانت $\theta \in]0 ، \pi]$

نضع ر = ٠ ، –١ ، ١ ، –٢ (أربع قيم تبدأ بالسالب بعد الصفر)

- إذا كانت $\theta \in]-\pi ، 0]$

نضع ر = ٠ ، ١ ، –١ ، ٢ (أربع قيم تبدأ بالموجب بعد الصفر)

مثال ①

إذا كان : $ع = 2 + 2\sqrt{3}\,ت$

فأوجد : ① $ع^4$ ② $ع^{\frac{1}{4}}$

الحل

$\because ع = 2 + 2\sqrt{3}\,ت$ $\therefore س = 2$ ، $ص = 2\sqrt{3}$

$\therefore |ع| = ل = \sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

$\because س > 0$ ، $ص > 0$ $\therefore$ ع يقع فى الربع الأول.

$\therefore \theta = ظا^{-1}\left(\frac{ص}{س}\right) = ظا^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = ظا^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ$

$\therefore ع = 4\,(جتا 60^\circ + ت\,جا 60^\circ)$

① $ع^4 = (4)^4\,[جتا(4 \times 60^\circ) + ت\,جا(4 \times 60^\circ)]$

$= 256\,(جتا 240^\circ + ت\,جا 240^\circ)$

$= 256\,[جتا(-120^\circ) + ت\,جا(-120^\circ)]$

② $ع^{\frac{1}{4}} = (4)^{\frac{1}{4}}\,(جتا 60^\circ + ت\,جا 60^\circ)^{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{2}\left(جتا \frac{60^\circ + 360^\circ ر}{4} + ت\,جا \frac{60^\circ + 360^\circ ر}{4}\right)$ حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

عند ر = ٠ $\therefore ع_1 = \sqrt{2}\,(جتا 15^\circ + ت\,جا 15^\circ)$

عند ر = ١ $\therefore ع_2 = \sqrt{2}\,(جتا 105^\circ + ت\,جا 105^\circ)$

عند ر = ٢ $\therefore ع_3 = \sqrt{2}\,(جتا 195^\circ + ت\,جا 195^\circ) = \sqrt{2}\,(جتا(-165^\circ) + ت\,جا(-165^\circ))$

عند ر = ٣ $\therefore ع_4 = \sqrt{2}\,(جتا 285^\circ + ت\,جا 285^\circ) = \sqrt{2}\,(جتا(-75^\circ) + ت\,جا(-75^\circ))$

أى أن : $ع^{\frac{1}{4}}$ له أربع قيم هى $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ وكل منها يسمى الجذر الرابع للعدد ع

∴ $(٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت)^{\frac{1}{2}} = س + ت\,ص$

بتربيع الطرفين :

∴ $٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت = س^{2} - ص^{2} + ٢\,س\,ص\,ت$ ∴ $س^{2} - ص^{2} = ٢$ (١)

، $٢\,س\,ص = -٢\sqrt{٣}$ ومنها $ص = \frac{-\sqrt{٣}}{س}$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $س^{2} - \frac{٣}{س^{2}} = ٢$ بالضرب × $س^{2}$

∴ $س^{4} - ٣ = ٢\,س^{2}$ ∴ $س^{4} - ٢\,س^{2} - ٣ = ٠$

∴ $(س^{2} - ٣)(س^{2} + ١) = ٠$

∴ $س^{2} + ١ = ٠$ ومنها $س = \pm ت$ مرفوض لأن $\pm ت \notin ح$

أ، $س^{2} - ٣ = ٠$ ومنها $س = \pm\sqrt{٣}$ وبالتعويض فى (٢)

∴ عند $س = \sqrt{٣}$ ∴ $ص = \frac{-\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -١$ ∴ $ع^{\frac{1}{2}} = \sqrt{٣} - ت$

، عند $س = -\sqrt{٣}$ ∴ $ص = \frac{-\sqrt{٣}}{-\sqrt{٣}} = ١$ ∴ $ع^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{٣} + ت$

∴ الجذران التربيعيان للعدد ع هما $\pm(\sqrt{٣} - ت)$

مثال ٦

إذا كان : $س + ت\,ص = \left(\frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت}\right)^{\frac{1}{2}}$ **فأوجد قيم :** س ، ص الحقيقية.

الحل

بتربيع الطرفين : ∴ $(س + ت\,ص)^{2} = \frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت}$

∴ $(س + ت\,ص)^{2} = \frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ - ٤\sqrt{٣}\,ت} \times \frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت} = \frac{(١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)^{2}}{١ + ٤٨}$

$= \frac{(١ + ٤\sqrt{٣}\,ت)^{2}}{٤٩} = \left(\frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{٧}\right)^{2}$

∴ $س + ت\,ص = \pm\left(\frac{١ + ٤\sqrt{٣}\,ت}{٧}\right) = \pm\left(\frac{١}{٧} + \frac{٤\sqrt{٣}}{٧}\,ت\right)$

∴ $س = \pm\frac{١}{٧}$ ، $ص = \pm\frac{٤\sqrt{٣}}{٧}$

مثال ٧

إذا كان : $(س + ت\,ص)^{2}(١ + ٢\,ت) = ١١ + ٢\,ت$ **فأوجد قيم :** س ، ص الحقيقية.

الحل

∵ $(س + ت\,ص)^{2}(١ + ٢\,ت) = ١١ + ٢\,ت$ ∴ $(س + ت\,ص)^{2} = \frac{١١ + ٢\,ت}{١ + ٢\,ت}$

∴ $(س + ت\,ص)^{2} = \frac{(١١ + ٢\,ت)(١ - ٢\,ت)}{(١ + ٢\,ت)(١ - ٢\,ت)} = \frac{١٥ - ٢٠\,ت}{٥}$

∴ $(س + ت\,ص)^{2} = ٣ - ٤\,ت$ ∴ $س^{2} - ص^{2} + ٢\,س\,ص\,ت = ٣ - ٤\,ت$

∴ $س^{2} - ص^{2} = ٣$ (١) ، $٢\,س\,ص = -٤$ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع : ∴ $(س^{2} + ص^{2})^{2} = ٢٥$ ∴ $س^{2} + ص^{2} = ٥$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : $٢\,س^{2} = ٨$ ∴ $س^{2} = ٤$ ∴ $س = \pm ٢$

وبطرح (١) من (٣) : ∴ $٢\,ص^{2} = ٢$ ∴ $ص^{2} = ١$ ∴ $ص = \mp ١$

لأن من (٢) : $س\,ص < ٠$ ∴ س ، ص مختلفتان فى الإشارة.

∴ $س = ٢$ ، $ص = -١$ أ، $س = -٢$ ، $ص = ١$

مثال ٨

إذا كانت : $س = ٨ - ٦\,ت$ **فأوجد قيم :** $س^{\frac{3}{2}}$

الحل

∵ $س = ٨ - ٦\,ت$ ، $س^{\frac{3}{2}} = س \times س^{\frac{1}{2}}$

لذلك نفرض أن $س^{\frac{1}{2}} = أ + ب\,ت$

وبتربيع الطرفين :

∴ $س = (أ + ب\,ت)^{2}$ ∴ $٨ - ٦\,ت = أ^{2} - ب^{2} + ٢\,أ\,ب\,ت$

∴ $أ^{2} - ب^{2} = ٨$ (١) ، $٢\,أ\,ب = -٦$ (٢)

وبتربيع (١) ، (٢) والجمع : ∴ $(أ^{2} + ب^{2})^{2} = ١٠٠$ ∴ $أ^{2} + ب^{2} = ١٠$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ $٢ أ^٢ = ١٨$ ∴ $أ^٢ = ٩$ ∴ أ = ± ٣

وبطرح (١) من (٣) : ∴ $٢ ب^٢ = ٢$ ∴ $ب^٢ = ١$ ∴ ب = ∓ ١

لأن من (٢) : أ ب < ٠ ∴ أ ، ب مختلفتان فى الإشارة

∴ $س^{\frac{١}{٣}} = ±(٣ - ت)$ ∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = س^{\frac{١}{٣}} × س^{\frac{١}{٣}} = ±(٨ - ٦ ت)(٣ - ت)$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ±(١٨ - ٢٦ ت)$ ∴ $س^{\frac{-٢}{٣}} = ± \frac{١}{١٨ - ٢٦ ت}$

∴ $س^{\frac{-٢}{٣}} = ± \frac{١٨ + ٢٦ ت}{(١٨ - ٢٦ ت)(١٨ + ٢٦ ت)} = ± \frac{١٨ + ٢٦ ت}{١٠٠٠} = ±(٠{,}٠١٨ + ٠{,}٠٢٦ ت)$

مثال ٩

إذا كانت : س ∈ ك فأوجد مجموعة الحل للمعادلة :

$س^٢ - (٢ + ت) س - (١ + ٥ ت) = ٠$

الحل

∵ $س = \frac{-ب ± \sqrt{ب^٢ - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$ حيث أ = ١ ، ب = −(٢ + ت) ، حـ = −(١ + ٥ ت)

∴ $س = \frac{(٢ + ت) ± \sqrt{(٢ + ت)^٢ + ٤ (١ + ٥ ت)}}{٢}$

∴ $س = \frac{(٢ + ت) ± \sqrt{٣ + ٤ ت + ٤ + ٢٠ ت}}{٢}$ ∴ $س = \frac{(٢ + ت) ± \sqrt{٧ + ٢٤ ت}}{٢}$

ثم نفرض أن $\sqrt{٧ + ٢٤ ت} = ل + ت م$ وبتربيع الطرفين.

∴ $٧ + ٢٤ ت = ل^٢ - م^٢ + ٢ ل م ت$ ∴ $ل^٢ - م^٢ = ٧$ (١)

، ٢ ل م = ٢٤ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) والجمع : ∴ $(ل^٢ + م^٢)^٢ = ٦٢٥$

∴ $ل^٢ + م^٢ = ٢٥$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ $٢ ل^٢ = ٣٢$ ∴ $ل^٢ = ١٦$ ∴ ل = ± ٤

بطرح (١) من (٣) : ∴ $٢ م^٢ = ١٨$ ∴ $م^٢ = ٩$ ∴ م = ± ٣

∴ $\sqrt{٧ + ٢٤ ت} = ±(٤ + ٣ ت)$ ∴ $س = \frac{(٢ + ت) ± (٤ + ٣ ت)}{٢}$

∴ $س = \frac{٢ + ت + ٤ + ٣ ت}{٢}$ أ، $س = \frac{٢ + ت - ٤ - ٣ ت}{٢}$

∴ $س = \frac{٦ + ٤ ت}{٢} = ٣ + ٢ ت$ أ، $س = \frac{-٢ - ٢ ت}{٢} = -١ - ت$

∴ مجموعة الحل للمعادلة = {٣ + ٢ ت ، −١ − ت}

مثال ١٠

أوجد الصورة الأسية (صورة أويلر) للعدد : $ع = \frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{٥١٢ ت^٥}$

ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية.

الحل

$ع = \frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{٥١٢ ت^٥} = \frac{(١ + \sqrt{٣} ت)(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{٥١٢ ت} × \frac{ت}{ت}$

(بضرب البسط والمقام × ت)

∴ $ع = \frac{(ت - \sqrt{٣})(ت - \sqrt{٣})^{١١}}{-٥١٢} = \frac{(ت - \sqrt{٣})^{١٢}}{-٥١٢}$

، بوضع $ت - \sqrt{٣} = -\sqrt{٣} + ت$ على الصورة المثلثية.

∴ $ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٣ + ١} = ٢$

، ∵ $س = -\sqrt{٣} < ٠$ ، ص = ١ > ٠ ∴ $-\sqrt{٣} + ت$ يقع فى الربع الثانى.

∴ $θ = ١٨٠° + ظا^{-١} \left(\frac{ص}{س}\right) = ١٨٠° + ظا^{-١} \left(\frac{١}{-\sqrt{٣}}\right) = ١٨٠° + (-٣٠°) = ١٥٠°$

∴ $ت - \sqrt{٣} = ٢ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°) = ٢ (جتا \frac{٥}{٦} π + ت جا \frac{٥}{٦} π)$

∴ $(ت - \sqrt{٣})^{١٢} = ٢^{١٢} (جتا \frac{٥}{٦} π + ت جا \frac{٥}{٦} π)^{١٢} = ٤٠٩٦ (جتا ١٠ π + ت جا ١٠ π)$

$= ٤٠٩٦ (جتا ٠ + ت جا ٠)$

∴ $ع = \frac{٤٠٩٦ (جتا ٠ + ت جا ٠)}{٥١٢ (جتا π + ت جا π)} = ٨ (جتا - π + ت جا - π) = ٨ (جتا π + ت جا π)$

∴ $ع = ٨ هـ^{π ت}$ (الصورة الأسية)

$\therefore \text{ع}^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \left(\text{جتا } \frac{\pi + 2\pi \text{ر}}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi + 2\pi \text{ر}}{3}\right)$ حيث ر $= 0$ ، 1 ، 2

$\therefore$ عند ر $= 0$ $\quad \therefore \text{ع}_1 = 2\left(\text{جتا } \frac{\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{\pi}{3}\right) = 2\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{3}\text{ت}}$

عند ر $= 1$ $\quad \therefore \text{ع}_2 = 2\left(\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi\right) = 2\,\text{هـ}^{\pi\text{ت}}$

عند ر $= 2$ $\quad \therefore \text{ع}_3 = 2\left(\text{جتا } \frac{5\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\text{جتا } \frac{-\pi}{3} + \text{ت جا } \frac{-\pi}{3}\right) = 2\,\text{هـ}^{\frac{-\pi}{3}\text{ت}}$

$\therefore$ الجذور التكعيبية للعدد ع هى $2\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{3}\text{ت}}$ ، $2\,\text{هـ}^{\pi\text{ت}}$ ، $2\,\text{هـ}^{\frac{-\pi}{3}\text{ت}}$

ملاحظة

من المثال السابق يمكن استخدام الصورة الأسية للعدد ع لإيجاد الجذور التكعيبية مباشرة كالآتى :

$\because \text{ع} = 8\,\text{هـ}^{\pi\text{ت}}$ $\quad \therefore \text{ع}^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}\,\text{هـ}^{\frac{\pi + 2\pi\text{ر}}{3}\text{ت}}$ حيث ر $= 0$ ، 1 ، 2

عند ر $= 0$ $\quad \therefore \text{ع}_1 = 2\,\text{هـ}^{\frac{\pi}{3}\text{ت}}$

عند ر $= 1$ $\quad \therefore \text{ع}_2 = 2\,\text{هـ}^{\pi\text{ت}}$

عند ر $= 2$ $\quad \therefore \text{ع}_3 = 2\,\text{هـ}^{\frac{-\pi}{3}\text{ت}}$

مثال 11

استخدم نظرية ديموافر للتعبير عن كل من : جتا 2θ ، جا 2θ بدلالة جا θ ، جتا θ

الحل

$\because$ جتا 2θ + ت جا 2θ = (جتا θ + ت جا θ)^2

$\therefore$ جتا 2θ + ت جا 2θ = جتا$^2\theta$ − جا$^2\theta$ + 2 ت جا θ جتا θ

ومن خواص الأعداد المركبة ينتج أن :

جتا 2θ = جتا$^2\theta$ − جا$^2\theta$ ، جا 2θ = 2 جا θ جتا θ



اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

1 أوجد الصورة المثلثية وكذا الصورة الجبرية لحلول المعادلات الآتية ومثلها على شكل أرجاند حيث ع ∈ ك :

(1) 📖 $\text{ع}^3 = 1$ | (2) 📖 $\text{ع}^4 = 1$ | (3) $\text{ع}^3 = -1$

(4) $\text{ع}^6 = -1$ | (5) $\text{ع}^3 = \text{ت}$ | (6) $\text{ع}^3 = -\text{ت}$

2 مثل على شكل أرجاند :

(1) 📖 الجذور التكعيبية للعدد 8 | (2) 📖 الجذور الخماسية للعدد −32

(3) الجذور السداسية للعدد −64 | (4) الجذور الرباعية للعدد 16 ت

3 📖 أوجد مجموعة الحل فى ك لكل من المعادلات الآتية :

(1) $\text{ع}^4 = 16$ | (2) $\text{ع}^3 + 8 = 0$ | (3) $\text{ع}^3 + 8\text{ت} = 0$

(4) $\text{ع}^5 + 243 = 0$ | (5) $\text{ع}^5 - 32 = 0$ | (6) $\text{ع}^5 + 32\text{ت} = 0$

4 أوجد الصورة المثلثية لقيم كل مما يأتى :

(1) $(1 + \sqrt{3}\,\text{ت})^{\frac{1}{2}}$ (2) $(-\sqrt{3} + \text{ت})^{\frac{2}{5}}$ (3) $(1 - \text{ت})^{\frac{2}{5}}$ (4) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

5 أوجد الجذور التربيعية لكل من الأعداد الآتية :

(1) 8 ت (2) 📖 7 − 24 ت (3) $\frac{3\text{ت} - 1}{\text{ت} + 3}$ (4) $\frac{8(1 - \text{ت})}{1 + \text{ت}} + 15$

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى كل مما يأتى :

(1) (دور ثان 2014) ع = −8 ت على الصورة الأسية.

(2) 📖 ع = 2 − 2$\sqrt{3}$ ت على الصورة المثلثية.

(3) (دور ثان 2015) ع = −3 + 4 ت دون التحويل للصورة المثلثية.

٧ أوجد بالصورة المثلثية وبالصورة الأسية جذور المعادلة الآتية في ك :

$ع^٤ = ٨ (١ - \sqrt{٣} ت)$ ثم اكتب مجموعة حل المعادلة.

٨ أوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية للجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة الآتية :

(١) $٩ (جتا ٢٠٠° + ت جا ٢٠٠°)$ (٢) $٤ (جتا \frac{π}{٣} - ت جا \frac{π}{٣})$

(٣) $جا \frac{٥π}{٦} + ت جتا \frac{٥π}{٦}$ (٤) $٤ هـ^{\frac{٥π}{٣} ت}$

٩ إذا كان : $ع = ٤ + ٤\sqrt{٣} ت$ أوجد الصورة الأسية للعدد ع ، ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع ، ومثلها على شكل أرجاند.

١٠ (دور أول ٢٠١٩) ضع العدد : $ع = \frac{٨}{١ - \sqrt{٣} ت}$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين على الصورة الأسية.

١١ إذا كان : $ع = جا \frac{π}{٩} + ت جتا \frac{π}{٩}$ أوجد $(\bar{ع})$ على الصورة المثلثية أوجد الجذور التكعيبية للعدد $(\bar{ع})^٩$

١٢ أوجد في أبسط صورة : $ع = \frac{١ + ٤ت + ت^٢}{٢ - ت - ٢ت^٢ - ت^٣}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة المثلثية.

١٣ أوجد المقياس والسعة للعدد : $\left(\frac{١ + \sqrt{٣} ت}{١ - ت}\right)^{١٢}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين له على الصورة الأسية.

١٤ أوجد الصور المختلفة للعدد : $ع = \frac{-\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت}$ ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع ، ومثل الجذرين على شكل أرجاند.

١٥ (دور أول ٢٠٠٤) إذا كان : $ع + ٢ = ت (ع - ٢)$ حيث $ت^٢ = -١$ فأوجد العدد المركب ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة الأسية.

١٦ (دور أول ٢٠١٢) إذا كان : $ع = (١ + جتا \frac{π}{٣} + ت جا \frac{π}{٣})^٦$ فضع العدد ع في الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع في الصورة الأسية.

١٧ (دور أول ٢٠٠٩) إذا كانت : $ع = \left(\frac{١ + ت}{١ - ت}\right)^٥$ ضع العدد ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع

١٨ إذا كان : $ع = ٦ - ٨ ت$ فأوجد $ع^{\frac{١}{٢}}$ على الصورة الجبرية.

١٩ إذا كان : $س + ت ص = \frac{٢}{١ - \sqrt{٣} ت}$ فأوجد قيمة كل من : س ، ص حيث س ، ص $\in$ ح ثم أوجد الجذر التربيعي للمقدار : $\frac{٢}{١ - \sqrt{٣} ت}$ بالطريقة الجبرية.

٢٠ إذا كان : $\frac{٧ - ١١ ت}{٤ + ت} = أ + ب ت$ ، أوجد قيم المقدار $(\sqrt{-ب} + أ ت)^{\frac{٣}{٢}}$

٢١ (دور أول ٢٠١٧) إذا كان : $ع = ١ - \sqrt{٣} ت$ (حيث $ت^٢ = -١$) أوجد $ع^{\frac{٣}{٢}}$ في الصورة المثلثية.

٢٢ إذا كان : $ع_١ = \sqrt{٣} (جتا \frac{π}{٣} - ت جا \frac{π}{٣})$ ، $ع_٢ = ٢ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°)$

أوجد $ع_١ ع_٢$ في الصورة الأسية ، ثم أوجد الصورة المثلثية للعدد ع حيث $ع = (ع_١ ع_٢)^{\frac{١}{٤}}$

٢٣ (دور ثان ٢٠١٢) إذا كان : $ع_١ = (جا \frac{π}{٩} + ت جتا \frac{π}{٩})^٥$ ، $ع_٢ = (جتا \frac{π}{٩} + ت جا \frac{π}{٩})^٤$

وكان العدد المركب $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$ فأوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب ع على الصورة الأسية.

٢٤ ضع كلاً من : $ع_١ = ٢\sqrt{٣} + ٢ ت$ ، $ع_٢ = ١ + \sqrt{٣} ت$ حيث $ت^٢ = -١$ في الصورة الأسية ومن ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $ع_١ ع_٢$

٢٥ ضع العدد : $ع_١ = -٢ + ٢\sqrt{٣} ت$ حيث $ت^٢ = -١$ على الصورة الأسية

وإذا كان : $ع_١ ع_٢ = ١٦ هـ^{\frac{١١π}{٢} ت}$ فأوجد الجذرين التربيعيين للعدد $ع_٢$ على الصورة المثلثية.

٢٦ إذا كان : $ع_١ = \frac{٦ + ٤ ت}{١ + ت}$ ، $ع_٢ = \frac{٢٦}{٥ - ت}$ حيث : $ت^٢ = -١$

فبين أن : $ع_١$ ، $ع_٢$ مترافقان ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $٤ (ع_١ - ع_٢)$ في الصورة المثلثية.

٢٧ إذا كان : $ع_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+ت}{2}\right)^4$ ، $ع_2 = حا\frac{\pi}{3} + ت\,حتا\frac{\pi}{3}$ ، $ت^2 = -1$

وكان $ع = \frac{ع_1}{ع_2}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية.

---

٢٨ (دور أول ٢٠٠٠) إذا كان : $س = \frac{4}{\sqrt{3}+ت}$ ، $ص = \frac{2}{حتا\frac{\pi}{6} - ت\,حا\frac{\pi}{6}}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

حيث : $ع = س^2 - 2\,س\,ص + ص^2$

---

٢٩ إذا كان : $ع_1 = 1 - \sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = حتا هـ + ت\,حا هـ$ ، $ع_3 = \left(حتا\frac{هـ}{2} - ت\,حا\frac{هـ}{2}\right)^2$

وكان $ع = \frac{ع_1\,ع_2}{ع_3}$ أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد ع ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية عند $هـ = \frac{\pi}{6}$

---

٣٠ إذا كان : $ع_1 = 2\left(حا\frac{\pi}{3} + ت\,حتا\frac{\pi}{3}\right)$ ، $ع_2 = \sqrt{2}\left(حا\frac{\pi}{4} - ت\,حتا\frac{\pi}{4}\right)$

، $ع_3 = 1 + \sqrt{3}\,ت$

أوجد العدد $ع = \frac{ع_1^3 \times ع_2^4}{ع_3^4}$ على الصورة الأسية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية.

---

٣١ إذا كانت : $ع_1 = 1 + \sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = ت - \sqrt{3}$ ، $ع_3 = ٥١٢\,ت$ وكان $ع = \frac{ع_1 \times ع_2^{11}}{ع_3}$

فأوجد : سعة ومقياس العدد ع ، **ثم أوجد :** $\sqrt[3]{ع}$

---

٣٢ إذا كان : $\sqrt{\frac{18+ت}{2+3ت}} = س + ت\,ص$ حيث $ت^2 = -1$ ، س ، ص ∈ ح

فأوجد : قيمة كلاً من س ، ص

---

٣٣ **أوجد قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق كلاً مما يأتي :**

(١) $(س + ت\,ص)^2 = \frac{36 - 2ت}{3+2ت}$

(٢) $(س + ت\,ص)^2\,(1 + ت) + 7 - ت = 0$

(٣) $(س + ت\,ص)^2\,(1 + \sqrt{3}\,ت) = -11 + 5\sqrt{3}\,ت$

(٤) $(س + ت\,ص)^2 - 10\,(س + ت\,ص) + 41 = 0$

٢٤ **أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث س ∈ ك :**

(١) $س^2 - (1 + ت)\,س - 6 + 3ت = 0$.

(٢) $(1 - ت)\,س^2 - (6 - 4ت)\,س + 9 - 7ت = 0$.

(٣) $ت\,س^2 + (1 - 2ت)\,س + 3ت = 1$

---

٢٥ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند رؤوس ....

(أ) مثلث متساوي الأضلاع. (ب) مربع.

(جـ) خماسي منتظم. (د) سداسي منتظم.

(٢) إذا كانت : $ع_0$ ، $ع_1$ ، ... ، $ع_5$ تمثل الجذور السداسية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند فإن : ق$(\angle ع_ر\,و\,ع_{ر+1}) =$ .... حيث $0 \leq ر \leq 5$ ، ر ∈ ص

(أ) $30°$ (ب) $60°$ (جـ) $90°$ (د) $120°$

(٣) إذا كان : $\sqrt{7 + 24ت} = س + ت\,ص$ فإن : $(س + ص)^2 =$ ....

(أ) ٧ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٩ (د) ٥٧٦

(٤) $\sqrt{5 + 12ت} =$ ....

(أ) $\pm(2 + 3ت)$ (ب) $\pm(3 + 2ت)$ (جـ) $\pm(2 - 3ت)$ (د) $\pm(3 - 2ت)$

(٥) إذا كان : $ع_1 = 2\left(حتا\frac{2\pi}{3} + ت\,حا\frac{2\pi}{3}\right)$ وكان $ع = -2ت\,\overline{ع_1}$

فإن أحد الجذور التربيعية للعدد (ع) هو ....

(أ) $\sqrt{2}\,هـ^{\frac{5\pi}{12}ت}$ (ب) $2\,هـ^{\frac{5\pi}{12}ت}$ (جـ) $\sqrt{2}\,هـ^{\frac{-7\pi}{12}ت}$ (د) $2\,هـ^{\frac{7\pi}{12}ت}$

(٦) إذا كانت : $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ هي الجذور التكعيبية للعدد $ع = 6 + 8ت$

فإن : $\frac{25\,ع_1^3 \times 4\,ع_2^6}{ع_3^{12}} =$ ....

(أ) $6 + 8ت$ (ب) $6 - 8ت$ (جـ) $3 + 4ت$ (د) $3 - 4ت$

(٧) إذا كان : ع عدد مركب مقياسه ١٦ وكان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ هما الجذران التربيعيان للعدد ع فإن طول القطعة المستقيمة التى طرفاها $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣٢ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٤

(٨) إذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ هى جذور المعادلة $ع^{٣} = ٤ + ٤\sqrt{٣}$ ت فإن مساحة المضلع الذى رؤوسه النقط التى تمثل $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ على مستوى أرجاند تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) $٣\sqrt{٣}$ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٩\sqrt{٣}$ (د) $١٢\sqrt{٣}$

(٩) (دور أول ٢٠٢٠) حاصل ضرب جذور المعادلة $س^{٤} - ١ = ٠$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ‎-١ (د) ت

(١٠) إذا كان : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ هى جذور المعادلة : $ع^{٣} = أ$ حيث $أ \neq$ صفر وكانت سعة $(ع_{١}) = \theta$ فإن سعة $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ هما .... على الترتيب.

(أ) θ ، θ (ب) $\theta + \frac{\pi}{٣}$ ، $\theta + \frac{٢\pi}{٣}$

(جـ) $\theta + \frac{٢\pi}{٣}$ ، $\theta + \frac{٤\pi}{٣}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$

(١١) إذا كان العدد المركب (ع) وجذوره التربيعية تقع جميعًا على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل فأى مما يأتى يكون معلوم علمًا تامًا ؟

(أ) $|ع|$ (ب) سعة (ع)

(جـ) الجزء الحقيقى للعدد (ع) (د) الجزء التخيلى للعدد (ع)

(١٢) إذا كانت الأعداد المركبة ع ، $ع^{٢}$ ، $ع^{٣}$ تقع على دائرة واحدة فى مستوى أرجاند مركزها نقطة الأصل فأى الجمل الآتية يكون صحيح ؟

(أ) سعة ع = سعة $ع^{٢}$ = سعة $ع^{٣}$ (ب) $|ع| = ١$

(جـ) $|ع| = |ع^{٢}| = |ع^{٣}| \neq ١$

(د) المثلث الذى رؤوسه ع ، $ع^{٢}$ ، $ع^{٣}$ يكون قائم الزاوية.

(١٣) إذا كان ع عدد مركب على الصورة ع = ل (جتا π + ت جا π) فإن الجذران التربيعيان للعدد ع يكونان ....

(أ) حقيقيان ولهما نفس الاشارة. (ب) حقيقيان ومختلفان فى الاشارة.

(جـ) تخيليان ولهما نفس الاشارة. (د) تخيليان ومختلفان فى الاشارة.

(١٤) إذا كان ع عدد مركب فإن عدد قيم العدد $ع^{\frac{٤}{٣}}$ هى ....

(أ) قيمة واحدة. (ب) قيمتان.

(جـ) ٣ قيم. (د) ٤ قيم.

(١٥) مجموع الجذرين التربيعين للعدد المركب (٣ – ٤ ت) يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\pm(\sqrt{٣} - ٢$ ت$)$

(جـ) $\pm$ (٢ – ت) (د) ٦

(١٦) إذا كانت : $ع_{١} = ٤ هـ^{\frac{٥\pi}{٦}ت}$ ، $ع_{٢}$ = ت فإن : $\sqrt{ع_{١} ع_{٢}}$ = ...

(أ) $\pm(١ + \sqrt{٣}$ ت$)$ (ب) $\pm(١ - \sqrt{٣}$ ت$)$

(جـ) $\pm\sqrt{٣}$ ت (د) $٢ \pm \sqrt{٣}$ ت

(١٧) الجذران التربيعيان للعدد ت هما ....

(أ) $هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$ ، $هـ^{-\frac{٣}{٤}\pi ت}$ (ب) $هـ^{\frac{-\pi}{٤}ت}$ ، $هـ^{\frac{٣}{٤}\pi ت}$

(جـ) $هـ^{-\frac{\pi}{٤}ت}$ ، $هـ^{\frac{\pi}{٤}ت}$ (د) $هـ^{-\frac{٣}{٤}\pi ت}$ ، $هـ^{\frac{٣}{٤}\pi ت}$

(١٨) إذا كان : س + ت ص = ت + $\sqrt{ت}$ فإن : س + ص = ...

(أ) $١ + \sqrt{٢}$ (ب) $١ - \sqrt{٢}$ (جـ) $١ \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) $١ \pm \sqrt{٢}$

(١٩) إذا كان : (١ – ت) س + (١ + ت) ص + ٢ ت = ٠ .

فإن : المقدار $\sqrt{٣ س + ٤ ص ت}$ = ...

(أ) $\pm$ (٥ – ت) (ب) $\pm$ (٢ – ت) (جـ) ٣ + ت ، ١ – ت (د) ٦ ، – ت

(٢٠) إذا كانت : $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ ، $ع_{٤}$ هى جذور المعادلة $ع^{٤} = أ$ فإن المضلع الذى يصل بين النقط التى تمثل $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ ، $ع_{٤}$ على مستوى أرجاند يمثل ....

(أ) مستطيلًا. (ب) مربعًا. (جـ) متوازى أضلاع. (د) شبه منحرف.

(٢١) إذا كانت : $ع_{١} = ٢ هـ^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ ، $ع_{١} ع_{٢} = ٨ هـ^{\frac{١١\pi}{٣}ت}$

فإن حاصل ضرب الجذرين التربيعيين للعدد $ع_{٢}$ = ...

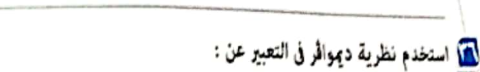
(أ) $٤ هـ^{\pi ت}$ (ب) ٤ (جـ) $٤ هـ^{\frac{\pi}{٢}ت}$ (أ) ١٦

2 الوحدة — • مستويات عليا

٣٥ إذا كان الشكل المقابل يمثل العدد المركب ع



أى من الأشكال الآتية يمثل الجذرين التربيعيين للعدد ع ؟



٣٦ استخدم نظرية ديموافر فى التعبير عن :

(١) جتا ٣ θ بدلالة قوى جتا θ (٢) جا ٣ θ بدلالة قوى جا θ

٣٧ استخدم نظرية ديموافر لإثبات أن :

(١) جتا ٤ θ = ٨ جتا^{٤} θ − ٨ جتا^{٢} θ + ١ ، جا ٤ θ = ٤ (جا θ جتا^{٣} θ − جا^{٣} θ جتا θ)

(٢) جا ٥ θ = ١٦ جا^{٥} θ − ٢٠ جا^{٣} θ + ٥ جا θ

، جتا ٥ θ = ١٦ جتا^{٥} θ − ٢٠ جتا^{٣} θ + ٥ جتا θ

٣٨ أثبت أن : جتا^{٤} θ = $\frac{١}{٨}$ (جتا ٤ θ + ٤ جتا ٢ θ + ٣)

٣٩ (دور أول ٢٠١٦) إذا كان : $\sqrt[٣]{س + ص ت}$ = أ + ب ت

فأثبت أن : $\frac{س}{أ} - \frac{ص}{ب}$ = ٤ (ب^{٢} − أ^{٢})

الدرس 4 الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

نعلم أن الصورة المثلثية للعدد واحد هى : جتا ٠° + ت جا ٠° .

فإذا كان : ع = ١

فإن الجذور التكعيبية للعدد ع تنتج من العلاقة :

(ع)$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا ٠ + ت جا ٠)$^{\frac{١}{٣}}$ (وباستخدام نظرية ديموافر)

∴ (ع)$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا $\frac{٢ \pi ر}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ \pi ر}{٣}$) حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

، عند ر = ٠ ∴ ع$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا ٠° + ت جا ٠°) = ١

، عند ر = ١ ∴ ع$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$) = $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

، عند ر = ٢ ∴ ع$^{\frac{١}{٣}}$ = (جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٤\pi}{٣}$) = $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

أى أن : الجذور التكعيبية للعدد ١ هى : ١ ، $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

لاحظ أن

يمكن الحصول على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أيضًا بحل المعادلة ع^{٣} = ١ كالآتى :

أى ع^{٣} − ١ = ٠ ∴ (ع − ١) (ع^{٢} + ع + ١) = ٠

وعند ع − ١ = ٠ ∴ ع = ١

وعند ع^{٢} + ع + ١ = ٠ ، وباستخدام القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية :

∴ ع = $\frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤}}{٢}$ = $\frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$ = $\frac{-١ \pm \sqrt{٣} ت}{٢}$ = $\frac{-١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

∴ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى : ١ ، $\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

الوحدة 2

ملاحظة

الجذور التكعيبية للعدد الصحيح واحد هى أعداد مركبة أحدهما حقيقى وهو العدد ١

والجذران الآخران $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت غير حقيقيين ولكنهما عددان مركبان مترافقان مربع أحدهما يساوى الآخر أى :

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)^2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت$ ، $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)^2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت$

فإذا رمزنا لأحدهما بالرمز ω (أوميجا) فإن الجذر الآخر = ω^2

وتكون : الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى : ١ ، ω ، ω^2

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

① الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يمثلها نقط فى شكل أرجاند تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ١ وتمثل رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.

$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، ١٢٠° ، ١٢٠°

② مجموع الجذور التكعيبية الثلاثة للواحد الصحيح = صفر

أى أن : $1+\omega+\omega^2 =$ صفر

الإثبات :

$1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت =$ صفر

إثبات آخر :

∵ ω ، ω^2 هما جذرا المعادلة : ع² + ع + ١ = ٠ الناتجة من حل المعادلة : ع³ = ١

∴ مجموع الجذرين : $\omega+\omega^2 = \frac{-\text{معامل ع}}{\text{معامل ع}^2} = \frac{-1}{1} = -1$

∴ $1+\omega+\omega^2 = 1+(-1) =$ صفر

ملاحظة

∵ $1+\omega+\omega^2 = 0$

∴

$\omega+\omega^2 = -1$	$1+\omega = -\omega^2$	$1+\omega^2 = -\omega$

③ حاصل ضرب الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ١

أى أن : $\omega \times \omega^2 = 1$ ∴ $\omega^3 = 1$

الإثبات :

$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right) = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$

∴ $\omega \times \omega^2 = 1$ ∴ $\omega^3 = 1$

إثبات آخر :

∵ ω ، ω^2 هما جذرا المعادلة : ع² + ع + ١ = ٠

∴ حاصل ضرب الجذرين : $\omega \times \omega^2 = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل ع}^2} = \frac{1}{1} = 1$

أى أن : $\omega^3 = 1$

④ الفرق بين الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = $\pm\sqrt{3}$ ت

أى أن : $\omega-\omega^2 = \pm\sqrt{3}$ ت ، $\omega^2-\omega = \pm\sqrt{3}$ ت

الإثبات :

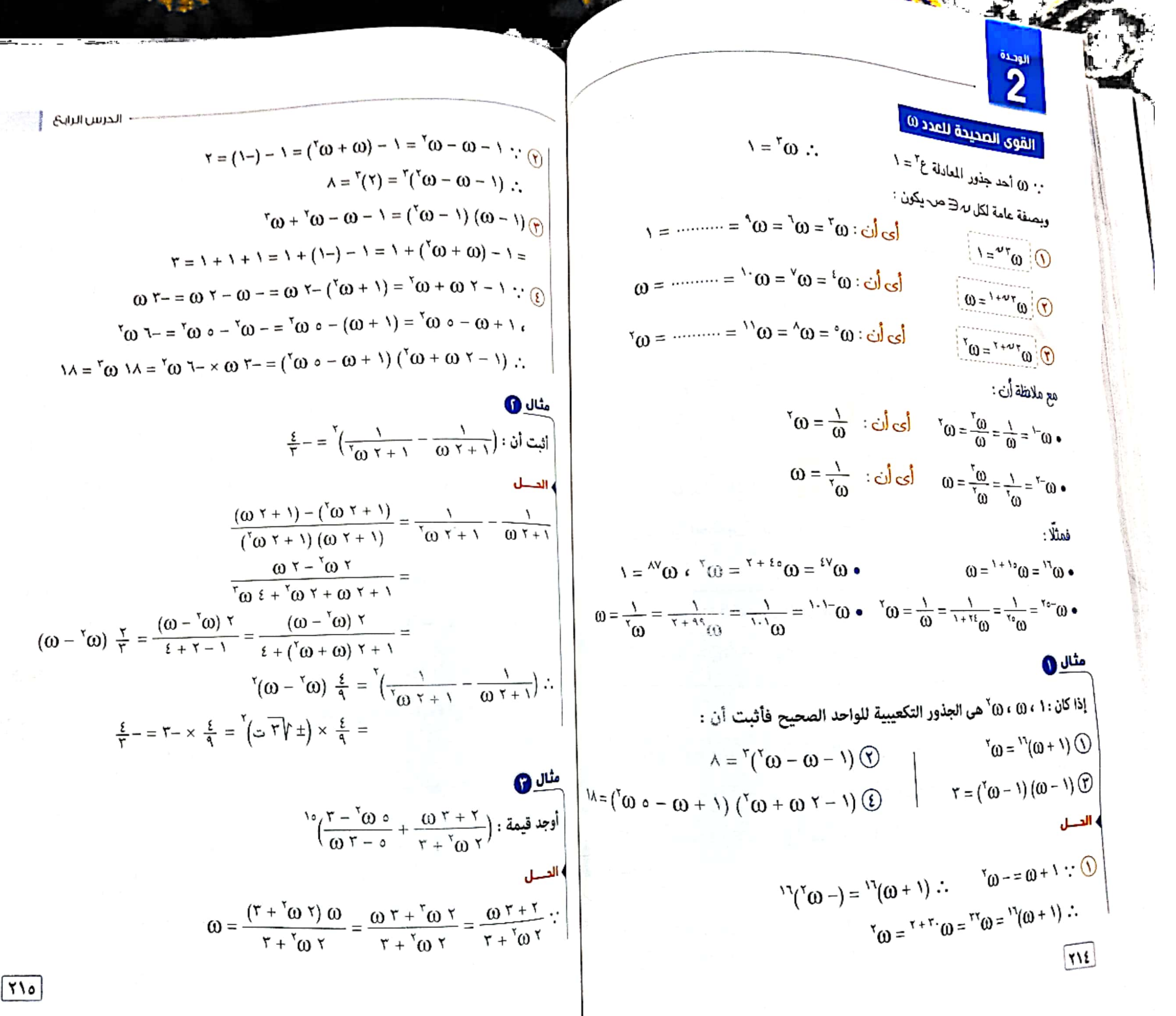
∵ $(\omega-\omega^2)^2 = (\omega^2-\omega)^2 = \omega^4 - 2\omega^3 + \omega^2$

$= \omega^3 \times \omega - 2 \times 1 + \omega^2 = \omega+\omega^2-2 = -1-2 = -3$

∴ $\omega-\omega^2 = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}$ ت ، $\omega^2-\omega = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}$ ت

ملاحظة

إذا كان : ع = أ + ب ω فإن : $\bar{ع}$ = أ + ب ω^2 حيث أ ∈ ح ، ب ∈ ح



الوحدة 2

القوى الصحيحة للعدد ω

∵ ω أحد جذور المعادلة $ع^{٣} = ١$ ∴ $\omega^{٣} = ١$

وبصفة عامة لكل ن ∈ ص يكون :

① $\omega^{٣ن} = ١$ أى أن : $\omega^{٣} = \omega^{٦} = \omega^{٩} = \dots\dots = ١$

② $\omega^{٣ن+١} = \omega$ أى أن : $\omega^{٤} = \omega^{٧} = \omega^{١٠} = \dots\dots = \omega$

③ $\omega^{٣ن+٢} = \omega^{٢}$ أى أن : $\omega^{٥} = \omega^{٨} = \omega^{١١} = \dots\dots = \omega^{٢}$

مع ملاحظة أن :

• $\omega^{-١} = \frac{١}{\omega} = \frac{\omega^{٣}}{\omega} = \omega^{٢}$ أى أن : $\frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$

• $\omega^{-٢} = \frac{١}{\omega^{٢}} = \frac{\omega^{٣}}{\omega^{٢}} = \omega$ أى أن : $\frac{١}{\omega^{٢}} = \omega$

فمثلًا :

• $\omega^{١٦} = \omega^{١٥+١} = \omega$ • $\omega^{٤٧} = \omega^{٤٥+٢} = \omega^{٢}$ ، $\omega^{٨٧} = ١$

• $\omega^{-٢٥} = \frac{١}{\omega^{٢٥}} = \frac{١}{\omega^{٢٤+١}} = \frac{١}{\omega} = \omega^{٢}$ • $\omega^{-١٠١} = \frac{١}{\omega^{١٠١}} = \frac{١}{\omega^{٩٩+٢}} = \frac{١}{\omega^{٢}} = \omega$

مثال ١

إذا كان : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

① $(١ + \omega)^{١٦} = \omega^{٢}$ ② $(١ - \omega - \omega^{٢})^{٣} = ٨$

③ $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢}) = ٣$ ④ $(١ - ٢\omega + \omega^{٢})(١ + \omega - ٥\omega^{٢}) = ١٨$

الحل

① ∵ $١ + \omega = -\omega^{٢}$ ∴ $(١ + \omega)^{١٦} = (-\omega^{٢})^{١٦}$

∴ $(١ + \omega)^{١٦} = \omega^{٣٢} = \omega^{٣٠+٢} = \omega^{٢}$

② ∵ $١ - \omega - \omega^{٢} = ١ - (\omega + \omega^{٢}) = ١ - (-١) = ٢$

∴ $(١ - \omega - \omega^{٢})^{٣} = (٢)^{٣} = ٨$

③ $(١ - \omega)(١ - \omega^{٢}) = ١ - \omega - \omega^{٢} + \omega^{٣}$

$= ١ - (\omega + \omega^{٢}) + ١ = ١ - (-١) + ١ = ١ + ١ + ١ = ٣$

④ ∵ $١ - ٢\omega + \omega^{٢} = (١ + \omega^{٢}) - ٢\omega = -\omega - ٢\omega = -٣\omega$

، $١ + \omega - ٥\omega^{٢} = (١ + \omega) - ٥\omega^{٢} = -\omega^{٢} - ٥\omega^{٢} = -٦\omega^{٢}$

∴ $(١ - ٢\omega + \omega^{٢})(١ + \omega - ٥\omega^{٢}) = -٣\omega \times -٦\omega^{٢} = ١٨\omega^{٣} = ١٨$

مثال ٢

أثبت أن : $\left(\frac{١}{١ + ٢\omega} - \frac{١}{١ + ٢\omega^{٢}}\right)^{٢} = -\frac{٤}{٣}$

الحل

$\frac{١}{١ + ٢\omega} - \frac{١}{١ + ٢\omega^{٢}} = \frac{(١ + ٢\omega^{٢}) - (١ + ٢\omega)}{(١ + ٢\omega)(١ + ٢\omega^{٢})}$

$= \frac{٢\omega^{٢} - ٢\omega}{١ + ٢\omega + ٢\omega^{٢} + ٤\omega^{٣}}$

$= \frac{٢(\omega^{٢} - \omega)}{١ + ٢(\omega + \omega^{٢}) + ٤} = \frac{٢(\omega^{٢} - \omega)}{١ - ٢ + ٤} = \frac{٢}{٣}(\omega^{٢} - \omega)$

∴ $\left(\frac{١}{١ + ٢\omega} - \frac{١}{١ + ٢\omega^{٢}}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}(\omega^{٢} - \omega)^{٢}$

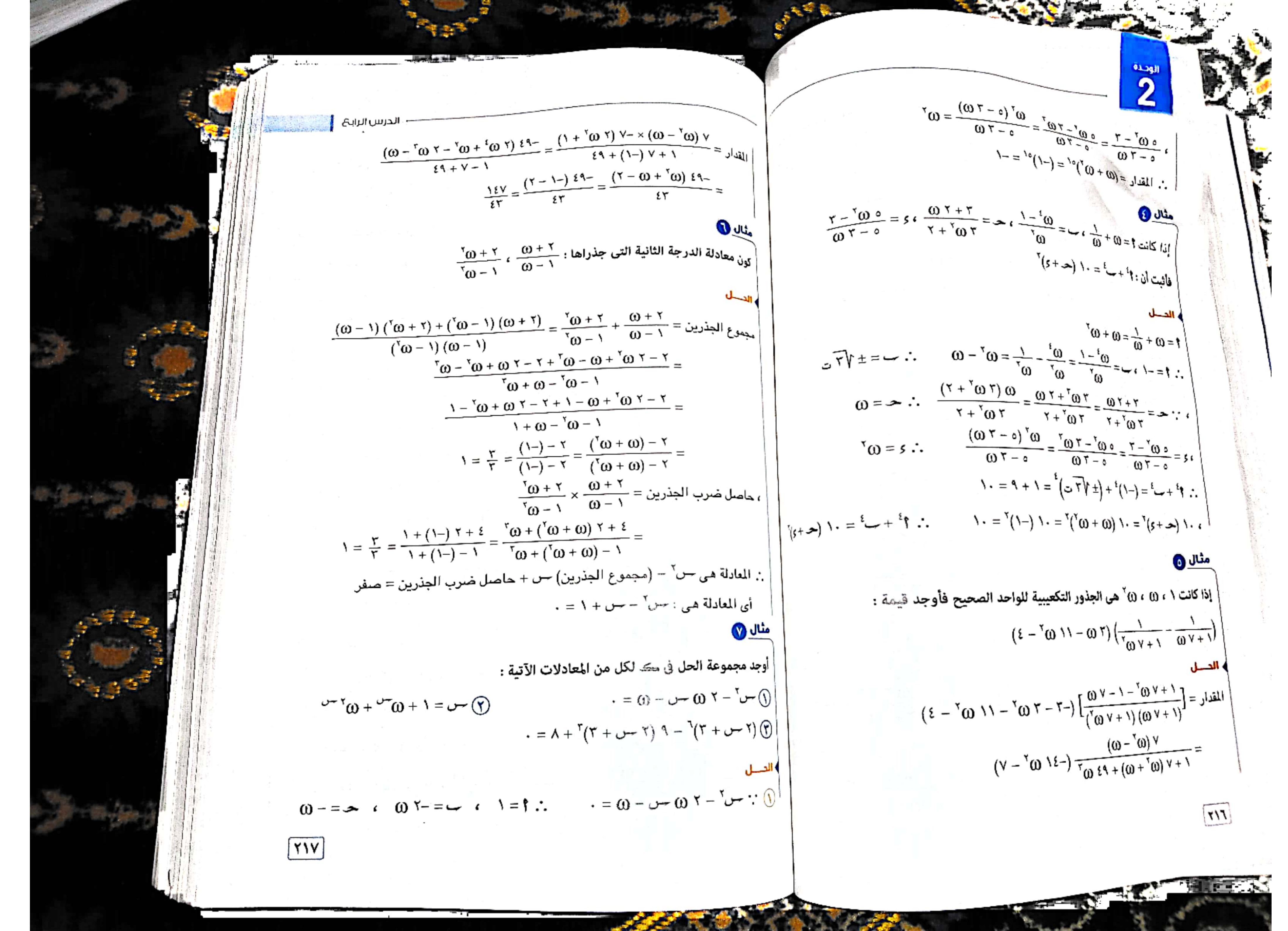
$= \frac{٤}{٩} \times (\pm\sqrt{٣}\,ت)^{٢} = \frac{٤}{٩} \times -٣ = -\frac{٤}{٣}$

مثال ٣

أوجد قيمة : $\left(\frac{٢ + ٣\omega}{٢\omega^{٢} + ٣} + \frac{٥\omega^{٢} - ٣}{٥ - ٣\omega}\right)^{١٥}$

الحل

∵ $\frac{٢ + ٣\omega}{٢\omega^{٢} + ٣} = \frac{٢\omega^{٣} + ٣\omega}{٢\omega^{٢} + ٣} = \frac{\omega(٢\omega^{٢} + ٣)}{٢\omega^{٢} + ٣} = \omega$



، $د = \frac{5\omega^2 - 3}{5 - 3\omega} = \frac{5\omega^2 - 3\omega^3}{5 - 3\omega} = \frac{\omega^2(5 - 3\omega)}{5 - 3\omega} = \omega^2$

∴ المقدار $= (\omega + \omega^2)^{10} = (-1)^{10} = -1$

مثال ٤

إذا كانت $أ = \omega + \frac{1}{\omega}$ ، $ب = \frac{\omega^4 - 1}{\omega^2}$ ، $ح = \frac{3 + 2\omega}{3\omega^2 + 2}$ ، $د = \frac{5\omega^2 - 3}{5 - 3\omega}$

فأثبت أن: $أ^4 + ب^4 = 10\,(ح + د)^2$

الحل

$أ = \omega + \frac{1}{\omega} = \omega + \omega^2$

∴ $أ = -1$ ، $ب = \frac{\omega^4 - 1}{\omega^2} = \frac{\omega^4}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} = \omega^2 - \omega$ ∴ $ب = \pm\sqrt{3}\,ت$

، ∵ $ح = \frac{3 + 2\omega}{3\omega^2 + 2} = \frac{3\omega^3 + 2\omega}{3\omega^2 + 2} = \frac{\omega(3\omega^2 + 2)}{3\omega^2 + 2}$ ∴ $ح = \omega$

، $د = \frac{5\omega^2 - 3}{5 - 3\omega} = \frac{5\omega^2 - 3\omega^3}{5 - 3\omega} = \frac{\omega^2(5 - 3\omega)}{5 - 3\omega}$ ∴ $د = \omega^2$

∴ $أ^4 + ب^4 = (-1)^4 + (\pm\sqrt{3}\,ت)^4 = 1 + 9 = 10$

، $10\,(ح + د)^2 = 10\,(\omega + \omega^2)^2 = 10\,(-1)^2 = 10$ ∴ $أ^4 + ب^4 = 10\,(ح + د)^2$

مثال ٥

إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة:

$$\left(\frac{1}{1 + 7\omega} - \frac{1}{1 + 7\omega^2}\right)(3\omega - 11\omega^2 - 4)$$

الحل

المقدار $= \left[\frac{1 + 7\omega^2 - 1 - 7\omega}{(1 + 7\omega)(1 + 7\omega^2)}\right](-3 - 3\omega^2 - 11\omega^2 - 4)$

$= \frac{7(\omega^2 - \omega)}{1 + 7(\omega + \omega^2) + 49\omega^3}(-14\omega^2 - 7)$

المقدار $= \frac{7(\omega^2 - \omega) \times -7(2\omega^2 + 1)}{1 + 7(-1) + 49} = \frac{-49(2\omega^4 + \omega^2 - 2\omega^3 - \omega)}{1 - 7 + 49}$

$= \frac{-49(\omega^2 + \omega - 2)}{43} = \frac{-49(-1 - 2)}{43} = \frac{147}{43}$

مثال ٦

كون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها: $\frac{2 + \omega}{1 - \omega}$ ، $\frac{2 + \omega^2}{1 - \omega^2}$

الحل

مجموع الجذرين $= \frac{2 + \omega}{1 - \omega} + \frac{2 + \omega^2}{1 - \omega^2} = \frac{(2 + \omega)(1 - \omega^2) + (2 + \omega^2)(1 - \omega)}{(1 - \omega)(1 - \omega^2)}$

$= \frac{2 - 2\omega^2 + \omega - \omega^3 + 2 + \omega^2 - 2\omega - \omega^3}{1 - \omega^2 - \omega + \omega^3}$

$= \frac{2 - 2\omega^2 + \omega - 1 + 2 - 2\omega + \omega^2 - 1}{1 - \omega^2 - \omega + 1}$

$= \frac{2 - (\omega + \omega^2)}{2 - (\omega + \omega^2)} = \frac{2 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$

، حاصل ضرب الجذرين $= \frac{2 + \omega}{1 - \omega} \times \frac{2 + \omega^2}{1 - \omega^2}$

$= \frac{4 + 2(\omega + \omega^2) + \omega^3}{1 - (\omega + \omega^2) + \omega^3} = \frac{4 + 2(-1) + 1}{1 - (-1) + 1} = \frac{3}{3} = 1$

∴ المعادلة هي $س^2$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = صفر

أي المعادلة هي: $س^2 - س + 1 = 0$

مثال ٧

أوجد مجموعة الحل في ك لكل من المعادلات الآتية:

(١) $س^2 - 2\omega\,س - \omega = 0$

(٢) $س = 1 + \omega^{س} + \omega^{2س}$

(٣) $(2س + 3)^6 - 9\,(2س + 3)^3 + 8 = 0$

الحل

(١) ∵ $س^2 - 2\omega\,س - \omega = 0$ ∴ $أ = 1$ ، $ب = -2\omega$ ، $ح = -\omega$



$\therefore \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{جـ}}}{2\text{أ}} = \frac{2\omega \pm \sqrt{4\omega^2 + 4\omega}}{2}$

$= \frac{2\omega \pm \sqrt{4(\omega^2 + \omega)}}{2} = \frac{2\omega \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2\omega \pm 2\text{ت}}{2} = \omega \pm \text{ت}$

∴ مجموعة الحل = $\{\omega + \text{ت} ، \omega - \text{ت}\}$

(٢) $\because \text{س} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$ $\qquad \therefore \text{س} - 1 = \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$

$\therefore (\text{س} - 1)^2 = (\omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}})^2$

$\therefore \text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = \omega^{2\text{س}} + 2\omega^{3\text{س}} + \omega^{4\text{س}}$

$\therefore \text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = \omega^{2\text{س}} + 2 + \omega^{\text{س}}$

$\therefore \text{س}^2 - 2\text{س} - 1 = \omega^{2\text{س}} + \omega^{\text{س}}$ ، $\because \omega^{2\text{س}} + \omega^{\text{س}} = \text{س} - 1$

$\therefore \text{س}^2 - 2\text{س} - 1 = \text{س} - 1$

$\therefore \text{س}^2 - 3\text{س} = 0$ $\qquad \therefore \text{س}(\text{س} - 3) = 0$

∴ س = ٠ (لا تحقق المعادلة) أو س − ٣ = ٠ ومنها س = ٣ (تحقق المعادلة)

∴ مجموعة الحل = $\{3\}$

(٣) $(2\text{س} + 3)^6 - 9(2\text{س} + 3)^3 + 8 = 0$

$\therefore \left((2\text{س} + 3)^3 - 1\right)\left((2\text{س} + 3)^3 - 8\right) = 0$

∴ $(2\text{س} + 3)^3 = 1$ ومنها $2\text{س} + 3 = 1$ $\qquad \therefore \text{س} = -1$

أو $2\text{س} + 3 = \omega$ $\qquad \therefore \text{س} = \frac{\omega - 3}{2}$

أو $2\text{س} + 3 = \omega^2$ $\qquad \therefore \text{س} = \frac{\omega^2 - 3}{2}$

أو $(2\text{س} + 3)^3 = 8$ ومنها $2\text{س} + 3 = 2$ $\qquad \therefore \text{س} = \frac{-1}{2}$

أو $2\text{س} + 3 = 2\omega$ $\qquad \therefore \text{س} = \frac{2\omega - 3}{2}$

أو $2\text{س} + 3 = 2\omega^2$ $\qquad \therefore \text{س} = \frac{2\omega^2 - 3}{2}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{-1 ، \frac{\omega - 3}{2} ، \frac{\omega^2 - 3}{2} ، \frac{-1}{2} ، \frac{2\omega - 3}{2} ، \frac{2\omega^2 - 3}{2}\right\}$

مثال ٨

إذا كان: $(1 - \text{ت})(\text{س} + \text{ت ص}) = 19\left(\frac{1}{2 - 3\omega^2} + \frac{1}{5 + 3\omega^2}\right)$

فأوجد قيمة كلًا من: س ، ص

الحل

$(1 - \text{ت})(\text{س} + \text{ت ص}) = 19\left(\frac{5 + 3\omega^2 + 2 - 3\omega^2}{(2 - 3\omega^2)(5 + 3\omega^2)}\right)$

$= 19\left(\frac{7}{10 + 6\omega^2 - 15\omega^2 - 9\omega^4}\right)$

$= 19\left(\frac{7}{10 - 9\omega^2 - 9\omega}\right) = 19\left(\frac{7}{10 - 9(\omega^2 + \omega)}\right)$

$= 19\left(\frac{7}{10 + 9}\right) = 7$

$\therefore \text{س} + \text{ت ص} = \frac{7}{1 - \text{ت}} \times \frac{1 + \text{ت}}{1 + \text{ت}} = \frac{7 + 7\text{ت}}{1 + 1} = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}\text{ت}$

$\therefore \text{س} = \frac{7}{2}$ ، $\text{ص} = \frac{7}{2}$

مثال ٩

أوجد قيمة: $\sum_{\text{ر}=1}^{20} (-1)^{\text{ر}+1} \times \omega^{\text{ر}}$

الحل

$\sum_{\text{ر}=1}^{20} (-1)^{\text{ر}+1} \times \omega^{\text{ر}} = (-1)^2\omega + (-1)^3 \times \omega^2 + (-1)^4 \times \omega^3 + \dots\dots + (-1)^{21} \times \omega^{20}$

$= \omega - \omega^2 + \omega^3 - \dots\dots - \omega^{20}$

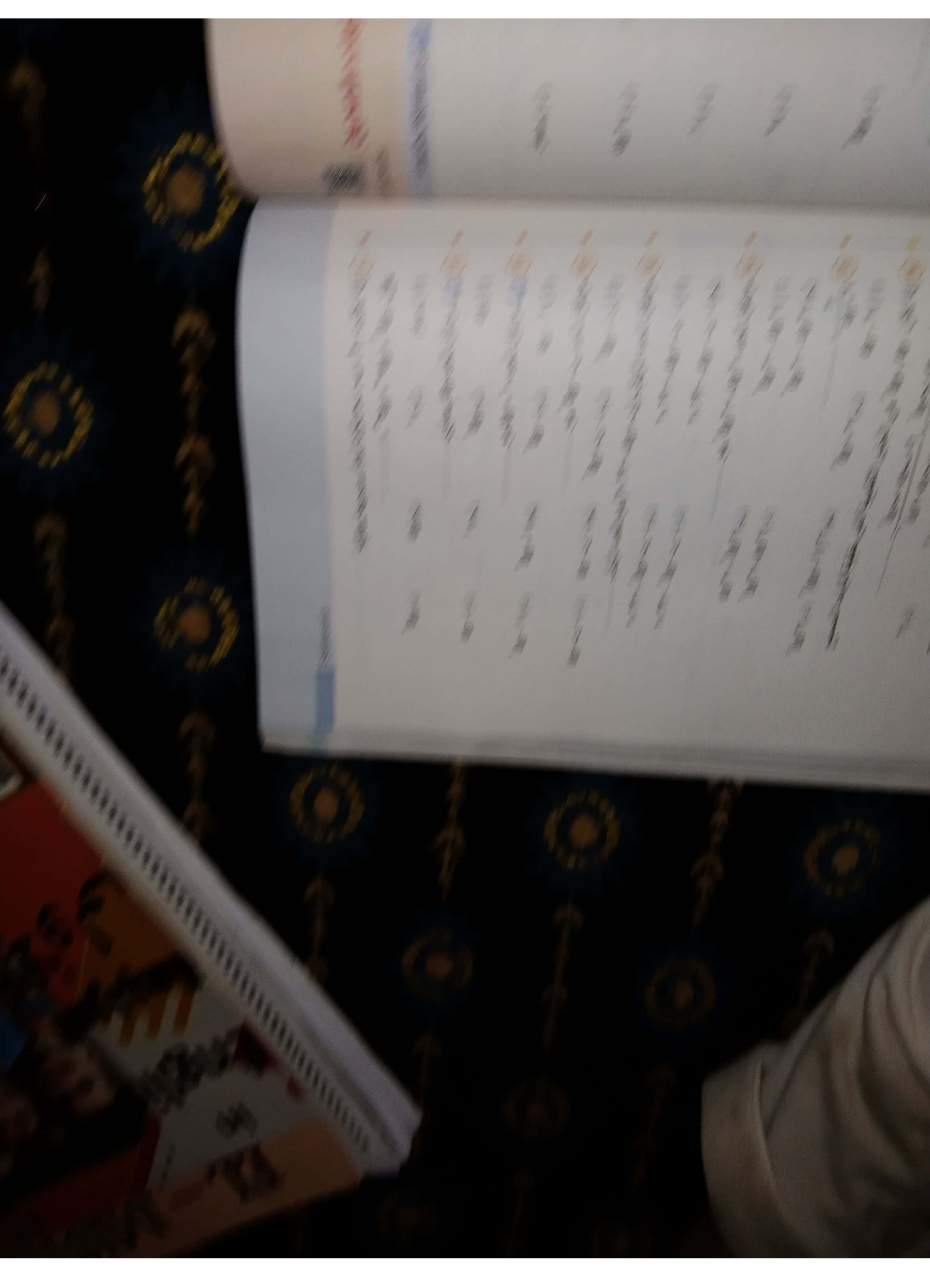
وهى تمثل مجموع متسلسلة هندسية حدها الأول = ω ، وأساسها $\text{ر} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$

وعدد حدودها ٢٠ حدًا.

$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1}$ ، $\therefore \text{جـ}_{20} = \frac{\omega\left((-\omega)^{20} - 1\right)}{-\omega - 1}$

$\therefore \text{جـ}_{20} = \frac{\omega(\omega^{20} - 1)}{-(\omega + 1)} = \frac{\omega^{21} - \omega}{\omega^2} = \omega^{19} - \frac{1}{\omega} = \omega - \omega^2 = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

$\therefore \sum_{\text{ر}=1}^{20} (-1)^{\text{ر}+1} \times \omega^{\text{ر}} = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$



(١٩) (دور ثان ٢٠١٧) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots+\omega^{100}=$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) $-\omega^2$

(٢٠) $\left(\omega^2+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^2=$ ....

(أ) ٢ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) −٥

(٢١) أى النواتج الآتية تنتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية ؟

(أ) $\frac{1+\omega}{1+\omega^2}$ (ب) $(1+\omega)(2+\omega^2)$

(جـ) $(3+\omega)(3+\omega^2)$ (د) $(\omega^2-\omega)^3$

(٢٢) إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقين وكان : $ع_1=(\text{حـ}+\text{ء})\,\omega^2+(\text{حـ}-\text{ء})\,\omega$

، $ع_2=7\omega^2+5\omega$ فإن : حـ × ء = ...

(أ) ٧ (ب) −٥ (جـ) −٤ (د) −٦

(٢٣) إذا كان : س = أ ، ص = ب ω ، ع = حـ ω^2

فإن : $\frac{\text{س}}{\text{أ}}+\frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ع}^2}{\text{حـ}^2}=$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ω

(٢٤) جا $\left[(\omega^{10}+\omega^{23})\,\pi+\frac{\pi}{4}\right]=$ ....

(أ) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٢٥) إذا كان : $ع=2+3\omega^2$ فإن : $ع\,\bar{ع}=$ ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

(٢٦) $\left(\frac{\text{أ}}{\omega}-\frac{\text{أ}}{\omega^2}+\frac{2\text{أ}}{\omega^4}-\frac{2\text{أ}}{\omega^5}\right)^2=$ ....

(أ) $-48\,\text{أ}^2$ (ب) $48\,\text{أ}^2$ (جـ) $16\,\text{أ}^2$ (د) $-16\,\text{أ}^2$

(٢٧) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، وكانت $\text{س}=\frac{1}{1+\omega\,ت}$ ، $\text{ص}=\frac{\omega+ت}{1+\omega^2\,ت}$ فإن : س − ص = ...

(أ) ت + ١ (ب) ١ − ت (جـ) ١ (د) ت

١ إذا كان : ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $(1-\omega)(1-\omega^2)$

(٢) $5+3\omega+3\omega^2$

(٣) $5+5\omega-5\omega^2$

(٤) $(2+5\omega+2\omega^2)^5$

(٥) $(1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

(٦) $(1+\omega^2)^{10}$

(٧) $(1+\omega+2\omega^2)^2+(1+2\omega+\omega^2)^2$

(٨) $(1+\omega)^3+(1-\omega-\omega^2)^3$

(٩) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1+\omega^3)$

(١٠) $\left(1-\frac{2}{\omega}-\frac{2}{\omega^2}\right)(3-5\omega-5\omega^2)$

(١١) $\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2$

(١٢) $\left(1+\frac{1}{\omega}+ت\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}+ت\right)$

٢ (دور أول ٢٠٠٥) إذا كانت : ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، أ ، ب ، حـ ، ء أعدادًا حقيقية فأوجد القيمة العددية للمقدار : $\frac{\text{أ}+\text{ب}\,\omega}{\text{أ}\,\omega^2+\text{ب}}+\frac{\text{حـ}\,\omega^2+\text{ء}}{\text{حـ}+\text{ء}\,\omega}$ «−١»

٤ إذا كانت : ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت صحة المتطابقات الآتية :

(١) $(1+\omega^2)^8=\omega^2$

(٢) $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$

(٣) $(1-\omega^2+\omega^4)^2+(1+\omega^2+\omega^4)^2=4\,\omega$

(٤) $\left(1+\omega+\frac{2}{\omega}\right)^2+\left(1+2\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(2+\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2=$ صفر

(٥) $\frac{5-4\omega+11\omega^2}{1-2\omega+3\omega^2}=3$

(٦) (دور أول ٢٠١١) $\left(\frac{1}{\omega^2(\omega+2)}-\frac{1}{1+2\omega^4}\right)^2=\frac{-27}{49}$

(٧) $\frac{1}{4+3\omega+2\omega^2}+\frac{1}{5+3\omega+4\omega^2}=1$

(٨) $\left(\frac{\omega}{1+2\omega}\right)^2+\left(\frac{1+2\omega^2}{\omega^2}\right)^2=\frac{-10}{3}\,\omega^2$

(٩) $\left(\frac{1}{1+\omega ت} - \frac{\omega + ت}{1+\omega^2 ت}\right)^8 = 16$

(١٠) $\frac{\omega^2(\omega-1)(\omega^2-1)}{(2\omega+1)(\omega^2+2)} = -1$

(١١) (دور أول ٢٠١٤) $\left(\frac{5-3\omega^2}{5\omega-3} - \frac{2-7\omega}{2\omega^2-7}\right)^4 = 9$

(١٢) $\frac{3+5\omega+3\omega^2}{1-2\omega-4\omega^2} + \frac{3+5\omega^2+3\omega}{1-2\omega^2-4\omega} = \frac{-2}{19}$

(١٣) $\left(\frac{4+\omega^2+2\omega}{\omega^2-2} + \frac{\omega-1}{3+\omega+2\omega^2}\right)^2 = 4$

(١٤) $\frac{5+3\omega^2}{2-\omega} + \frac{5+3\omega}{2-\omega^2} = \frac{22}{7}$

(١٥) $(5+4\omega)^3 \times (5+4\omega^2)^3 = 9261$

(١٦) $\left(\frac{\omega}{2+3\omega} - \frac{\omega^2}{2+3\omega^2}\right)^2 = \frac{-12}{49}$

(١٧) $\left(\frac{1}{1+2\omega^2} - \frac{1}{1+2\omega}\right)^4 = \frac{16}{9}$

(١٨) $(5+\omega)\left(\frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3\omega+2\omega^2}\right) = 4$

(١٩) $\left(5 - \frac{5}{1+\omega^2} + \frac{3}{\omega^2}\right)^6 = 64$

(٢٠) $\left(\frac{12-3\omega^2}{12\omega-3} - \frac{17-14\omega}{17\omega^2-14}\right)^{4ن} = 3^{2ن}$

(٢١) $\frac{س+\omega ص}{\omega^2 س+ص} + \frac{ع\omega^2+ل}{ع+\omega ل} = -1$

(٢٢) $\left[\frac{أ+ب\omega+ح\omega^2}{\omega^2 أ+ب+ح\omega} - \frac{ح+أ\omega^2+ب\omega}{ح\omega+ب\omega^2+أ}\right]^8 = 81$

(٢٣) $\left(س+\frac{ص}{\omega}\right)\left(س+\frac{ص}{\omega^2}\right) = (س-ص)^2 + س ص$

(٢٤) (دور أول ٢٠١٥) $(أ+ب\omega+أ\omega^2)(أ+ب\omega^2+أ\omega^4) = (ب-أ)^2$

5 إذا كانت : ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

(١) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5) = 2$

(٢) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$

(٣) $(2+3\omega^2)\left(2+\frac{3}{\omega^2}\right)\left(3+\frac{4}{\omega}\right)(3+4\omega) = 91$

(٤) $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^8+\omega^{16}) = 2^4$

(٥) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ ... إلى ١٤ عاملًا = ٢١٨٧

(٦) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)$ ... إلى ٢ن من العوامل = ١

(٧) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ ... إلى ٢ن من العوامل = $3^{ن}$

(٨) $(2+3\omega+2\omega^2)(2+3\omega^2+2\omega^4)(2+3\omega^4+2\omega^8)$ ... إلى ٢ن من العوامل = ١

6 (دور ثان ٢٠١٩) **أوجد في أبسط صورة قيمة المقدار :**

$\left[ك - \frac{ك-1}{1+\omega} + (ك+1)\,\omega^2\right]^8$ حيث : ك ∈ ح «٨١»

7 (دور ثان ٢٠٠٢) إذا كان : $\left(\frac{\omega^2}{1+2\omega^2}\right)^4 + \left(\frac{1+2\omega}{\omega}\right)^4 = أ\,\omega^2$

حيث ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة أ «$\frac{82}{9}$»

8 إذا كان : ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فأثبت أن : $\left(\frac{أ+1}{أ+(2أ+1)\,\omega+أ\,\omega^2}\right)^6$ لا يتوقف على قيمة أ

9 (دور ثان ٢٠١٨) إذا كان : $\frac{1+10\omega+10\omega^2}{1-3\omega-3\omega^2} = (ك\,ت)^2$

فأوجد قيمة العدد الحقيقي ك «$\pm\frac{3}{2}$»

10 إذا كانت : س = $2\omega - 3\omega^2$ ، ص = $3 + 5\omega^2$

فأوجد قيمة كلًا من : س + ص ، س ص ثم أثبت أن : $\frac{س^3+ص^3}{س^2+ص^2} = \frac{56}{37}$ «١ ، ١٩»

11 أثبت أن : $س^3 + ص^3 = (س+ص)(س+\omega ص)(س+\omega^2 ص)$

حيث ω أحد الجذور التكعيبية الغير الحقيقية للواحد الصحيح.

12 إذا كانت : $\omega = جتا \frac{2\pi}{3} + ت\, جا \frac{2\pi}{3}$ فأثبت أن : $(1+\omega)^{ن} = جتا \frac{ن\pi}{3} + ت\, جا \frac{ن\pi}{3}$

١٣ إذا كانت : $س = \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2}$ ... $س = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

فأثبت أن س أحد حلول المعادلة : $س^{10} + س^{5} + 1 = 0$.

١٤ إذا كانت : $س = \frac{-1 + \sqrt{3}\,ت}{2}$

فأثبت أن : $س^{6} + 6\,س^{5} + 15\,س^{4} + 20\,س^{3} + 15\,س^{2} + 6\,س = 0$.

١٥ أثبت أن : ω^{2} هي أحد جذور المعادلة : $3\,س^{11} + 2\,س^{8} + 5\,س^{7} + 5 = 0$.

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\left(2 + \frac{3}{\omega}\right)\left(2 + \frac{3}{\omega^{2}}\right)\left(3 - \frac{2}{\omega}\right)\left(3 - \frac{2}{\omega^{2}}\right) = $ ....

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ٢٦ (د) ١٣٣

② $\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{\omega^{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\omega^{4}}\right)\left(1 - \frac{1}{\omega^{8}}\right)$ ... إلى ١٠ عوامل = ...

(أ) ٢٤٣ (ب) ١٥ (جـ) ٥ (د) −٥

③ $\left(\frac{3 + 5\omega}{5 + 3\omega^{2}} - \frac{5 + 3\omega^{2}}{3 + 5\omega}\right)^{8} = $ ....

(أ) ١ (ب) ٢٧ (جـ) ٨١ (د) ٢٤٣

④ إذا كان : $أ = 2 - 3\omega - 3\omega^{2}$ ، $ب = 3 + 5\omega^{2}$ فإن : $أ^{2} + ب^{2} = $ ....

(أ) −٣٧ (ب) −١٩ (جـ) ١ (د) ٣٨

⑤ $(أ + ب\omega + أ\omega^{2})(أ + ب\omega^{2} + أ\omega^{4}) = $ ....

(أ) ١ (ب) $أ - ب$ (جـ) $(أ - ب)^{2}$ (د) $ب^{2} - أ^{2}$

⑥ (دور ثان ٢٠١٨) $\left(1 + 2\omega^{5} + \frac{1}{\omega^{2}}\right)\left(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^{4}}\right) = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

⑦ (دور ثان ٢٠١٩) $\frac{أ - ء\omega}{أ\omega^{2} - ء} - \omega^{2} = $ ....

(أ) $2\,ت$ (ب) $\pm\sqrt{3}\,ت$ (جـ) −٣ (د) ٣

⑧ (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : $ع = \omega^{س}$ فإن : $|ع| = $ .... حيث س عدد صحيح موجب.

(أ) ١ (ب) ω (جـ) س (د) ω^{2}

⑨ $\sum_{ر=1}^{ن} \omega^{ر} = $ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ω^{2}

⑩ $\sum_{ر=1}^{6} (1 + \omega^{ر}) = $ ....

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) ١ (د) $1 + \omega$

⑪ $1 + \sum_{ر=1}^{6} \omega^{ر} = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) $2 - \omega^{2}$

⑫ إذا كان : $ت^{12} = \omega^{12}$ فإن : ....

(أ) $ت = \omega$ (ب) $ت = \pm\,\omega$

(جـ) ت ، ω كلاهما أحد جذور المعادلة : $ع^{12} = 1$

(د) ت ، ω لا علاقة بينهما.

⑬ (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : $(1 + \omega)^{7} = أ + ب\omega$ حيث أ ، ب عددان حقيقيان

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٠ ، −١) (ب) (١ ، ١) (جـ) (٠ ، ١) (د) (١ ، −١)

⑭ إذا كان : $(1 + \omega)^{ن} = (1 + \omega^{2})^{ن}$ فإن أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هي ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

⑮ إذا كان : أ ، ب هما الجذران التكعيبيان غير الحقيقيين للعدد واحد

فإن : $أ ب + أ^{5} + ب^{5} = $ ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

(١٦) إذا كان : ٣ ، ٢ + ٢ ω^{2} جذرا لمعادلة تكعيبية ذات معاملات حقيقية فإن الجذر الثالث يساوى ....

(أ) ٢ + ω (ب) ٢ − ω (جـ) ω^{2} − ٢ (د) ٢ − ω^{2}

(١٧) قيمة العدد $(-1 + \sqrt{3}\,ت)^{48}$ حيث ت^٢ = −١ تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) 2^{24} (د) 2^{48}

(١٨) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}ت}{2}\right)^{3ن} + \left(\frac{-1+\sqrt{3}ت}{2}\right)^{3ن} = $ .... حيث ن ∈ ص

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ٢

(١٩) إذا كانت : ١ ، ω ، ω^{2} هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن : $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \frac{27}{128} + \cdots\right) + \omega + \omega^{2} = $ ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −ت (د) ت

(٢٠) حاصل ضرب الجذور التكعيبية للعدد الحقيقى س يساوى ....

(أ) س (ب) ω س (جـ) ω^{2} س^٢ (د) س^٣

(٢١) $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{22} + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{17} = $ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ω

(٢٢) إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ أعداد مركبة يمثلها رؤوس مثلث متساوى الأضلاع مركزه الهندسى نقطة الأصل فإن $ع_1 + ع_2 + ع_3 = $ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) ω^{2}

(٢٣) إذا كان : س + $\frac{1}{س}$ = −١ فإن : $س^{2021} + س^{-2021} = $ ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٢٤) مجموع جذور المعادلة $(ع - 2)^{3} = 1$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٦

(٢٥) إذا كان : ل = أ + بω + بω^{2} ، م = أω^{2} + بω عددان مركبان فإن العبارة الخاطئة فيما يلى هى ....

(أ) ل ، م كل منهما معكوس ضربى للآخر.

(ب) ل ، م مترافقان.

(جـ) ل^٢ − م^٢ = ± $\sqrt{3}$ ت (أ^٢ − ب^٢)

(د) ω ل + ω^{2} م ∈ ع

(٢٦) $\frac{14 + 6\omega + 21\omega^{2}}{8\omega^{2} - 7} = $ ....

(أ) −ω (ب) ω (جـ) ω^{2} (د) −ω^{2}

(٢٧) $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2}\omega$ ، $\frac{1}{2}\omega^{2}$ هى الجذور التكعيبية للعدد ....

(أ) ١ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ ت (د) $\frac{1}{8}$

(٢٨) ٢ ، $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ت ، $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ت هى الجذور التكعيبية للمعادلة ....

(أ) ع^٣ = ١ (ب) ع^٣ − ٨ = صفر

(جـ) (ع − ١)^٣ = ١ (د) (ع + ١)^٣ = ١

(٢٩) على مستوى أرجاند ، مساحة سطح الدائرة التى تمر بالنقط التى تمثل الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يساوى .... وحدة مربعة.

(أ) π (ب) ٢$\sqrt{3}\,\pi$ (جـ) $\sqrt{3}\,\pi$ (د) ٢π

(٣٠) على مستوى أرجاند ، مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه هى النقط التى تمثل الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يساوى .... وحدة مربعة.

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

١٧ إذا كانت ω هى أحد الجذرين الغير حقيقيين للواحد الصحيح

فأوجد الجذرين التربيعيين لكل من العددين الآتيين :

(١) ω (٢) ١ + ω

١٨ كون المعادلة التربيعية التي جذراها :

(١) $1 + \omega$ ت ، $1 + \omega^2$ ت

(٢) $\frac{1}{1+\omega}$ ، $\frac{1}{1+\omega^2}$

(٣) (دور ثان ٢٠١٤) $(1 + \omega - \omega^2)^3$ ، $(1 - \omega + \omega^2)^3$

(٤) $(2\omega + 2\omega^2 - \omega^3)^3$ ، $(2 - 2\omega - 2\omega^2)^3$

(٥) $\frac{3+\omega}{2-\omega}$ ، $\frac{3+\omega^2}{2-\omega^2}$

(٦) $(1 - (1+\omega)^{-1})^{-1}$ ، $(1 - (1+\omega^2)^{-1})^{-1}$

١٩ (السودان ٢٠١٥) ضع العدد :

$ع = 2\omega^4 + 2\omega^5 + 3 + ت\,(5\sqrt{3}\,\omega^3 + 4\sqrt{3}\,\omega^2 + 4\sqrt{3}\,\omega)$

على الصورة س + ص ت ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة الأسية.

«$\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{6} ت}$ ، $\sqrt{2}\, e^{\frac{-5\pi}{6} ت}$»

٢٠ إذا كان : ع = ٢ $(\omega + ت)(\omega^2 + ت)$ أوجد الصور المختلفة للعدد ع ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة المثلثية.

٢١ ضع على الصورة الأسية العدد المركب : $ع = \frac{1+\omega}{(1-ت)^2} + \frac{1-\omega}{(1+ت)^2}$

حيث : $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية.

٢٢ أوجد قيمتي : س ، ص حيث س ، ص عددان حقيقيان في كل مما يأتي :

(١) إذا كان : (١ − ت) (س + ت ص) = ٩ $\left(\frac{1}{2 - 3\omega^2} + \frac{1}{5 + 3\omega^2}\right)$ «$\frac{63}{38}$ ، $\frac{63}{38}$»

(٢) (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : (س + ت ص) (١ − ٣ ت) = ٣٧ $\left(\frac{1}{3 - 4\omega^2} + \frac{1}{7 + 4\omega^2}\right)$ «١ ، ٢»

(٣) إذا كان : (س + ت ص) $(2 + ت)^2 = \frac{1}{(1+\omega)^2} + \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$ «$-\frac{3}{25}$ ، $\frac{4}{25}$»

١٣ حل كلًا من المعادلات الآتية حيث س ∈ ك :

(١) $س^2 = 1 + \omega^2$

(٢) $4 س^2 - 4\omega س - \omega = 0$.

(٣) $(2 س + 1)^6 - 2\,(2 س + 1)^3 + 1 = 0$.

(٤) (دور ثان ٢٠١٣) $(3 س - 2)^6 - 9\,(3 س - 2)^3 + 8 = 0$.

١٤ أثبت أن : جذري المعادلة : $س^2 - (2 - ت)س - ت = 0$ هما : $(1 + \omega$ ت$)$ ، $(1 + \omega^2$ ت$)$

١٥ أثبت أن : $(1 - \omega^2)^{2ن} = (\omega - 1)^{2ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب فردي.

١٦ أوجد قيم ن التي تجعل : $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^ن = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^ن$

«ن ∈ {... ، −٦ ، −٣ ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، ...}»

١٧ أوجد : $\sum_{ر=0}^{10} (1 + \omega^ر + \omega^{2ر})$ «١٢»

١٨ إذا كان : $ع_1 = ب + \omega^2$ حـ ، $ع_2 = ب\,\omega +$ حـ ، $ع_3 = ب\,\omega^2 +$ حـ ω

فأثبت أن : (١) $ع_1 + ع_2 + ع_3 = 0$. (٢) $ع_1 ع_2 + ع_2 ع_3 + ع_3 ع_1 = 0$.

١٩ إذا كان : $ع_1 = س + \omega$ ص ، $ع_2 = س - \omega$ ص

فأوجد قيمة : $ع_1^3 - 3 ع_1^2 ع_2 + 3 ع_1 ع_2^2 - ع_2^3$ «$8 ص^3$»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٣٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\sqrt{س + 2\omega + 2\omega^2} = س + 2\omega + 2\omega^2$ فإن : س = ...

(أ) −٣ ، −٤ (ب) ٣ ، ٤ (ج) ± ٣ (د) ± ٤

(٢) إذا كان : $ع = \frac{\sqrt{3} + ت}{2}$ فإن : $ع^{69}$ = ...

(أ) − ت (ب) ت (ج) ١ (د) −١

③ إذا كان : $(١ + \text{س} + \text{س}^٢)^{\text{ن}} = \text{أ}_٠ + \text{أ}_١ \text{س} + \text{أ}_٢ \text{س}^٢ + \dots + \text{أ}_{٢\text{ن}} \text{س}^{٢\text{ن}}$

فإن : $\text{أ}_٠ + \text{أ}_١ \omega + \text{أ}_٢ \omega^٢ + \dots + \text{أ}_{٢\text{ن}} \omega^{٢\text{ن}} = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ω (جـ) $\omega^٢$ (د) ١

④ إذا كان : $\text{س}^٢ + \text{س} + ١ = ٠$

فإن : $\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^٢ + \left(\text{س}^٢ + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^٢ + \left(\text{س}^٣ + \frac{١}{\text{س}^٣}\right)^٢ + \dots + \left(\text{س}^٦ + \frac{١}{\text{س}^٦}\right)^٢ = \dots\dots\dots$

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٥٤

⑤ $\sum_{\text{ن}=١}^{١٢} \left(\text{جتا} \frac{٢\pi \text{ن}}{٣} + \text{ت جا} \frac{٢\pi \text{ن}}{٣}\right) = \dots\dots\dots$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٢ (د) ٧٨

⑥ إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

فإن : $\sum_{\text{ر}=٠}^{١٠٠} {}^{١٠٠}\text{ق}_{\text{ر}} (٢ + \omega^٢)^{١٠٠ - \text{ر}} \omega^{\text{ر}} = \dots\dots\dots$

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

⑦ إذا كان : ع ∈ ك ، ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

وكان : $|\omega \text{ع}^٢| - ٥ |\text{ع}| = ١٤$ فإن : $\left|\frac{٢ \bar{\text{ع}} + ٤٩}{\text{ع} + ٢}\right| = \dots\dots\dots$

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢١ (د) ٢٨

٣١ أوجد مجموعة حل المعادلة : $\text{س} = ١ + \omega^{\text{س}} + \omega^{٢\text{س}}$

«{٣}»

٣٢ اكتب على الصورة الجبرية والصورة المثلثية العدد ع حيث :

$$\text{ع} = (٢\omega^٢ + \text{ت})^{١٠} - ١٠ (٣\text{ت}^٢ - ٢\omega)(٢\omega^٢ + \text{ت})^٩ + \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١} (٣\text{ت}^٢ - ٢\omega)^٢ (٢\omega^٢ + \text{ت})^٨ - \dots + (٣\text{ت}^٢ - ٢\omega)^{١٠}$$

«٣٢ ت ، ٣٢ $\left(\text{جتا} \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا} \frac{\pi}{٢}\right)$»

الوحدة 3

المحددات والمصفوفات

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس **1**

المحددات

تمهيد

قبل البدء فى دراسة الخواص الأساسية للمحددات سوف نستعرض بعضًا مما درسناه سابقًا عن المحددات :

• **تذكر أن :**

(١) محدد الرتبة الثانية :

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث $أ = \begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{pmatrix}$

فإن محدد المصفوفة : أ ويرمز له بالرمز | أ | ويسمى بمحدد الرتبة الثانية حيث :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix} = أ_{11}\,أ_{22} - أ_{21}\,أ_{12}$$

فمثلًا : إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times (-1) = 13$

(٢) محدد الرتبة الثالثة :

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ حيث $أ = \begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{pmatrix}$

فإن محدد المصفوفة : أ ويرمز له بالرمز | أ | ويسمى بمحدد الرتبة الثالثة حيث :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{vmatrix}$$

ويمكن إيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة بفكه عن طريق إيجاد مجموع حواصل ضرب عناصر أى صف (عمود) فى العامل المرافق المناظر لكل عنصر من عناصر هذا الصف (العمود) مع ملاحظة أن العامل المرافق لأى عنصر $أ_{ص ع}$ هو المحدد من الرتبة الثانية الناتج من حذف الصف رقم ص والعمود رقم ع من المحدد الأصلى مضروبًا × $(-1)^{ص + ع}$ لتحديد إشارة العامل المرافق.

فمثلًا : إذا كان : $|أ| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ فإن :

• العوامل المرافقة المناظرة لعناصر الصف الأول على الترتيب هى :

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ، (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ، (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

أى $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} ، -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ، \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

لاحظ أنه

يمكن تحديد الإشارة المستخدمة فى العوامل المرافقة لأى عنصر فى محدد الدرجة الثالثة من الشكل الآتى :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

• **قيمة | أ | يمكن إيجادها بفك المحدد باستخدام :**

العوامل المرافقة لأى صف أو أى عمود كالآتى :

* **باستخدام الصف الأول :**

$$|أ| = 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2(2 \times 1 - (-2) \times 3) - 4(-1 \times 1 - (-2) \times 0) + 3(-1 \times 3 - 2 \times 0)$

$= 16 + 4 - 9 = 11$

* **باستخدام العمود الثالث :**

$$|أ| = (3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3(-3 - 0) + 2(6 - 0) + (4 + 4) = -9 + 12 + 8 = 11$

• **طريقة أخرى لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة :**

إيجاد قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **نتبع الخطوات الآتية :**

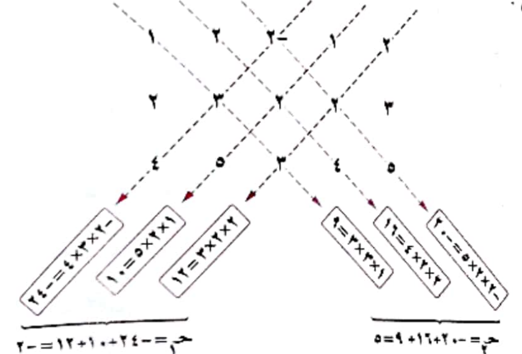
(١) نكتب المحدد ثم نكرر كتابة العمودين الأول والثانى على اليسار كالتالى :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

② نوجد مجموع حواصل ضرب عناصر القطر الرئيسى والأقطار الموازية له وليكن $ح_1$

ونوجد مجموع حواصل ضرب عناصر القطر غير الرئيسى والأقطار الموازية له وليكن $ح_2$

كالتالى :



③ نوجد $ح_1 - ح_2$ فتكون هى قيمة المحدد أى أن : قيمة المحدد = −٢ − ٥ = −٧

الخواص الأساسية للمحددات

خاصية (١)

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب.

• **وبمعنى آخر :** قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة.

أى أن : إذا كانت : أ مصفوفة مربعة فإن : $|أ| = |أ^{مد}|$

فمثلاً : $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix}$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد مفكوك كل من المحددين كالآتى :

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix}$ = ١ × −٩٨ + ٣ × (−٦٨) + ٥ × ٥٦

= −٢٢ (باستخدام عناصر الصف الأول)

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$ = ١ × −٩٨ − ٤ × (−٦١) + ٨ × (−٢١)

= −٢٢ (باستخدام عناصر الصف الأول)

خاصية (٢)

قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف أو أى عمود.

فمثلاً : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

* المفكوك باستخدام عناصر العمود الأول :

قيمة المحدد = ٢ (٦ − ٤) − صفر + ٥ (١٢ − ٢)

= ٢ × ٢ + ٥ × ١٠ = ٤ + ٥٠ = ٥٤

* المفكوك باستخدام عناصر الصف الثالث :

قيمة المحدد = ٥ (١٢ − ٢) −١ (٨ − ٠) − ٣ (−٤ − ٠)

= ٥ × ١٠ − ١ × ٨ + ٣ × ٤ = ٥٠ − ٨ + ١٢ = ٥٤

* المفكوك باستخدام عناصر العمود الثانى :

قيمة المحدد = −٣ (٠ − ٢٠) −٢ (−٦ + ٥) −١ (٨ − ٠)

= −٣ × −٢٠ − ٢ × −١ − ١ × ٨ = ٦٠ + ٢ − ٨ = ٥٤

خاصية (٣)

قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين :

① إذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) من المحدد تساوى صفر

فمثلاً : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ = صفر لأن جميع عناصر العمود الثالث ($ع_3$) أصفار

فإذا استخدمنا عناصر العمود الثالث فى فك المحدد فإن :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (0)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

(٢) إذا تساوت العناصر المتناظرة فى أى صفين (عمودين) فى المحدد :

فمثلًا : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \text{صفر}$ لتساوى العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثالث

، واختصارًا تكتب لأن ($ص_1 = ص_3$)

وللتحقق من ذلك يمكن إيجاد قيمة المحدد بفكه عن طريق عناصر $ص_1$ مثلًا فيكون :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-14) - 1 \times 2 + 3 \times 10$$

$$= -28 - 2 + 30 = \text{صفر}$$

خاصية (٤)

إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

فمثلًا : إذا كان $|أ| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ فنأخذ ٢ عامل مشترك من عناصر الصف الثانى ($ص_2$)

$\therefore |أ| = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ وبملاحظة تساوى عناصر الصفين الأول والثانى ($ص_1 = ص_2$)

$\therefore |أ| = 2 \times \text{صفر} = \text{صفر}$

ملاحظات

(١) من الخاصية (٤) نجد أن : ضرب المحدد فى عدد حقيقى $ك \neq 0$ فإننا نضرب هذا العدد فى عناصر أى صف (عمود) واحد فقط.

فمثلًا : $ك\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} كأ & كب & كجـ \\ د & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} أ & كب & جـ \\ د & كهـ & و \\ س & كص & ع \end{vmatrix} = \text{..............}$ وهكذا

(٢) تنعدم قيمة المحدد إذا كانت عناصر أى صف (عمود) مضاعفات لعناصر صف (عمود) آخر فى المحدد

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & -2 \\ 15 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

لأن كل عنصر فى العمود الأول ٣ أمثال نظيره من العمود الثالث واختصارًا تكتب ($ع_1 = 3\ ع_3$)

خاصية (٥)

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن : قيمة المحدد الناتج = − قيمة المحدد الأصلى.

فمثلًا : إذا كانت $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = 10$ فإذا بدلنا موضعى الصفين الأول والثانى ($ص_1$ ، $ص_2$)

فإن : $\begin{vmatrix} د & هـ & و \\ أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = -10$

أى أن : $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} د & هـ & و \\ أ & ب & جـ \\ س & ص & ع \end{vmatrix}$

ويمكن إثبات ذلك بإيجاد قيمة المحدد بفكه فى الحالتين.

خاصية (٦)

إذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين.

فمثلاً : يمكن استخدام ذلك فى كتابة المحدد $= \begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix}$ كمجموع محددين قيمة أحدهما تساوى صفر

وذلك بتقسيم عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) إلى عنصرين أحدهما يساوى العنصر المناظر له من صف (عمود) آخر كالآتى :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢+١ & ١+٣ & -٢+٧ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

لاحظ تقسيم عناصر الصف الأول إلى عنصرين أحدهما يساوى العنصر المناظر له فى الصف الثانى

$$= \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

لاحظ أنه فى المحدد الأول $ص_١ = ص_٢$ ولذلك قيمة المحدد = صفر

$$= \text{صفر} + \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

ملاحظة

الخاصية السابقة تحدد لنا كيفية إيجاد مجموع محددين لا يختلفان سوى فى عناصر صفين (أو عمودين) متناظرين وذلك بأن نجمع العناصر المتناظرة فى هذين الصفين (العمودين) فى المحدد الناتج وكتابة العناصر المتشابهة كما هى :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ -١ & ٥ & ٢ \\ ٠ & ٧ & -٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ٧ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢+٤ & ٣ & ٤ \\ -١+٥ & ٥ & ٢ \\ ٠+٧ & ٧ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ٥ & ٢ \\ ٧ & ٧ & -٣ \end{vmatrix}$$

خاصية (٧)

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

بمعنى إنه إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى عدد $ك \neq ٠$ وأضفناها إلى نظائرها من عناصر صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

• وتستخدم هذه الخاصية فى تبسيط عناصر المحدد عندما تكون قيم عناصر هذا المحدد كبيرة مما يسهل إيجاد قيمته.

فمثلاً : يمكن تبسيط عناصر المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١٤ \\ ٦ & ٢ & ٣٢ \\ -٤ & ٦ & -١٤ \end{vmatrix}$ بضرب $ع_١ \times (-٥)$ وإضافته إلى $ع_٣$

$$\begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١٤ \\ ٦ & ٢ & ٣٢ \\ -٤ & ٦ & -١٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ٣ \times (-٥) + ١٤ \\ ٦ & ٢ & ٦ \times (-٥) + ٣٢ \\ -٤ & ٦ & -٤ \times (-٥) - ١٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & -١ \\ ٦ & ٢ & ٢ \\ -٤ & ٦ & ٦ \end{vmatrix}$$

وبملاحظة أن : $ع_٢ = ع_٣$ ∴ قيمة المحدد = صفر

• وتستخدم أيضًا فى جعل أحد الصفوف (الأعمدة) يحتوى على أكبر عدد من الأصفار ثم إيجاد المفكوك :

فمثلاً : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٤ \\ ٦ & ٣ & ٣٢ \\ -١ & -١ & -٤ \end{vmatrix}$ $(ص_١ \times (-٣) + ص_٢)$

$$∴ \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٤ \\ ٦ & ٣ & ٣٢ \\ -١ & -١ & -٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٤ \\ ٢ \times -٣ + ٦ & ١ \times -٣ + ٣ & ١٤ \times -٣ + ٣٢ \\ -١ & -١ & -٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١٤ \\ ٠ & ٠ & -١٠ \\ -١ & -١ & -٤ \end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر $ص_٢$ يصبح من السهل إيجاد قيمة المحدد.

∴ قيمة المحدد = صفر + صفر + ١٠ (-٢ + ١) = -١٠ (باستخدام عناصر الصف الثانى)

الوحدة 3

خاصية (٨)

في أي محدد إذا ضربنا عناصر أي صف (عمود) في العوامل المرافقة للعناصر المناظرة في أي صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرًا.

فمثلاً: إذا كانت هـ = $\begin{vmatrix} ٧ & ٤ & ٢ \\ ١ & -٢ & ٣ \\ ٦ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$

فإن: عناصر الصف الأول هي ٢ ، ٤ ، ٧ والعوامل المرافقة لعناصر الصف الثالث هي:

$(-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} ٧ & ٤ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$ ، $(-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$ ، $(-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{vmatrix}$

أي: ١ (٤ + ١٤) ، -١ (٢ - ٢١) ، ١ (-٤ - ١٢) أي: ١٨ ، ١٩ ، -١٦

∴ مجموع حواصل ضرب الصف الأول في العوامل المرافقة لعناصر الصف الثالث

= ٢ × ١٨ + ٤ × ١٩ + ٧ × -١٦ = ٣٦ + ٧٦ - ١١٢ = صفر

الصورة المثلثة للمحدد

المحدد الذي جميع عناصره تحت أو فوق القطر الرئيسي أصفار يسمى محدد على الصورة المثلثة كما في الشكلين:

وتسمى العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسي.



القطر الرئيسي

$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & أ_{١١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

الصورة المثلثة السفلى

أو

القطر الرئيسي

$\begin{vmatrix} أ & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

الصورة المثلثة العليا

خاصية (٩)

قيمة المحدد على الصورة المثلثة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي.

أي أن: قيمة المحدد على الصورة المثلثة = $أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

فمثلاً: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ -٢ & -١ & ١ \end{vmatrix} = ٣ \times ٤ \times -٢ = -٢٤$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٥ & ٥ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = -١ \times ٥ \times ٤ = -٢٠$

ملاحظة

قيمة المحدد الذي جميع عناصره تحت أو فوق القطر الغير رئيسي أصفار تساوي سالب حاصل ضرب عناصر القطر الغير رئيسي.

فمثلاً: $\begin{vmatrix} ٤ & ٠ & ٠ \\ ٧ & -٣ & ٠ \\ ١ & ٦ & ٥ \end{vmatrix} = -(٤ \times -٣ \times ٥) = ٦٠$ ، $\begin{vmatrix} ٤ & -١ & ٥ \\ ٠ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = -(٤ \times ٣ \times ٧) = -٨٤$

مثال ١

بدون فك المحدد أوجد قيمة:

① $\begin{vmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ & -٤ \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} -١ & ٥ & ١٦ \\ ١٢ & -٨ & ١٦ \\ -١٥ & ١٠ & -٢٠ \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} -٣ & ١ & ٢ \\ ٧ & ٦ & -٧ \\ -١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} -٣ & ٤ & ١ \\ ٨ & ٦ & -١ \\ ١ & -٢ & ٥ \end{vmatrix}$

الحل

① $\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٢ & ٦ & -٤ \end{vmatrix}$ بضرب الصف الثاني في ٢ وإضافته إلى الصف الثالث أي ($٢ ص_٢ + ص_٣$)

∴ $\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & -٣ \\ -١ & -٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ بملاحظة أن عناصر $ص_٣$ كلها أصفار.

∴ Δ = صفر

② $\Delta = \begin{vmatrix} ١٦ & ٥ & -١ \\ ١٦ & -٨ & ١٢ \\ -٢٠٠ & ١٠ & -١٥ \end{vmatrix}$ بإخراج ٤ عامل مشترك من $\text{ص}_{٢}$ ، -٥ من عناصر $\text{ص}_{٣}$

$\therefore \Delta = ٤ \times (-٥) \begin{vmatrix} ١٦ & ٥ & -١ \\ ٤ & -٢ & ٣ \\ ٤ & -٢ & ٣ \end{vmatrix}$ بملاحظة أن عناصر الصفان الثانى والثالث متساوية أى $\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{٣}$

$\therefore \Delta =$ صفر

③ $\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & -٣ \\ -٧ & ٦ & ٧ \\ ٢ & ٥ & -١ \end{vmatrix}$ بإضافة $\text{ع}_{١}$ إلى $\text{ع}_{٣}$ أى $(\text{ع}_{١} + \text{ع}_{٣})$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٠ \\ -٧ & ٦ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$ $\text{ع}_{٢} \times (-٣) + \text{ع}_{١}$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ -٢٥ & ٦ & ٠ \\ -١٣ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$ بتبديل $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$

$\therefore \Delta = - \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٦ & -٢٥ & ٠ \\ ٥ & -١٣ & ١ \end{vmatrix}$ وبملاحظة أن المحدد على الصورة المثلثة.

$\therefore \Delta = -(١ \times (-٢٥) \times ١) = ٢٥$

④ $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ -١ & ٦ & ٨ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ $(\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢})$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ ٠ & ١٠ & ٥ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ بإخراج ٥ عامل مشترك من عناصر $\text{ص}_{٢}$

$\therefore \Delta = ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٤ & -٣ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٥ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$ وبإخراج ٢ عامل مشترك من عناصر $\text{ع}_{٢}$

$\therefore \Delta = ٥ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٥ & -١ & ١ \end{vmatrix}$ $(\text{ص}_{١} \times (-٥) + \text{ص}_{٣})$

$\therefore \Delta = ٥ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & -١١ & ١٦ \end{vmatrix}$ $(\text{ص}_{٢} \times ١١ + \text{ص}_{٣})$

$\therefore \Delta = ١٠ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٠ & ١ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٢٧ \end{vmatrix}$ وبملاحظة أن المحدد على الصورة المثلثة.

$\therefore \Delta = ١٠ \, (١ \times ١ \times ٢٧) = ٢٧٠$

مثال ٢

بدون فك المحدد أثبت أن :

① $\begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٣٩ & ٩ & ٧٠ \end{vmatrix} = ١$

② $\begin{vmatrix} ٧ & -٤ & ٤ \\ ٤٢ & -١٥ & ٦ \\ ٢١ & ٢ & ١٢ \end{vmatrix} = -٤٢ \begin{vmatrix} ١ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ١٢ & ٢٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر

④ $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٢ & -١ & ٦ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ -١ & ٤ & -٤ \\ ٤ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ -٢ & -٣ & ٢ \end{vmatrix} =$ صفر

⑤ $\begin{vmatrix} \sqrt{١٣} + \sqrt{٢} & ٢\sqrt{٣} & \sqrt{٣} \\ \sqrt{٢٦} + \sqrt{٦} & ٣ & \sqrt{٦} \\ \sqrt{٣٩} + ٢ & \sqrt{٦} & ٣ \end{vmatrix} = -٣\sqrt{٢}$

الحل

① الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٣٩ & ٩ & ٧٠ \end{vmatrix}$ $(\text{ص}_{١} \times (-٣) + \text{ص}_{٣})$

$= \begin{vmatrix} ١٣ & ٣ & ٢٣ \\ ٣٠ & ٧ & ٥٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ $(\text{ع}_{٢} \times (-٤) + \text{ع}_{١})$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢٣ \\ ٢ & ٧ & ٥٣ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$ $(\text{ص}_{١} \times (-٢) + \text{ص}_{٢})$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (∴ المحدد على الصورة المثلثية)

$= 1 \times 1 \times 1 = 1 =$ الطرف الأيسر.

(٢) الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix}$ (بإخراج ٧ عامل مشترك من $ع_1$)

$$= 7 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -15 & 6 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$ (بإخراج (−٣) عامل مشترك من $ص_2$)

$$= 7 \times (-3) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -2 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$ (بإخراج ٢ عامل مشترك من $ع_3$)

$$= 7 \times (-3) \times 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -42 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$ الطرف الأيسر.

(٣) الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 12 & 20 & 24 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ (بإخراج ٤ عامل مشترك من $ص_2$ في المحدد الثاني)

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$ «بتبديل $ص_1$ ، $ص_2$ من المحدد الثاني»

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$ «بضرب العدد ٤ من $ص_2$ من المحدد الثاني»

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 8 & -4 & 12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -8 & 4 & -12 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$ (بجمع المحددين مع ملاحظة تساوي $ص_1$ ، $ص_3$ في كليهما)

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

∵ عناصر $ص_2$ جميعها أصفار. ∴ المحدد = صفر = الطرف الأيسر.

(٤) الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ (بجمع المحدد الأول والثاني لتساوي $ص_1$ ، $ص_3$ في كليهما)

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$ (بجمع المحددين لتساوى $ع_2$ ، $ع_3$ فى كليهما)

$$= \begin{vmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$ بملاحظة أن : ($ع_1 = ع_3$)

∴ المحدد = صفر = الطرف الأيسر.

(٥) الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} \sqrt{13} + \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{26} + \sqrt{6} & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{39} + 2 & \sqrt{6} & 3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{13} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{26} & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{39} & \sqrt{6} & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 3 & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{6} & 3 \end{vmatrix}$$

«بأخذ $\sqrt{13}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ عوامل مشتركة من $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ على الترتيب» «بأخذ $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ عوامل مشتركة من $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ على الترتيب»

$$= \sqrt{13} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

«$ع_1 = ع_3$» «$ع_2 \times (-1) + ع_1$»

$$= 3\sqrt{13} \times \text{صفر} + \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

«بضرب $\sqrt{2} \times ص_2$ ، $\sqrt{3} \times ص_3$»

$$= \sqrt{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 2 \\ 0 & \sqrt{6} & 3 \end{vmatrix} \quad \text{«ص}_2 \times (-1) + \text{ص}_3\text{»}$$

$$= \sqrt{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{6} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \sqrt{3} \times (-1 \times \sqrt{6} \times 1) = -3\sqrt{2} =$ الطرف الأيسر.

ملاحظة

إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{ب}_{31} & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{11} \\ \text{ب}_{32} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{12} \\ \text{ب}_{33} & \text{ب}_{23} & \text{ب}_{13} \end{pmatrix}$

فإن : أب =

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_{11}\text{ب}_{31}+\text{أ}_{21}\text{ب}_{32}+\text{أ}_{31}\text{ب}_{33} & \text{أ}_{11}\text{ب}_{21}+\text{أ}_{21}\text{ب}_{22}+\text{أ}_{31}\text{ب}_{23} & \text{أ}_{11}\text{ب}_{11}+\text{أ}_{21}\text{ب}_{12}+\text{أ}_{31}\text{ب}_{13} \\ \text{أ}_{12}\text{ب}_{31}+\text{أ}_{22}\text{ب}_{32}+\text{أ}_{32}\text{ب}_{33} & \text{أ}_{12}\text{ب}_{21}+\text{أ}_{22}\text{ب}_{22}+\text{أ}_{32}\text{ب}_{23} & \text{أ}_{12}\text{ب}_{11}+\text{أ}_{22}\text{ب}_{12}+\text{أ}_{32}\text{ب}_{13} \\ \text{أ}_{13}\text{ب}_{31}+\text{أ}_{23}\text{ب}_{32}+\text{أ}_{33}\text{ب}_{33} & \text{أ}_{13}\text{ب}_{21}+\text{أ}_{23}\text{ب}_{22}+\text{أ}_{33}\text{ب}_{23} & \text{أ}_{13}\text{ب}_{11}+\text{أ}_{23}\text{ب}_{12}+\text{أ}_{33}\text{ب}_{13} \end{pmatrix}$$

ويكون : $|\text{أ}| \times |\text{ب}| = |\text{أب}|$

مثال ٣

بدون فك المحدد أوجد قيمة كل من : $\text{م}_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ ، $\text{م}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

ثم استنتج : محدد م قيمته تساوى $\text{م}_1 \text{ م}_2$

الحـــل

$$\text{م}_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad (\text{ص}_1 \times (-3) + \text{ص}_2 \text{ ثم } \text{ص}_1 \times (-6) + \text{ص}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 7 & -10 & 0 \end{vmatrix} (\text{ص}_1 \times (-2) + \text{ص}_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times -5 \times 9 = -45$$

$$\text{، م}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{ص}_1 \times 5 + \text{ص}_2 \text{ ثم } \text{ص}_1 \times 2 + \text{ص}_3)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 14 & 21 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{بتبديل ع}_2 \text{ ، ع}_3)$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 21 & 14 & 0 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-1 \times 14 \times 11) = 154$$

$\because \text{م} = \text{م}_1 \times \text{م}_2$ $\therefore \text{م} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \\ -6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 32 & 1 & -6 \\ 10 & 29 & 6 \end{vmatrix}$

مثال ٤

أثبت أن : $\text{س} = 3$ هى أحد جذور المعادلة $\begin{vmatrix} 1 & -6 & \text{س} \\ \text{س} - 2 & -2\text{س} & 3 \\ \text{س} + 3 & 3\text{س} & -2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

الحـــل

الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 1 & -6 & \text{س} \\ \text{س} - 2 & -2\text{س} & 3 \\ \text{س} + 3 & 3\text{س} & -2 \end{vmatrix}$

وبوضع $\text{س} = 3$ $\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 1 & -6 & 3 \\ 6 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

$\because$ العناصر المتناظرة فى الصفين الأول والثانى متساوية ($\text{ص}_1 = \text{ص}_2$)

$\therefore$ قيمة المحدد = صفر $\therefore$ $\text{س} = 3$ أحد جذور المعادلة.

مثال ٥

أوجد قيمة الثابت : ك التى تجعل $(\text{س} - 2)$ أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} -3 & 1 & \text{س} + 1 \\ \text{س} - 1 & 5 & 2 \\ \text{س} + \text{ك} & -4 & 1 \end{vmatrix}$

الحـــل

إذا كانت : $(\text{س} - 2)$ عامل للمحدد فإن : $\text{س} = 2$ تجعل قيمة المحدد = صفرًا وبالتعويض عن $\text{س} = 2$ يكون المطلوب إيجاد قيمة ك التى تجعل المحدد الناتج ينعدم أى تجعل :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 + \text{ك} & -4 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

وبإضافة العمود الأول إلى العمود الثالث $\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 3 + \text{ك} & -4 & 1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$

ويفك المحدد باستخدام عناصر العمود الثالث.

∴ −٣ (−١٢ − ١) + (٣ + ك) (١٥ − ٢) = صفر

∴ −٣ × −١٢ + (ك + ٣) × ١٣ = صفر وبقسمة الطرفين على ١٣

∴ ٣ + ك + ٣ = صفر   ∴ ك = −٦

مثال ٦

أثبت أن: $\begin{vmatrix} ٠ & أ & ب \\ -أ & ٠ & حـ \\ -ب & -حـ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر مهما كانت قيم أ ، ب ، حـ

الحل

بفرض أن: $\Delta = \begin{vmatrix} ٠ & أ & ب \\ -أ & ٠ & حـ \\ -ب & -حـ & ٠ \end{vmatrix}$ وبإخراج (−١) عامل مشترك من الصفوف الثلاثة.

$\therefore \Delta = (-١)^{٣} \begin{vmatrix} ٠ & -أ & -ب \\ أ & ٠ & -حـ \\ ب & حـ & ٠ \end{vmatrix}$

، ∵ المحدد الناتج ما هو إلا مدور المحدد Δ وقيمته تساوى Δ

∴ Δ = −١ × Δ   ∴ Δ + Δ = ٠

∴ ٢ Δ = ٠   ∴ Δ = ٠

من المثال السابق نلاحظ أن:

إذا كانت المصفوفة أ شبه متماثلة أى عناصر قطرها الرئيسى يساوى أصفار وباقى العناصر تحقق العلاقة $أ_{ص ع} = -أ_{ع ص}$

فإن: |أ| = صفر

$\begin{vmatrix} ٠ & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & ٠ & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & ٠ \end{vmatrix}$

أى أن: قيمة محدد المصفوفة شبه المتماثلة يساوى صفر

مثال ٧

بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & حـ \\ أ^{٢} & ب^{٢} & حـ^{٢} \end{vmatrix}$ = (أ − ب) (ب − حـ) (حـ − أ)

الحل

الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & حـ \\ أ^{٢} & ب^{٢} & حـ^{٢} \end{vmatrix}$ ($ع_{١} \times (-١) + ع_{٢}$ ، $ع_{١} \times (-١) + ع_{٣}$)

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ب - أ & حـ - أ \\ أ^{٢} & ب^{٢} - أ^{٢} & حـ^{٢} - أ^{٢} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ب - أ & حـ - أ \\ أ^{٢} & (ب - أ)(ب + أ) & (حـ - أ)(حـ + أ) \end{vmatrix}$ (بأخذ (ب − أ) عامل مشترك من $ع_{٢}$ ، (حـ − أ) عامل مشترك من $ع_{٣}$)

$= (ب - أ)(حـ - أ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ١ \\ أ^{٢} & ب + أ & حـ + أ \end{vmatrix}$ ($ع_{٢} \times (-١) + ع_{٣}$)

$= (ب - أ)(حـ - أ) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ٠ \\ أ^{٢} & ب + أ & حـ - ب \end{vmatrix}$

= (ب − أ) (حـ − أ) (١ × ١ × (حـ − ب))

= (أ − ب) (ب − حـ) (حـ − أ) = الطرف الأيسر.

مثال ٨

بدون فك المحدد أثبت أن: $\begin{vmatrix} أ & ب & ب \\ ب & أ & ب \\ ب & ب & أ \end{vmatrix}$ = (أ + ٢ ب) (ب − أ)^{٢}

الحل

الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} أ & ب & ب \\ ب & أ & ب \\ ب & ب & أ \end{vmatrix}$ (بإضافة $ع_٢$ ، $ع_٣$ إلى العمود الأول)

$= \begin{vmatrix} أ+٢ب & ب & ب \\ أ+٢ب & أ & ب \\ أ+٢ب & ب & أ \end{vmatrix}$ (بإخراج (أ + ٢ ب) عامل مشترك من $ع_١$)

$= (أ+٢ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ١ & أ & ب \\ ١ & ب & أ \end{vmatrix}$ ($ص_١ \times (-١) + ص_٢$ ، $ص_١ \times (-١) + ص_٣$)

$= (أ+٢ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ب \\ ٠ & أ-ب & ٠ \\ ٠ & ٠ & أ-ب \end{vmatrix}$ (بملاحظة أن المحدد على الصورة المثلثية)

$= (أ+٢ب)(أ-ب)^٢ = (أ+٢ب)(ب-أ)^٢ =$ الطرف الأيسر.

مثال ٩

إذا كان : $\begin{vmatrix} أ^٣-١ & ب^٣-١ & ح^٣-١ \\ أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \end{vmatrix} =$ صفر حيث $أ \neq ب \neq ح$

بدون فك المحدد أثبت أن : $أبح = ١$

الحل

بتجزئة المحدد إلى محددين $= \begin{vmatrix} أ^٣ & ب^٣ & ح^٣ \\ أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore أبح \begin{vmatrix} أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \end{vmatrix} =$ صفر

بتبديل $ص_١$ ، $ص_٣$ ثم $ص_٢$ ، $ص_٣$

$\therefore أبح \begin{vmatrix} أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore \begin{vmatrix} أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} (أبح - ١) = ٠$

، $\because أ \neq ب \neq ح$ $\therefore \begin{vmatrix} أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \\ أ & ب & ح \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} \neq ٠$

$\therefore أبح - ١ =$ صفر $\therefore أبح = ١$

مثال ١٠

بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & أ & بح \\ ١ & ب & حأ \\ ١ & ح & أب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & ح \\ أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \end{vmatrix}$

الحل

الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ١ & أ & بح \\ ١ & ب & حأ \\ ١ & ح & أب \end{vmatrix}$ (بإخراج أبح عامل مشترك من $ع_٣$)

$= أبح \begin{vmatrix} ١ & أ & \frac{١}{أ} \\ ١ & ب & \frac{١}{ب} \\ ١ & ح & \frac{١}{ح} \end{vmatrix}$ ($ص_١ \times أ$ ، $ص_٢ \times ب$ ، $ص_٣ \times ح$)

$= \begin{vmatrix} أ & أ^٢ & ١ \\ ب & ب^٢ & ١ \\ ح & ح^٢ & ١ \end{vmatrix}$ (بتبديل $ع_٢$ ، $ع_٣$ ثم $ع_١$ ، $ع_٢$)

$= \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^٢ \\ ١ & ب & ب^٢ \\ ١ & ح & ح^٢ \end{vmatrix}$ (بتبديل الصفوف بالأعمدة)

$= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & ح \\ أ^٢ & ب^٢ & ح^٢ \end{vmatrix} =$ الطرف الأيسر.

مثال ⑪

فى Δ أ ب حـ بدون فك المحدد أثبت أن :

① $\text{صفر} = \begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جتا حـ} & \text{جتا ب} & \text{جتا أ} \\ \text{جا حـ} & \text{جا ب} & \text{جا أ} \end{vmatrix}$ ② $0 = \begin{vmatrix} \text{جا حـ} & \text{ب جا أ} & \text{أ جا ب} \\ \text{طا حـ} & \text{طا أ} & \text{طا أ} \\ \text{قا حـ} & \text{قا أ} & \text{قا أ} \end{vmatrix}$

حيث أ ، ب ، حـ أطوال أضلاع Δ أ ب حـ

الحل

فى Δ أ ب حـ من قانون الجيب : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \text{٢ نق}$

① من قانون الجيب :

$\therefore$ أ = ٢ نق جا أ ، ب = ٢ نق جا ب ، حـ = ٢ نق جا حـ

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{حـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جتا حـ} & \text{جتا ب} & \text{جتا أ} \\ \text{جا حـ} & \text{جا ب} & \text{جا أ} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \text{٢ نق جا حـ} & \text{٢ نق جا ب} & \text{٢ نق جا أ} \\ \text{جتا حـ} & \text{جتا ب} & \text{جتا أ} \\ \text{جا حـ} & \text{جا ب} & \text{جا أ} \end{vmatrix}$ (بإخراج ٢ نق عامل مشترك من $ص_1$)

$= \text{٢ نق} \begin{vmatrix} \text{جا حـ} & \text{جا ب} & \text{جا أ} \\ \text{جتا حـ} & \text{جتا ب} & \text{جتا أ} \\ \text{جا حـ} & \text{جا ب} & \text{جا أ} \end{vmatrix}$ $(ص_1 = ص_3)$

= ٢ نق × صفر = صفر = الطرف الأيسر.

② من قانون الجيب : $\because$ أ جا ب = ب جا أ

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} \text{جا حـ} & \text{ب جا أ} & \text{أ جا ب} \\ \text{طا حـ} & \text{طا أ} & \text{طا أ} \\ \text{قا حـ} & \text{قا أ} & \text{قا أ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{جا حـ} & \text{ب جا أ} & \text{ب جا أ} \\ \text{طا حـ} & \text{طا أ} & \text{طا أ} \\ \text{قا حـ} & \text{قا أ} & \text{قا أ} \end{vmatrix}$ $(ع_1 = ع_2)$

= صفر = الطرف الأيسر.

مثال ⑫

بدون فك المحدد حل المعادلة : $\text{صفر} = \begin{vmatrix} \text{٣س + ٢} & \text{٢س + ١} & \text{س} \\ \text{٤س + ٣} & \text{٣س + ٢} & \text{٢س + ١} \\ \text{١٠س + ٩} & \text{٥س + ٦} & \text{٣س + ٣} \end{vmatrix}$

الحل

نحاول تبسيط عناصر المحدد حتى يسهل فكه باتباع الآتى :

- بإضافة العمود الأول بعد ضربه فى (−٢) إلى العمود الثانى
- ، بإضافة العمود الأول بعد ضربه فى (−٣) إلى العمود الثالث ينتج أن :

$\text{صفر} = \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{١} & \text{س} \\ \text{−٢س} & \text{−س} & \text{٢س + ١} \\ \text{س} & \text{−س} & \text{٢س + ٣} \end{vmatrix}$

- بإضافة العمود الثانى بعد ضربه فى (−٢) إلى العمود الثالث.

$\therefore \ \text{صفر} = \begin{vmatrix} 0 & \text{١} & \text{س} \\ 0 & \text{−س} & \text{٢س + ١} \\ \text{٣س} & \text{−س} & \text{٢س + ٣} \end{vmatrix}$

- بضرب الصف الأول × (−١) وإضافته إلى الصف الثانى.

$\therefore \ 0 = \begin{vmatrix} 0 & \text{١} & \text{س} \\ 0 & \text{−(س + ١)} & \text{س + ١} \\ \text{٣س} & \text{−س} & \text{٢س + ٣} \end{vmatrix}$

$\therefore$ (س + ١) $0 = \begin{vmatrix} 0 & \text{١} & \text{س} \\ 0 & \text{−١} & \text{١} \\ \text{٣س} & \text{−س} & \text{٣س + ٣} \end{vmatrix}$

- بإضافة الصف الثانى إلى الصف الأول.

$\therefore$ (س + ١) $0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \text{س + ١} \\ 0 & \text{−١} & \text{١} \\ \text{٣س} & \text{−س} & \text{٣س + ٣} \end{vmatrix}$

$\therefore$ (س + ١) ((س + ١) × (−١) × ٣س) = ٠

$\therefore$ (س + ١)^{٢} × ٣س = ٠ $\quad \therefore$ س + ١ = ٠ ومنها س = −١

أو ٢س = ٠ ومنها س = ٠

تمارين 10 على المحددات

• فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا

📖 من أسئلة الكتاب المدرسي

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\begin{vmatrix} \text{جاس} & \text{جتاس} \\ \text{جتاس} & -\text{جاس} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) جتا ٢ س

② $\begin{vmatrix} \omega & \text{ت} \\ \text{ت} & \omega \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ω (د) $-\omega$

③ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & 1 \\ 1 & \text{س} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32$ فإن : س = ...

(أ) ± ١ (ب) ± ٢ (جـ) ± ٣ (د) ± ٤

④ $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 7 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٣ × ٤٨

⑤ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} +$ ....

(أ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

⑥ $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 2 \\ 12 & 20 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} \times$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑦ أى من المحددات التالية لا يساوى الصفر ؟

(أ) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$

⑧ 📖 $\begin{vmatrix} 24 & 25 & 26 \\ 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٥٦

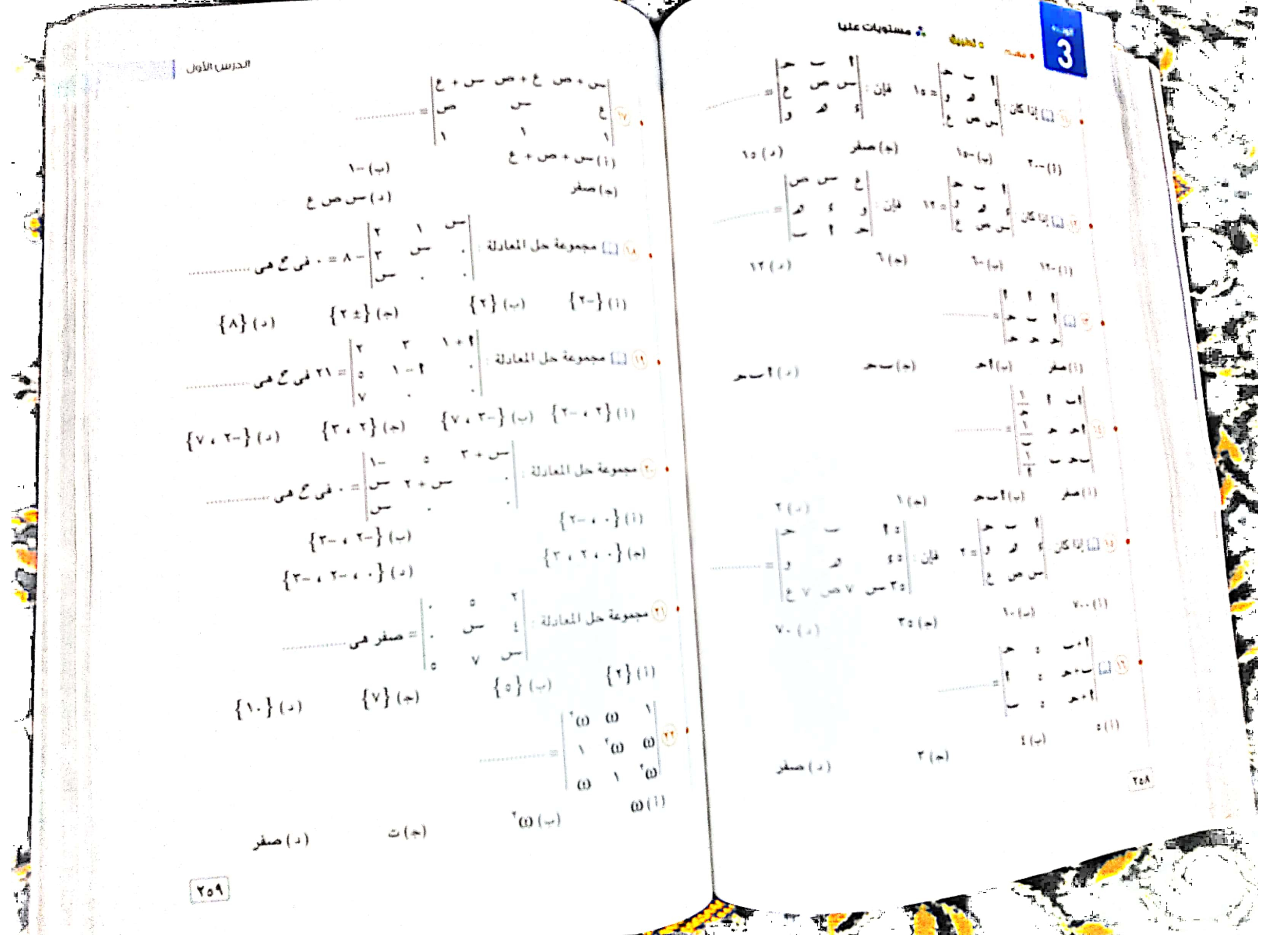
⑨ $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} = (-1) \times$ ....

(أ) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{د} & \text{ز} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ح} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{د} & \text{د} & \text{ز} \\ \text{ب}+\text{هـ} & \text{هـ} & \text{ح} \\ \text{جـ}+\text{و} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$

(جـ) $\begin{vmatrix} \text{د} & \text{أ} & \text{ز} \\ \text{هـ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{و} & \text{جـ} & \text{ط} \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} 2\text{أ} & \text{د} & \text{ز} \\ 2\text{ب} & \text{هـ} & \text{ح} \\ 2\text{جـ} & \text{و} & \text{ط} \end{vmatrix}$

⑩ إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 12$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{د} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{ص} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{ع} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) −١٢ (ب) ١٢ (جـ) صفر (د) ٢٤



(١١) إذا كان : $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ و & هـ & د \\ ع & ص & س \end{vmatrix} = ١٥$ فإن : $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ ع & ص & س \\ و & هـ & د \end{vmatrix} =$ ....

(أ) −٣٠ (ب) −١٥ (جـ) صفر (د) ١٥

(١٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ و & هـ & د \\ ع & ص & س \end{vmatrix} = ١٢$ فإن : $\begin{vmatrix} ص & س & ع \\ هـ & د & و \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) −١٢ (ب) −٦ (جـ) ٦ (د) ١٢

(١٣) $\begin{vmatrix} أ & أ & أ \\ جـ & ب & أ \\ جـ & جـ & جـ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) أجـ (جـ) ب جـ (د) أ ب جـ

(١٤) $\begin{vmatrix} \frac{1}{جـ} & أ & أب \\ \frac{1}{ب} & جـ & أجـ \\ \frac{1}{أ} & ب & ب جـ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) أ ب جـ (جـ) ١ (د) ٢

(١٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} جـ & ب & أ \\ و & هـ & د \\ ع & ص & س \end{vmatrix} = ٢$ فإن : $\begin{vmatrix} جـ & ب & ٥أ \\ و & هـ & ٥د \\ ٧ع & ٧ص & ٣٥س \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٧٠٠ (ب) ١٠ (جـ) ٣٥ (د) ٧٠

(١٦) $\begin{vmatrix} جـ & ٤ & أ + ب \\ أ & ٤ & ب + جـ \\ ب & ٤ & أ + جـ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) صفر

(١٧) $\begin{vmatrix} س + ع & ع + ص & س + ص \\ ص & س & ع \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} =$ ....

(أ) س + ص + ع (ب) −١ (جـ) صفر (د) س ص ع

(١٨) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & س \\ ٣ & س & ٠ \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} - ٨ = ٠$ في ح هي ....

(أ) {−٢} (ب) {٢} (جـ) {±٢} (د) {٨}

(١٩) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & أ + ١ \\ ٥ & أ - ١ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٢١$ في ح هي ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {−٣ ، ٧} (جـ) {٢ ، ٣} (د) {−٢ ، ٧}

(٢٠) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} -١ & ٥ & س + ٣ \\ س & س + ٢ & ٠ \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$ في ح هي ....

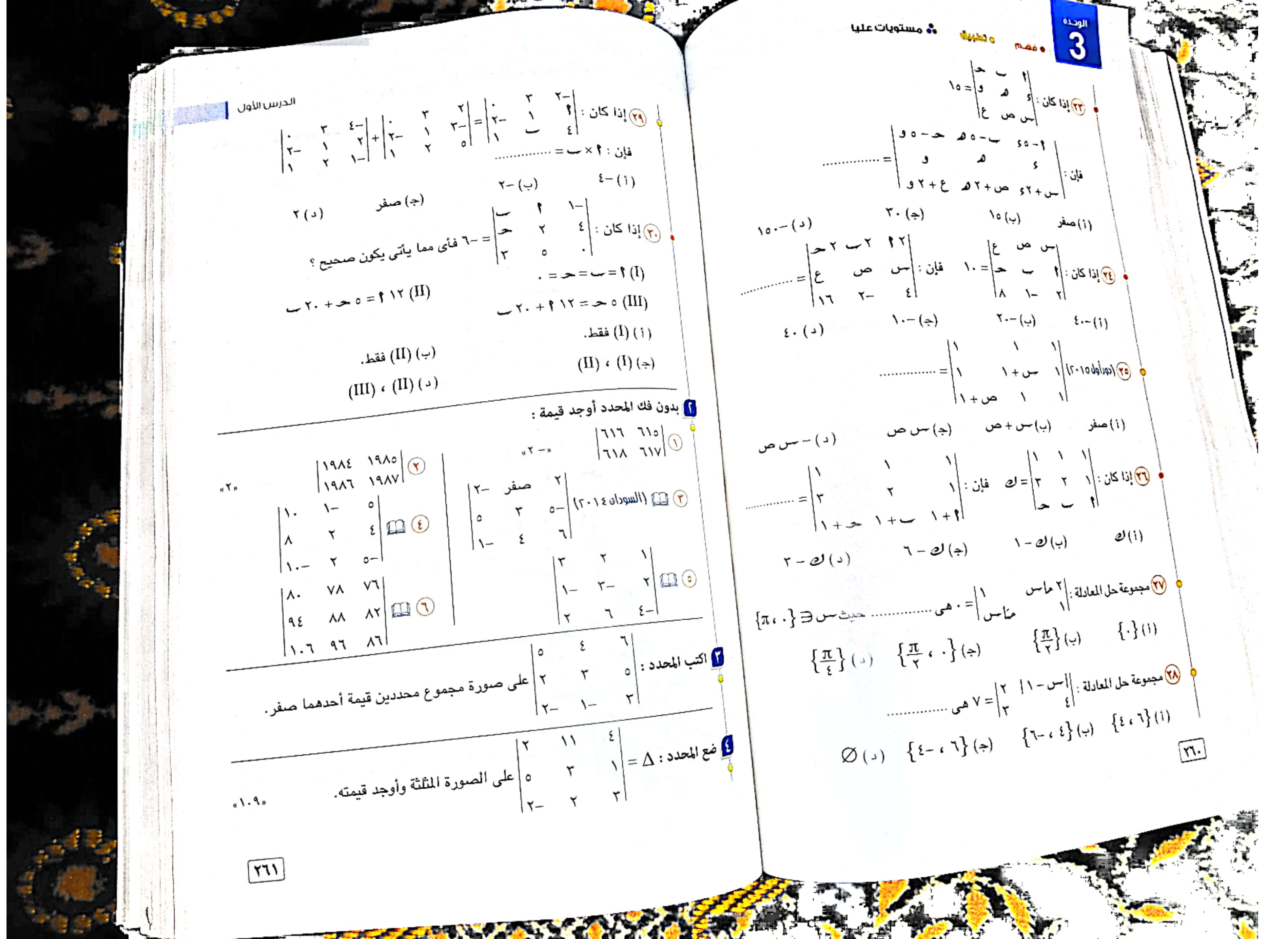
(أ) {٠ ، −٢} (ب) {−٢ ، −٣} (جـ) {٠ ، ٢ ، ٣} (د) {٠ ، −٢ ، −٣}

(٢١) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٢ \\ ٠ & س & ٤ \\ ٥ & ٧ & س \end{vmatrix} =$ صفر هي ....

(أ) {٢} (ب) {٥} (جـ) {٧} (د) {١٠}

(٢٢) $\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega & ١ \\ ١ & \omega^2 & \omega \\ \omega & ١ & \omega^2 \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ω (ب) ω^2 (جـ) ت (د) صفر



(٢٣) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 15$

فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ}-5\text{ء} & \text{ب}-5\text{هـ} & \text{حـ}-5\text{و} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س}+2\text{ء} & \text{ص}+2\text{هـ} & \text{ع}+2\text{و} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) −١٥٠

(٢٤) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 10$ فإن : $\begin{vmatrix} 2\text{أ} & 2\text{ب} & 2\text{حـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ 4 & -2 & 16 \end{vmatrix} =$ ....

(أ) −٤٠ (ب) −٢٠ (جـ) −١٠ (د) ٤٠

(٢٥) (دور أول ٢٠١٥) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{س} & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{ص} \end{vmatrix} =$ ....

(أ) صفر (ب) س + ص (جـ) س ص (د) − س ص

(٢٦) إذا كان : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} = \text{ك}$ فإن : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \text{أ}+1 & \text{ب}+1 & \text{حـ}+1 \end{vmatrix} =$ ....

(أ) ك (ب) ك − ١ (جـ) ك − ٦ (د) ك − ٣

(٢٧) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} 2\,\text{جاس} & 1 \\ 1 & \text{جاس} \end{vmatrix} = 0$ هى .... حيث س $\in\ ]0 ، \pi[$

(أ) $\{0\}$ (ب) $\{\frac{\pi}{2}\}$ (جـ) $\{0 ، \frac{\pi}{2}\}$ (د) $\{\frac{\pi}{4}\}$

(٢٨) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} |\text{س}-1| & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 7$ هى ....

(أ) {٦ ، ٤} (ب) {٤ ، −٦} (جـ) {٦ ، −٤} (د) ∅

(٢٩) إذا كان : $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ \text{أ} & 1 & -2 \\ 4 & \text{ب} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

فإن : أ × ب = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) ٢

(٣٠) إذا كان : $\begin{vmatrix} -1 & \text{أ} & \text{ب} \\ 4 & 2 & \text{حـ} \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -6$ فأى مما يأتى يكون صحيح ؟

(I) أ = ب = حـ = ٠ .

(II) ١٢ أ = ٥ حـ + ٢٠ ب

(III) ٥ حـ = ١٢ أ + ٢٠ ب

(أ) (I) فقط. (ب) (II) فقط. (جـ) (I) ، (II) (د) (II) ، (III)

٢ بدون فك المحدد أوجد قيمة :

(١) $\begin{vmatrix} 615 & 616 \\ 617 & 618 \end{vmatrix}$ «−٢»

(٢) $\begin{vmatrix} 1985 & 1984 \\ 1987 & 1986 \end{vmatrix}$ «٢»

(٣) (السودان ٢٠١٤) $\begin{vmatrix} 2 & \text{صفر} & -2 \\ -5 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

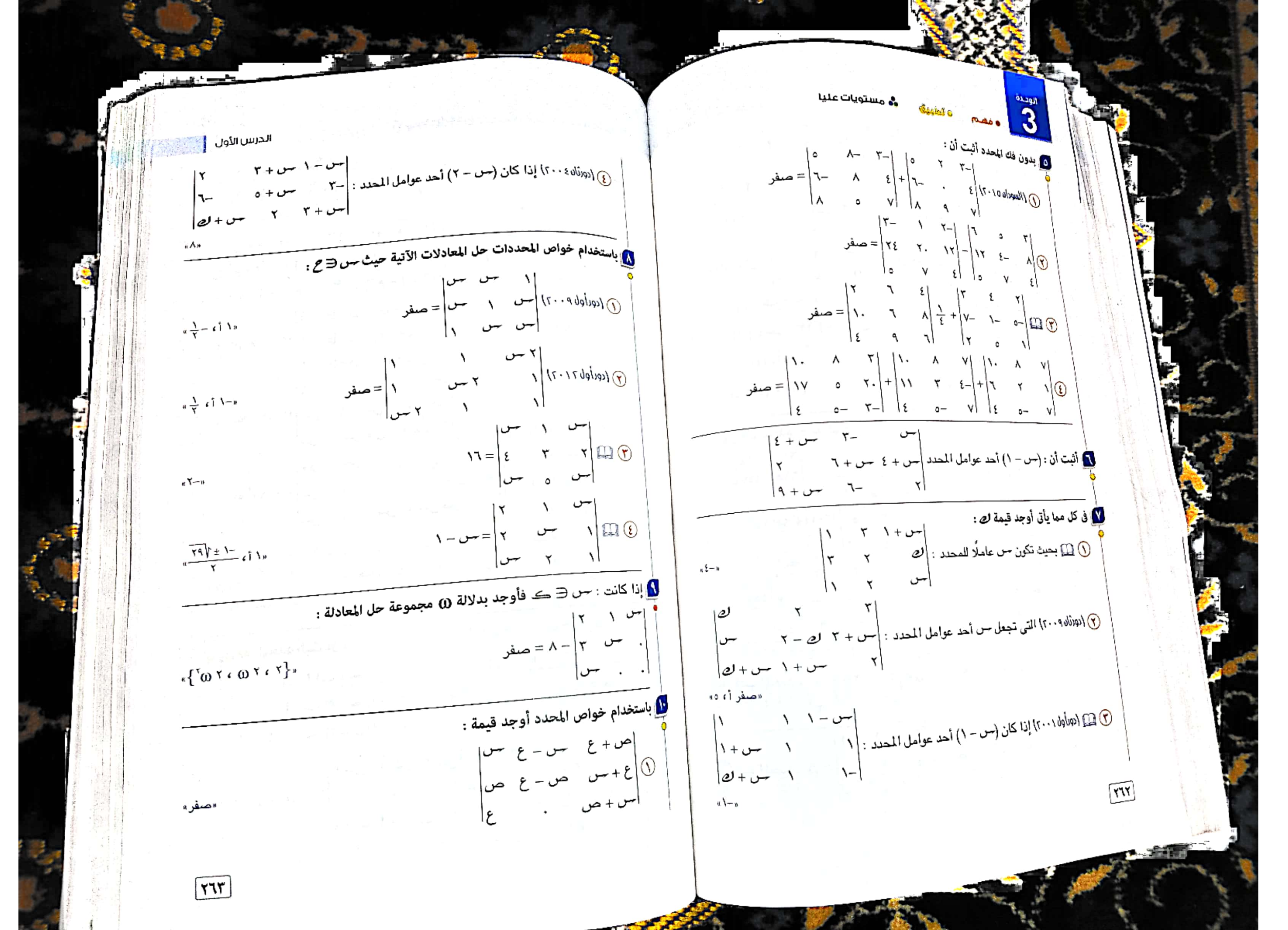
(٤) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 2 & -10 \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} 76 & 78 & 80 \\ 82 & 88 & 94 \\ 86 & 96 & 106 \end{vmatrix}$

٣ اكتب المحدد : $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ على صورة مجموع محددين قيمة أحدهما صفر.

٤ ضع المحدد : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ على الصورة المثلثة وأوجد قيمته. «١٠٩»



٥ بدون فك المحدد أثبت أن :

① (السودان ٢٠١٥) $\begin{vmatrix} -٣ & ٢ & ٥ \\ ٤ & ٠ & -٦ \\ ٧ & ٩ & ٨ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & -٨ & ٥ \\ ٤ & ٨ & -٦ \\ ٧ & ٥ & ٨ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

② $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٦ \\ ٨ & -٤ & ١٢ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -٢ & ١ & -٣ \\ ١٢ & ٢٠ & ٢٤ \\ ٤ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

③ 📖 $\begin{vmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ -٥ & -١ & -٧ \\ ١ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} + \frac{١}{٤} \begin{vmatrix} ٤ & ٦ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ١٠ \\ ٦ & ٩ & ٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

④ $\begin{vmatrix} ٧ & ٨ & ١٠ \\ ١ & ٢ & ٦ \\ ٧ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ٨ & ١٠ \\ -٤ & ٣ & ١١ \\ ٧ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١٠ \\ ٢٠ & ٥ & ١٧ \\ -٣ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

٦ أثبت أن : (س − ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} & -٣ & \text{س}+٤ \\ \text{س}+٤ & \text{س}+٦ & ٢ \\ ٢ & -٦ & \text{س}+٩ \end{vmatrix}$

٧ فى كل مما يأتى أوجد قيمة ك :

① 📖 بحيث تكون س عاملاً للمحدد : $\begin{vmatrix} \text{س}+١ & ٣ & ١ \\ \text{ك} & ٢ & ٣ \\ \text{س} & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ «−٤»

② (دورثان ٢٠٠٩) التى تجعل س أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & \text{ك} \\ \text{س}+٢ & \text{ك}-٢ & \text{س} \\ ٢ & \text{س}+١ & \text{س}+\text{ك} \end{vmatrix}$ «صفر أ، ٥»

③ 📖 (دورأول ٢٠٠١) إذا كان (س − ١) أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} \text{س}-١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & \text{س}+١ \\ -١ & ١ & \text{س}+\text{ك} \end{vmatrix}$ «−١»

④ (دورثان ٢٠٠٤) إذا كان (س − ٢) أحد عوامل المحدد : $\begin{vmatrix} \text{س}-١ & \text{س}+٣ & ٢ \\ -٣ & \text{س}+٥ & -٦ \\ \text{س}+٣ & ٢ & \text{س}+\text{ك} \end{vmatrix}$ «٨»

٨ باستخدام خواص المحددات حل المعادلات الآتية حيث س ∈ ح :

① (دورأول ٢٠٠٩) $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & ١ & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$ «١ أ، $-\frac{١}{٢}$»

② (دورأول ٢٠١٢) $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ١ & ١ \\ ١ & ٢\text{س} & ١ \\ ١ & ١ & ٢\text{س} \end{vmatrix} = \text{صفر}$ «−١ أ، $\frac{١}{٢}$»

③ 📖 $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & \text{س} \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ \text{س} & ٥ & \text{س} \end{vmatrix} = ١٦$ «−٢»

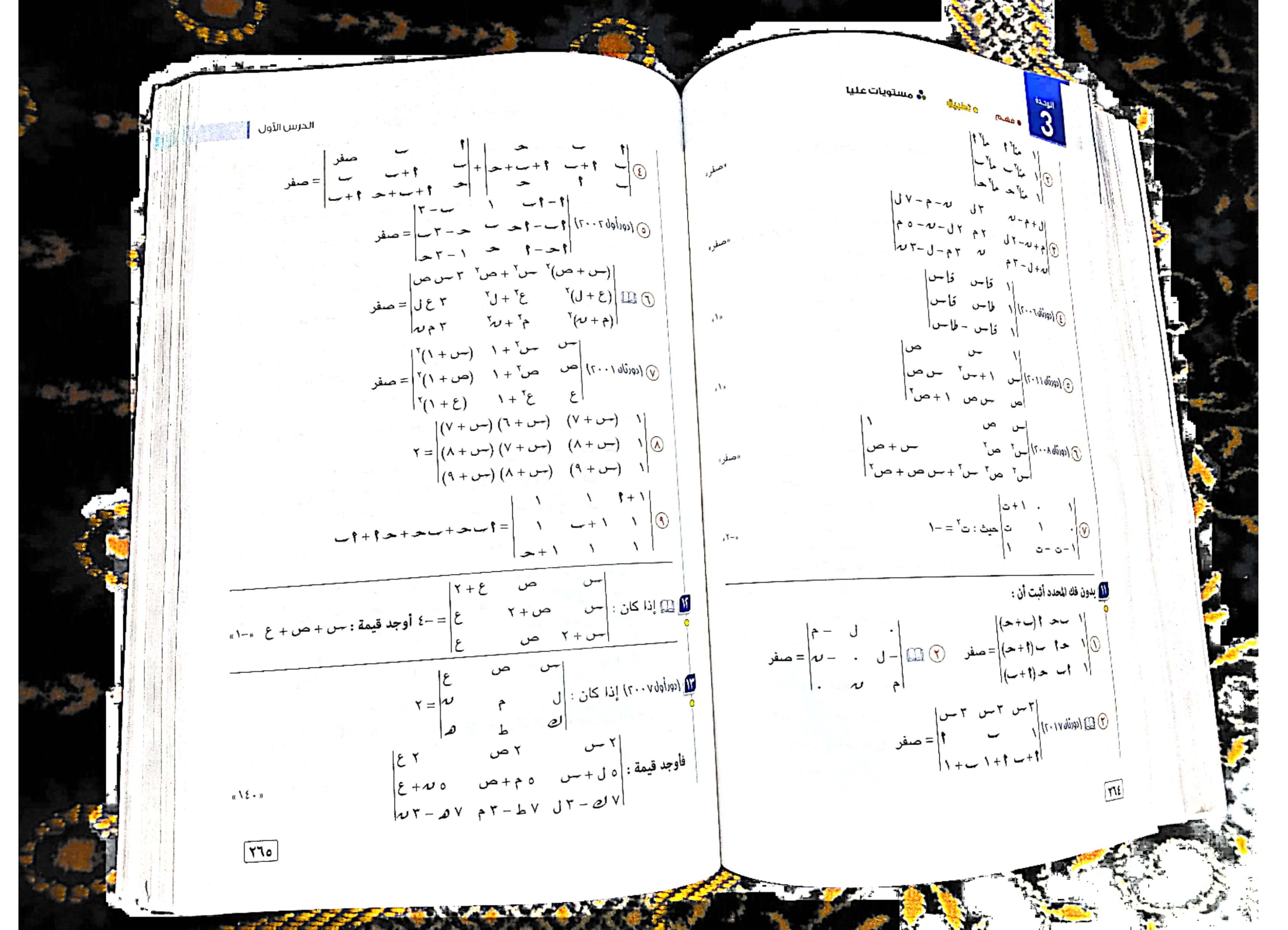
④ 📖 $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٢ \\ ١ & \text{س} & ٢ \\ ١ & ٢ & \text{س} \end{vmatrix} = \text{س} - ١$ «١ أ، $\frac{-١ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$»

٩ إذا كانت : س ∈ ك فأوجد بدلالة ω مجموعة حل المعادلة :

$\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٣ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{vmatrix} - ٨ = \text{صفر}$ «$\{٢ ، ٢ω ، ٢ω^٢\}$»

١٠ باستخدام خواص المحدد أوجد قيمة :

① $\begin{vmatrix} \text{ص}+\text{ع} & \text{س}-\text{ع} & \text{س} \\ \text{ع}+\text{س} & \text{ص}-\text{ع} & \text{ص} \\ \text{س}+\text{ص} & ٠ & \text{ع} \end{vmatrix}$ «صفر»



② $\begin{vmatrix} ١ & \text{جتا}^٢\text{أ} & \text{جا}^٢\text{أ} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{ب} & \text{جا}^٢\text{ب} \\ ١ & \text{جتا}^٢\text{جـ} & \text{جا}^٢\text{جـ} \end{vmatrix}$ «صفر»

③ $\begin{vmatrix} \text{ل}+\text{م}-\text{ن} & ٢\text{ل} & \text{ن}-\text{م}-٧\text{ل} \\ \text{م}+\text{ن}-٢\text{ل} & ٢\text{م} & ٢\text{ل}-\text{ن}-٥\text{م} \\ \text{ن}+\text{ل}-٢\text{م} & \text{ن} & ٢\text{م}-\text{ل}-٣\text{ن} \end{vmatrix}$ «صفر»

④ (دور ثان ٢٠٠٦) $\begin{vmatrix} ١ & \text{قاس} & \text{قاس} \\ ١ & \text{طاس} & \text{قاس} \\ ١ & \text{قاس} & -\text{طاس} \end{vmatrix}$ «١٠»

⑤ (دور ثان ٢٠١١) $\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & ١+\text{س}^٢ & \text{س ص} \\ \text{ص} & \text{س ص} & ١+\text{ص}^٢ \end{vmatrix}$ «١٠»

⑥ (دور ثان ٢٠٠٨) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & ١ \\ \text{س}^٢ & \text{ص}^٢ & \text{س}+\text{ص} \\ \text{س}^٢ & \text{ص}^٢ & \text{س}^٢+\text{س ص}+\text{ص}^٢ \end{vmatrix}$ «صفر»

⑦ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ١+\text{ت} \\ ٠ & ١ & \text{ت} \\ ١-\text{ت} & -\text{ت} & ١ \end{vmatrix}$ حيث : $\text{ت}^٢ = -١$ «−٢»

11 بدون فك المحدد أثبت أن :

① $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب جـ} & \text{أ}(\text{ب}+\text{جـ}) \\ ١ & \text{جـ أ} & \text{ب}(\text{أ}+\text{جـ}) \\ ١ & \text{أ ب} & \text{جـ}(\text{أ}+\text{ب}) \end{vmatrix} = \text{صفر}$

② $\begin{vmatrix} ٠ & \text{ل} & -\text{م} \\ -\text{ل} & ٠ & -\text{ن} \\ \text{م} & \text{ن} & ٠ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

③ (دور ثان ٢٠١٧) $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٢\text{س} & ٣\text{س} \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+١ & \text{ب}+١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

④ $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{صفر} \\ \text{ب} & \text{أ}+\text{ب} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ}+\text{ب} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

⑤ (دور أول ٢٠٠٢) $\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{أب} & ١ & \text{ب}-٣ \\ \text{أب}-\text{أجـ} & \text{ب} & \text{جـ}-٣\text{ب} \\ \text{أجـ}-\text{أ} & \text{جـ} & ١-٣\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

⑥ $\begin{vmatrix} (\text{س}+\text{ص})^٢ & \text{س}^٢+\text{ص}^٢ & ٣\text{س ص} \\ (\text{ع}+\text{ل})^٢ & \text{ع}^٢+\text{ل}^٢ & ٣\text{ع ل} \\ (\text{م}+\text{ن})^٢ & \text{م}^٢+\text{ن}^٢ & ٣\text{م ن} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

⑦ (دور ثان ٢٠٠١) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^٢+١ & (\text{س}+١)^٢ \\ \text{ص} & \text{ص}^٢+١ & (\text{ص}+١)^٢ \\ \text{ع} & \text{ع}^٢+١ & (\text{ع}+١)^٢ \end{vmatrix} = \text{صفر}$

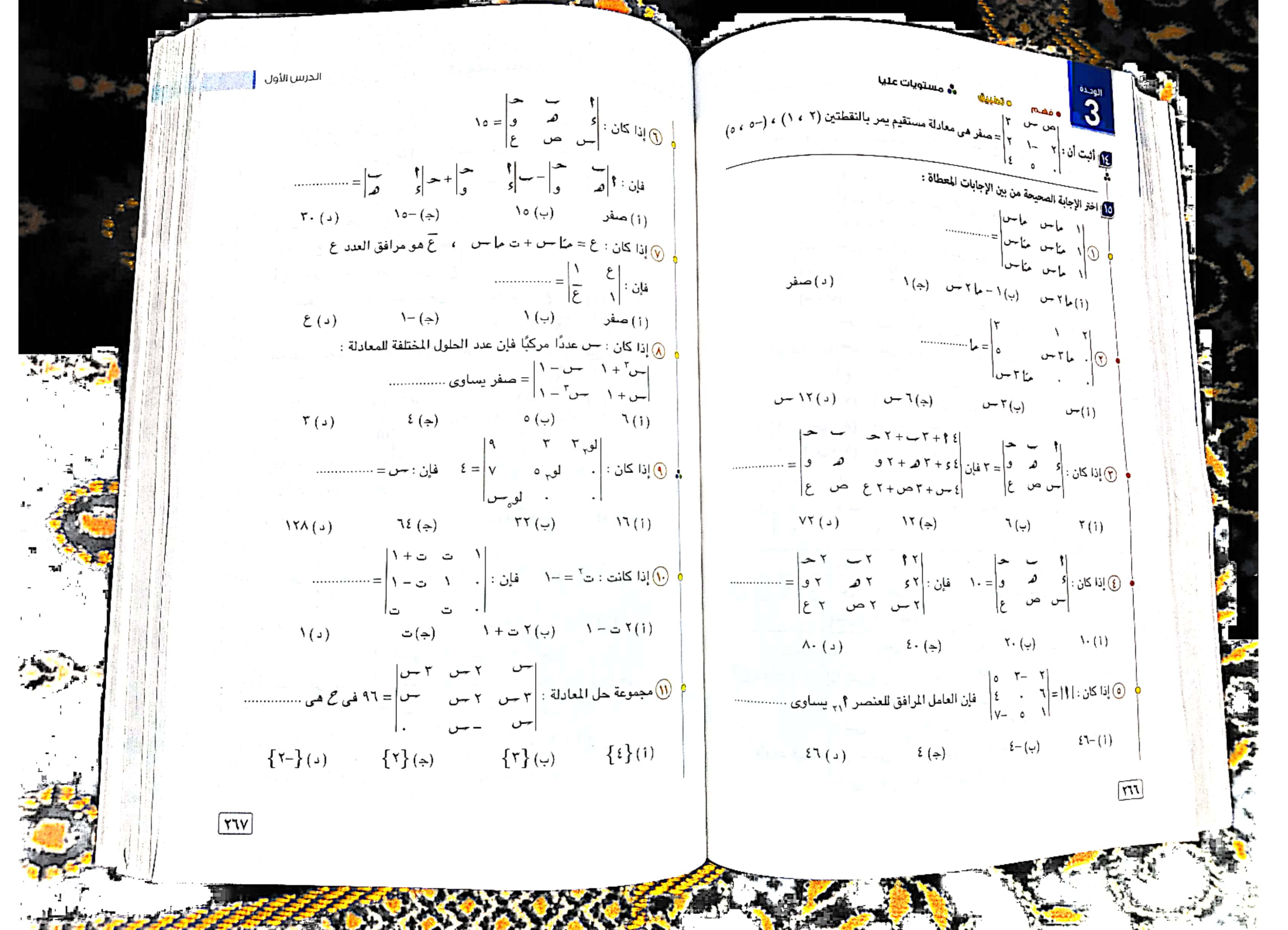
⑧ $\begin{vmatrix} ١ & (\text{س}+٧) & (\text{س}+٦)(\text{س}+٧) \\ ١ & (\text{س}+٨) & (\text{س}+٧)(\text{س}+٨) \\ ١ & (\text{س}+٩) & (\text{س}+٨)(\text{س}+٩) \end{vmatrix} = ٢$

⑨ $\begin{vmatrix} ١+\text{أ} & ١ & ١ \\ ١ & ١+\text{ب} & ١ \\ ١ & ١ & ١+\text{جـ} \end{vmatrix} = \text{أب جـ} + \text{ب جـ} + \text{جـ أ} + \text{أ ب}$

12 إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع}+٢ \\ \text{س} & \text{ص}+٢ & \text{ع} \\ \text{س}+٢ & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -٤$ **أوجد قيمة :** س + ص + ع «−١»

13 (دور أول ٢٠٠٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ك} & \text{ط} & \text{هـ} \end{vmatrix} = ٢$

فأوجد قيمة : $\begin{vmatrix} ٢\text{س} & ٢\text{ص} & ٢\text{ع} \\ ٥\text{ل}+\text{س} & ٥\text{م}+\text{ص} & ٥\text{ن}+\text{ع} \\ ٧\text{ك}-٣\text{ل} & ٧\text{ط}-٣\text{م} & ٧\text{هـ}-٣\text{ن} \end{vmatrix}$ «١٤٠»



• فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا

١٤ أثبت أن : $\begin{vmatrix} ٣ & س & ص \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر هى معادلة مستقيم يمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (−٥ ، ٥)

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\begin{vmatrix} ماس & ماس & ١ \\ مَاس & مَاس & ١ \\ مَاس & ماس & ١ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ما٢س (ب) ١ − ما٢س (ج) ١ (د) صفر

② $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ٥ & ما٢س & ٠ \\ مَا٢س & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ما ....

(أ) س (ب) ٢س (ج) ٦س (د) ١٢س

③ إذا كان : $\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ و & هـ & ء \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$ = ٣ فإن $\begin{vmatrix} حـ & ب & ٤أ + ٣ب + ٢حـ \\ و & هـ & ٤ء + ٣هـ + ٢و \\ ع & ص & ٤س + ٣ص + ٢ع \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) ٧٢

④ إذا كان : $\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ و & هـ & ء \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$ = ١٠ فإن : $\begin{vmatrix} ٢حـ & ٢ب & ٢أ \\ ٢و & ٢هـ & ٢ء \\ ٢ع & ٢ص & ٢س \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٤٠ (د) ٨٠

⑤ إذا كان : |أ| = $\begin{vmatrix} ٥ & ٣- & ٢ \\ ٤ & ٠ & ٦ \\ ٧- & ٥ & ١ \end{vmatrix}$ فإن العامل المرافق للعنصر $أ_{٢١}$ يساوى ....

(أ) −٤٦ (ب) −٤ (ج) ٤ (د) ٤٦

⑥ إذا كان : $\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ و & هـ & ء \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$ = ١٥

فإن : أ $\begin{vmatrix} ب & هـ \\ حـ & و \end{vmatrix}$ − ب $\begin{vmatrix} أ & ء \\ حـ & و \end{vmatrix}$ + حـ $\begin{vmatrix} أ & ء \\ ب & هـ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٥ (ج) −١٥ (د) ٣٠

⑦ إذا كان : ع = مَاس + ت ماس ، $\bar{ع}$ هو مرافق العدد ع

فإن : $\begin{vmatrix} ١ & ع \\ \bar{ع} & ١ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) −١ (د) ع

⑧ إذا كان : س عددًا مركبًا فإن عدد الحلول المختلفة للمعادلة :

$\begin{vmatrix} س - ١ & س^٢ + ١ \\ س^٣ - ١ & س + ١ \end{vmatrix}$ = صفر يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٤ (د) ٣

⑨ إذا كان : $\begin{vmatrix} ٩ & ٣ & لو_٢ ٣ \\ ٧ & لو_٣ ٥ & ٠ \\ لو_٥ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٤ فإن : س = ...

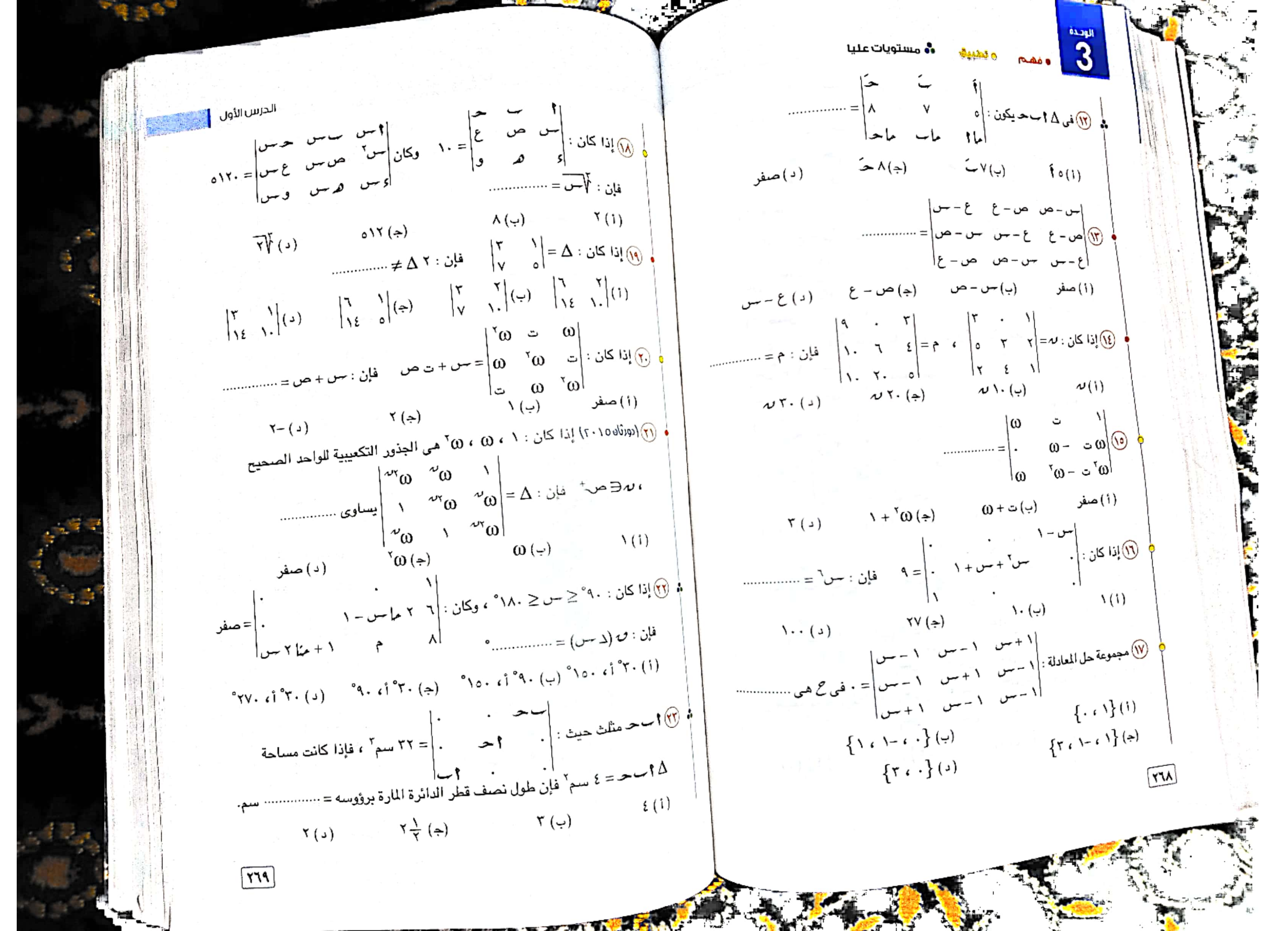
(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (ج) ٦٤ (د) ١٢٨

⑩ إذا كانت : $ت^٢$ = −١ فإن : $\begin{vmatrix} ت + ١ & ت & ١ \\ ت - ١ & ١ & ٠ \\ ت & ت & ٠ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٢ت − ١ (ب) ٢ت + ١ (ج) ت (د) ١

⑪ مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٣س & ٢س & س \\ س & ٢س & ٣س \\ ٠ & -س & س \end{vmatrix}$ = ٩٦ فى ح هى ....

(أ) {٤} (ب) {٣} (ج) {٢} (د) {−٢}



الوحدة 3 • فهم • تطبيق • مستويات عليا

(١٢) في Δ أب حـ يكون: $\begin{vmatrix} حـَ & بَ & أَ \\ ٨ & ٧ & ٥ \\ جاحـ & جاب & جاأ \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٥أ (ب) ٧بَ (ج) ٨حـَ (د) صفر

(١٣) $\begin{vmatrix} ع-س & ص-ع & س-ص \\ س-ص & ع-س & ص-ع \\ ص-ع & س-ص & ع-س \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) س − ص (ج) ص − ع (د) ع − س

(١٤) إذا كان: ن = $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٣ \\ ١٠ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٢٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن: م = ...

(أ) ن (ب) ١٠ن (ج) ٢٠ن (د) ٣٠ن

(١٥) $\begin{vmatrix} \omega & ت & ١ \\ ٠ & -\omega & \omega ت \\ \omega & -\omega^٢ & \omega^٢ ت \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ت + ω (ج) ω² + ١ (د) ٣

(١٦) إذا كان: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & س-١ \\ ٠ & س^٢+س+١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٩ فإن: س⁶ = ...

(أ) ١ (ب) ١٠ (ج) ٢٧ (د) ١٠٠

(١٧) مجموعة حل المعادلة: $\begin{vmatrix} ١-س & ١-س & ١+س \\ ١-س & ١+س & ١-س \\ ١+س & ١-س & ١-س \end{vmatrix}$ = ٠ في ح هي ....

(أ) {١ ، ٠} (ب) {٠ ، −١ ، ١} (ج) {١ ، −١ ، ٢} (د) {٠ ، ٣}

٢٦٨

الدرس الأول

(١٨) إذا كان: $\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ ع & ص & س \\ و & هـ & ء \end{vmatrix}$ = ١٠ وكان $\begin{vmatrix} حـ س & ب س & أ س \\ ع س & ص س & س^٢ \\ و س & هـ س & ء س \end{vmatrix}$ = ٥١٢٠

فإن: $\sqrt[٣]{س}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٨ (ج) ٥١٢ (د) $\sqrt[٣]{٢}$

(١٩) إذا كان: Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن: ٢Δ ≠ ....

(أ) $\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ١٤ & ١٠ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٧ & ١٠ \end{vmatrix}$ (ج) $\begin{vmatrix} ٦ & ١ \\ ١٤ & ٥ \end{vmatrix}$ (د) $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١٤ & ١٠ \end{vmatrix}$

(٢٠) إذا كان: $\begin{vmatrix} \omega^٢ & ت & \omega \\ \omega & \omega^٢ & ت \\ ت & \omega & \omega^٢ \end{vmatrix}$ = س + ت ص فإن: س + ص = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) −٢

(٢١) (دور ثان ٢٠١٥) إذا كان: ١ ، ω ، ω² هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، ن ∈ ص⁺ فإن: Δ = $\begin{vmatrix} \omega^{٢ن} & \omega^{ن} & ١ \\ ١ & \omega^{٢ن} & \omega^{ن} \\ \omega^{ن} & ١ & \omega^{٢ن} \end{vmatrix}$ يساوي ....

(أ) ١ (ب) ω (ج) ω² (د) صفر

(٢٢) إذا كان: ٩٠° ≤ س ≤ ١٨٠° ، وكان: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ جاس - ١ & ٦ \\ ١ + جتا ٢س & م & ٨ \end{vmatrix}$ = صفر

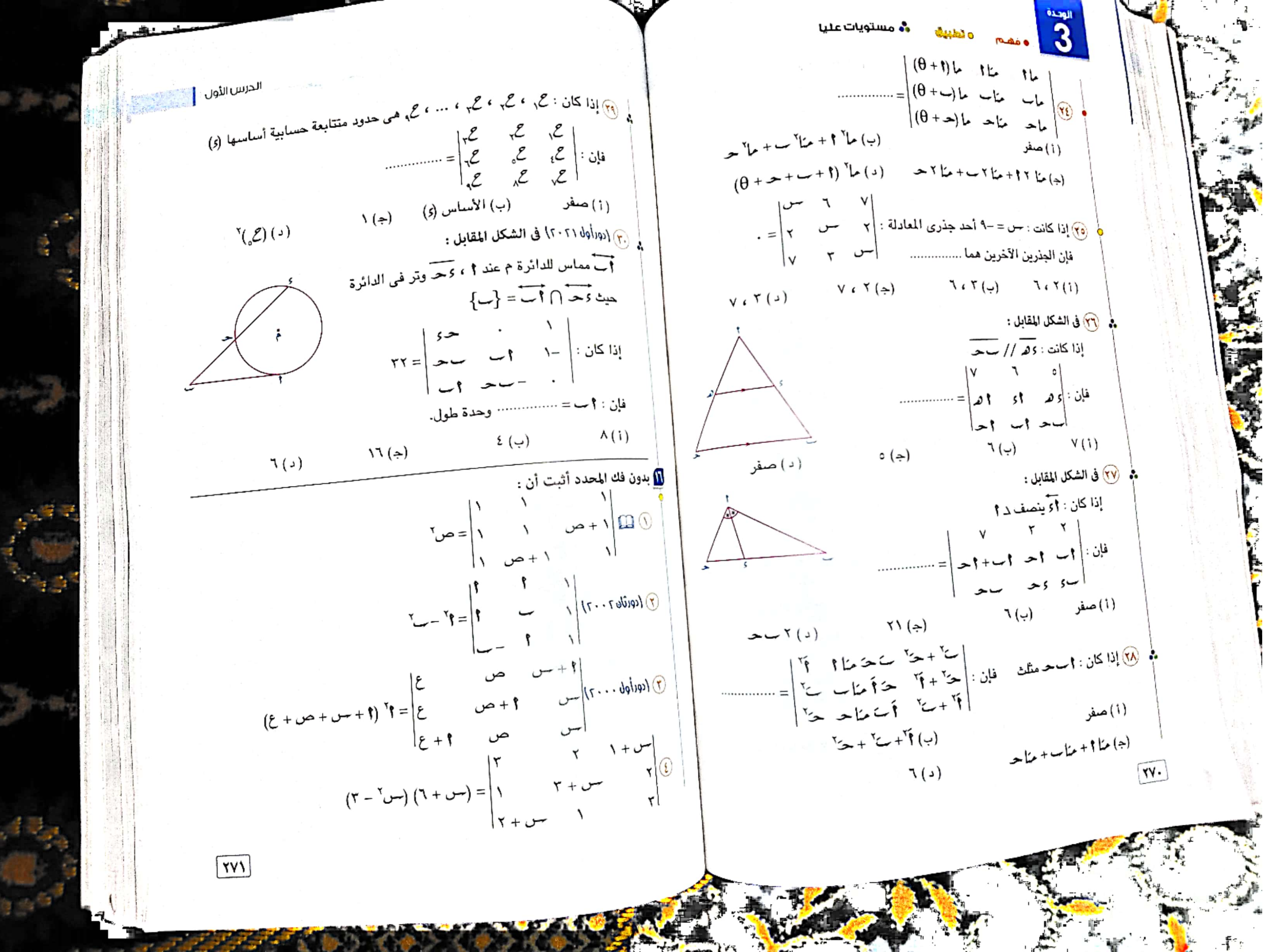
فإن: ق(∠ س) = ...°

(أ) ٣٠° أو ١٥٠° (ب) ٩٠° أو ١٥٠° (ج) ٣٠° أو ٩٠° (د) ٣٠° أو ٢٧٠°

(٢٣) أب حـ مثلث حيث: $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ب حـ \\ ٠ & أ حـ & ٠ \\ أ ب & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٣٢ سم² ، فإذا كانت مساحة Δ أب حـ = ٤ سم² فإن طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) $٢\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٢٦٩



(٢٤) $\begin{vmatrix} \text{جا}(\text{أ}+\theta) & \text{جتا أ} & \text{جا أ} \\ \text{جا}(\text{ب}+\theta) & \text{جتا ب} & \text{جا ب} \\ \text{جا}(\text{حـ}+\theta) & \text{جتا حـ} & \text{جا حـ} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\text{جا}^2\text{أ} + \text{جتا}^2\text{ب} + \text{جا}^2\text{حـ}$

(جـ) جا ٢أ + جتا ٢ب + جا ٢حـ (د) $\text{جا}^2(\text{أ}+\text{ب}+\text{حـ}+\theta)$

(٢٥) إذا كانت : س = -٩ أحد جذرى المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & ٦ & ٧ \\ ٢ & \text{س} & ٢ \\ ٧ & ٣ & \text{س} \end{vmatrix} = ٠$

فإن الجذرين الآخرين هما ....

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٦ (جـ) ٢ ، ٧ (د) ٣ ، ٧

(٢٦) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ده // بحـ

فإن : $\begin{vmatrix} ٧ & ٦ & ٥ \\ \text{أهـ} & \text{أد} & \text{ده} \\ \text{أحـ} & \text{أب} & \text{بحـ} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٦ (جـ) ٥ (د) صفر

(٢٧) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أد ينصف ∠ أ

فإن : $\begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ٢ \\ \text{أب}+\text{أحـ} & \text{أحـ} & \text{أب} \\ \text{بحـ} & \text{دحـ} & \text{بد} \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) ٢١ (د) ٢ بحـ

(٢٨) إذا كان : أبحـ مثلث فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{ب حـ جتا أ} & \text{ب}^2+\text{حـ}^2 \\ \text{ب}^2 & \text{حـ أ جتا ب} & \text{حـ}^2+\text{أ}^2 \\ \text{حـ}^2 & \text{أ ب جتا حـ} & \text{أ}^2+\text{ب}^2 \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{حـ}^2$

(جـ) جتا أ + جتا ب + جتا حـ (د) ٦

(٢٩) إذا كان : $\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \text{ع}_3 ، \ldots ، \text{ع}_9$ هى حدود متتابعة حسابية أساسها (د)

فإن : $\begin{vmatrix} \text{ع}_3 & \text{ع}_2 & \text{ع}_1 \\ \text{ع}_6 & \text{ع}_5 & \text{ع}_4 \\ \text{ع}_9 & \text{ع}_8 & \text{ع}_7 \end{vmatrix}$ = ...

(أ) صفر (ب) الأساس (د) (جـ) ١ (د) $(\text{ع}_5)^2$

(٣٠) (دور أول ٢٠٢١) فى الشكل المقابل :

أب مماس للدائرة م عند أ ، دحـ وتر فى الدائرة

حيث دحـ ∩ أب = {ب}

إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{دحـ} & ٠ & ١ \\ \text{بحـ} & \text{أب} & -١ \\ \text{أب} & -\text{بحـ} & ٠ \end{vmatrix} = ٣٢$

فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ١٦ (د) ٦

١٦ بدون فك المحدد أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١+\text{ص} \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١+\text{ص} & ١ \end{vmatrix} = \text{ص}^2$

(٢) (دور ثان ٢٠٠٢) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & ١ \\ -\text{ب} & \text{أ} & ١ \end{vmatrix} = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$

(٣) (دور أول ٢٠٠٠) $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{أ}+\text{س} \\ \text{ع} & \text{أ}+\text{ص} & \text{س} \\ \text{أ}+\text{ع} & \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 (\text{أ}+\text{س}+\text{ص}+\text{ع})$

(٤) $\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & \text{س}+١ \\ ١ & \text{س}+٣ & ٢ \\ \text{س}+٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix} = (\text{س}+٦)(\text{س}^2-٣)$

⑤ $\begin{vmatrix} \text{ب − ء} & \text{ب − ح} & \text{ح} \\ \text{ب − ء} & \text{ح} & \text{ب − ح} \\ \text{− ء} & \text{ب − ح} & \text{ب + ح} \end{vmatrix} = \text{ب (٢ب − ء) (٢ح − ب)}$

⑥ $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{أ + ب} \\ \text{ب} & \text{أ + ب} & \text{أ} \\ \text{أ + ب} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{−٢ (أ}^{٣}\text{ + ب}^{٣}\text{)}$

⑦ $\begin{vmatrix} \text{٢أ − ح} & \text{أ − ٣ب} & \text{٣ب} \\ \text{٢أ − ح} & \text{٣ب} & \text{٢أ − ٣ب} \\ \text{− ح} & \text{٢أ − ٣ب} & \text{٢أ + ٣ب} \end{vmatrix} = \text{٢أ (٣أ − ح) (٩ب − ٢أ)}$

⑧ 📖 (دور أول ٢٠١٨) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{أ}^{٢} & \text{ب}^{٢} & \text{ح}^{٢} \end{vmatrix} = \text{(ب − أ) (ح − أ) (ح − ب)}$

⑨ $\begin{vmatrix} \text{ص} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix} = \text{(ص + ٢س) (س − ص)}^{٢}$

⑩ (دور ثان ٢٠٠٧) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ − ح} & \text{٢أ} \\ \text{ب} & \text{أ − ح} & \text{٢ب} \\ \text{ح} & \text{أ} & \text{ب + ح} \end{vmatrix} = \text{(أ − ب) (أ − ح) (ب − ح)}$

⑪ 📖 (دور ثان ٢٠١٨) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{ح} \\ \text{ب} & \text{ح} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{(أ − ب) (أ − ح) (أ + ب + ح)}$

⑫ 📖 (دور أول ٢٠٠٧) $\begin{vmatrix} \text{س + أ} & \text{س + أ} & \text{٢أ} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{أ} \\ ٠ & \text{أ − س} & \text{س − أ} \end{vmatrix} = \text{(س + ٢أ) (س − أ)}^{٢}$

⑬ $\begin{vmatrix} \text{أ + س} & \text{س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{ب + س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{س} & \text{ح + س} \end{vmatrix} = \text{أ ب ح + س (أ ب + ب ح + أ ح)}$

⑭ 📖 $\begin{vmatrix} \text{أ − ب − ح} & \text{٢أ} & \text{٢أ} \\ \text{٢ب} & \text{ب − ح − أ} & \text{٢ب} \\ \text{٢ح} & \text{٢ح} & \text{ح − أ − ب} \end{vmatrix} = \text{(أ + ب + ح)}^{٣}$

⑮ $\begin{vmatrix} \text{أ ل} & \text{أ م} & \text{أ ن} \\ \text{أ م} & \text{ب م} & \text{ب ن} \\ \text{أ ن} & \text{ب ن} & \text{ح ن} \end{vmatrix} = \text{أ ن (ب ل − أ م) (م ح − ب ن)}$

⑯ $\begin{vmatrix} \text{أ + ب + ح} & \text{− ح} & \text{− ب} \\ \text{− ح} & \text{أ + ب + ح} & \text{− أ} \\ \text{− ب} & \text{− أ} & \text{أ + ب + ح} \end{vmatrix} = \text{٢ (أ + ب) (ب + ح) (ح + أ)}$

⑰ 📖 (دور ثان ٢٠٠٣) $\begin{vmatrix} \text{س + ص + ٢} & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & \text{٢س + ص + ١} & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س + ٢ص + ١} \end{vmatrix}$

$= \text{٢ (س + ص + ١)}^{٣}$

⑱ 📖 $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ \text{− ٢س + ٢س}^{٢} & \text{١ + ٢س}^{٢} & \text{٢س}^{٣} \\ \text{−٣ + ٢س}^{٢} & \text{٣س}^{٢} & \text{١ + ٣س}^{٣} \end{vmatrix} = \text{١ + ٥س + س}^{٣}$

⑲ $\begin{vmatrix} \text{أ}^{٢} & \text{ب}^{٢}\text{ + ح}^{٢} & \text{ب ح} \\ \text{ب}^{٢} & \text{ح}^{٢}\text{ + أ}^{٢} & \text{ح أ} \\ \text{ح}^{٢} & \text{أ}^{٢}\text{ + ب}^{٢} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$

$= \text{(أ}^{٢}\text{ + ب}^{٢}\text{ + ح}^{٢}\text{) (أ − ح) (أ − ب) (ب − ح) (أ + ب + ح)}$

⑳ (دور أول ٢٠٠٦) $\begin{vmatrix} ١ & \text{−٢ح + ٢ح}^{٢} & \text{−٣ح + ٣ح}^{٢} \\ ١ & \text{١ + ٢ح}^{٢} & \text{٣ح}^{٢} \\ \text{ح} & \text{٢ح}^{٣} & \text{١ + ٣ح}^{٣} \end{vmatrix} = \text{١ + ٢ح + ٣ح}^{٢}$

㉑ 📖 (دور أول ٢٠١٣) $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}^{٢} & \text{س}^{٣} \\ \text{ص} & \text{ص}^{٢} & \text{ص}^{٣} \\ \text{ع} & \text{ع}^{٢} & \text{ع}^{٣} \end{vmatrix} = \text{س ص ع (س − ص) (ص − ع) (ع − س)}$

(٢٢) $\begin{vmatrix} س & س^٢ & س^٣+١ \\ ص & ص^٢ & ص^٣+١ \\ ع & ع^٢ & ع^٣+١ \end{vmatrix} = (س - ص)(ص - ع)(ع - س)(س ص ع + ١)$

(٢٣) (دور ثان ٢٠١٢) $\begin{vmatrix} ص & س & س+ص \\ ص+٣ & ٣ & ص \\ ٣ & س+٣ & س \end{vmatrix} = ١٢ س ص$

(٢٤) $\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & ١ & ٠ \\ ع & ٠ & ١ \end{vmatrix} = س + ص^٢ + ع^٢$

(٢٥) $\begin{vmatrix} أ^٢+١ & أب & أحـ \\ أب & ب^٢+١ & بحـ \\ أحـ & بحـ & حـ^٢+١ \end{vmatrix} = أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢ + ١$

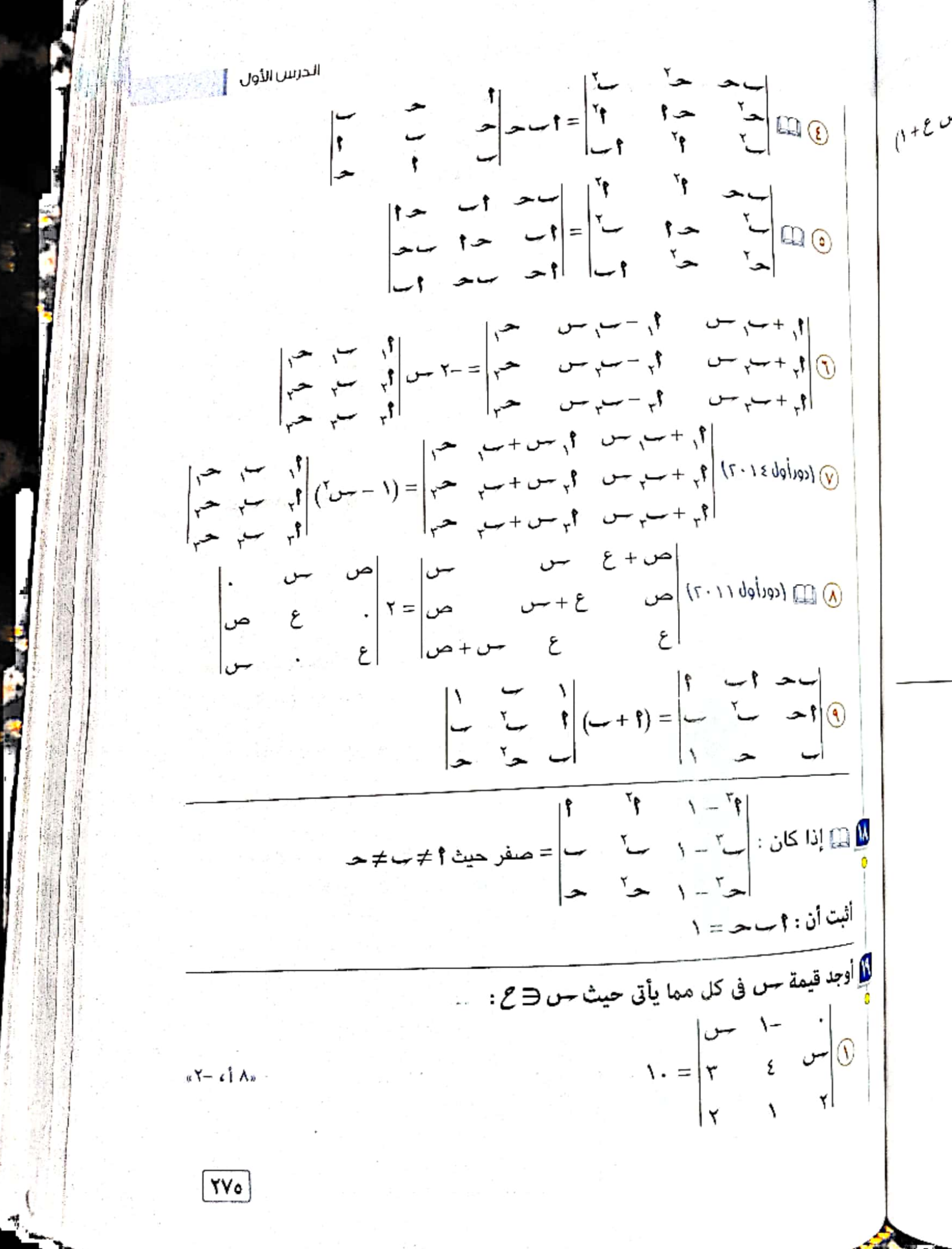
(٢٦) $\begin{vmatrix} ١+أ & ١ & ١ \\ ١ & ١+ب & ١ \\ ١ & ١ & ١+حـ \end{vmatrix} = أ ب حـ \left(\frac{١}{أ} + \frac{١}{ب} + \frac{١}{حـ} + ١\right)$

١٧ بدون فك المحدد أثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} س+ص & ٢ص & ع \\ ص+ع & ٢ع & س \\ ع+س & ٢س & ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ص & ع & س \\ ع & س & ص \end{vmatrix}$

(٢) $\begin{vmatrix} ل+م & م+ن & ن+ل \\ م+ن & ن+ل & ل+م \\ ن+ل & ل+م & م+ن \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ل & م & ن \\ م & ن & ل \\ ن & ل & م \end{vmatrix}$

(٣) $\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ أ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ بحـ & حـأ & أب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^٢ & ب^٢ & حـ^٢ \\ أ^٣ & ب^٣ & حـ^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$



(٤) $\begin{vmatrix} بحـ & حـ^٢ & ب^٢ \\ حـ^٢ & حـأ & أ^٢ \\ ب^٢ & أ^٢ & أب \end{vmatrix} = أ ب حـ \begin{vmatrix} أ & حـ & ب \\ حـ & ب & أ \\ ب & أ & حـ \end{vmatrix}$

(٥) $\begin{vmatrix} بحـ & أ^٢ & أ^٢ \\ ب^٢ & حـأ & ب^٢ \\ حـ^٢ & حـ^٢ & أب \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} بحـ & أب & حـأ \\ أب & حـأ & بحـ \\ أحـ & بحـ & أب \end{vmatrix}$

(٦) $\begin{vmatrix} أ_١+ب_١س & أ_١-ب_١س & حـ_١ \\ أ_٢+ب_٢س & أ_٢-ب_٢س & حـ_٢ \\ أ_٣+ب_٣س & أ_٣-ب_٣س & حـ_٣ \end{vmatrix} = -٢س \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & حـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & حـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & حـ_٣ \end{vmatrix}$

(٧) (دور أول ٢٠١٤) $\begin{vmatrix} أ_١+ب_١س & أ_١س+ب_١ & حـ_١ \\ أ_٢+ب_٢س & أ_٢س+ب_٢ & حـ_٢ \\ أ_٣+ب_٣س & أ_٣س+ب_٣ & حـ_٣ \end{vmatrix} = (١ - س^٢) \begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ & حـ_١ \\ أ_٢ & ب_٢ & حـ_٢ \\ أ_٣ & ب_٣ & حـ_٣ \end{vmatrix}$

(٨) (دور أول ٢٠١١) $\begin{vmatrix} ص+ع & س & س \\ ص & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ص & س & ٠ \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix}$

(٩) $\begin{vmatrix} بحـ & أب & أ \\ أحـ & ب^٢ & ب \\ ب & حـ & ١ \end{vmatrix} = (أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & ١ \\ أ & ب^٢ & ب \\ ب & حـ^٢ & حـ \end{vmatrix}$

١٨ إذا كان : $\begin{vmatrix} أ^٣-١ & أ^٢ & أ \\ ب^٣-١ & ب^٢ & ب \\ حـ^٣-١ & حـ^٢ & حـ \end{vmatrix} =$ صفر حيث $أ \neq ب \neq حـ$

أثبت أن : $أ ب حـ = ١$

١٩ أوجد قيمة س في كل مما يأتي حيث $س \in ح$:

(١) $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & س \\ س & ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$ «٨، أو -٢»

② $\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ س & ١ & س \\ ١ & -١ & س+١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢} & ١ \\ -س & س \end{vmatrix}$ «-١»

③ $\begin{vmatrix} ٢ & -س & ١ \\ ١ & -١ & ٠ \\ س+١ & ١ & س \end{vmatrix} = ٢س + ١$ «$\frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$»

---

١٠ أثبت أن : $\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س - أ)(س - ب)(س + أ + ب)$

ثم استخدم ذلك في حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ جا هـ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ جا هـ & -١ \\ ١ & -١ & ٢ جا هـ \end{vmatrix} = صفر$

حيث $٠ \le هـ \le ١٨٠^{\circ}$ «٠° ، ٣٠° ، ١٥٠° ، ١٨٠°»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٢١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا ضربت جميع عناصر محدد من الدرجة الثالثة قيمته م في العدد ٢ فإن قيمة المحدد الناتج تساوى ....

(أ) م (ب) ٢ م (ج) ٤ م (د) ٨ م

② $\begin{vmatrix} -٤ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = \dots\dots$

(أ) ٣٢ (ب) ٣٠ (ج) ٢٩ (د) ٢٧

③ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} ٢٠١٩ & ٢٠٢٠ \\ ٢٠٢١ & ٢٠٢٢ \end{vmatrix} = \dots\dots$

(أ) ٢٠١٩ (ب) -٢٠١٩ (ج) -٤٠٣٨ (د) ٤٠٣٨

④ إذا كان : جـ ، ب هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ١١ س + ٢٧ = صفر$

فإن : $\begin{vmatrix} لو_{٣} جـ & لو_{٣} ب \\ -١ & ١ \end{vmatrix} = \dots\dots$

(أ) ٣ (ب) ١ (ج) -١ (د) -٣

⑤ إذا كانت : $د(س) = \begin{vmatrix} جا س & ٠ & ٠ \\ ٠ & جا ٢س & ٠ \\ ٠ & ٠ & جا ٣س \end{vmatrix}$

فإن : $\lim_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^{٣}} = \dots\dots$

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٦

⑥ $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ع_{١}^{ن} & ع_{١}^{ن+١} & ع_{١}^{ن+٢} \\ ع_{٢}^{ن} & ع_{٢}^{ن+١} & ع_{٢}^{ن+٢} \end{vmatrix} = \dots\dots$

(أ) ١ (ب) -١ (ج) صفر (د) ن

---

٢٢ بدون فك المحدد أثبت أن :

① (دور ثان ٢٠١٣) $\begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix} = ٤ س ص ع$

② (دور ثان ٢٠١٥) $\begin{vmatrix} \sqrt{١٢} + \sqrt{٣} & ٢\sqrt{٥} & \sqrt{٥} \\ \sqrt{٢٦} + \sqrt{١٥} & ٥ & \sqrt{١٠} \\ \sqrt{٦٥} + ٣ & \sqrt{١٥} & ٥ \end{vmatrix} = ٥\sqrt{٣}(\sqrt{٦} - ٥)$

---

٢٣ (دور أول ٢٠١٠) ضع م على الصورة المثلثة ومن ثم أوجد قيمته إذا علمت أن :

$م = \begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٨ & ١١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ٤ & ٤ \\ -٣ & ٥ & ٠ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} + ٤ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ٤ & ٧ \end{vmatrix}$ «١٠٨»

الدرس 2

المصفوفات

قبل البدء فى استكمال دراستنا لموضوع المصفوفات سوف نتذكر بعضًا مما درسناه سابقًا فى هذا الموضوع.

تذكر أن :

- **المصفوفة :**
  - هى تنظيم أو ترتيب لعدد من العناصر (المتغيرات أو الأعداد) فى صورة صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين على الصورة ( )
- المصفوفة المكونة من م صفًا ، ن عمودًا تكون على النظم م × ن
- **بعض المصفوفات الخاصة :**

① **المصفوفة المربعة :**

هى مصفوفة عدد صفوفها = عدد أعمدتها مثل $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٢ & ٤ & -٢ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

② **المصفوفة الصفرية :** هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز ☐ مثل : $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

③ **المصفوفة القطرية :** هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسى يكون أحدهم على الأقل لا يساوى صفر مثل : $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

④ **مصفوفة الوحدة I :** هى مصفوفة قطرية كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسى يساوى واحد مثل $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

- **مدور المصفوفة :**

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم م × ن واستبدلنا الصفوف بالأعمدة بنفس الترتيب فإن المصفوفة الناتجة تكون على النظم ن × م ويرمز لها بالرمز $\text{أ}^{\text{مد}}$

فمثلًا : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ -٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣ & -٣ \\ ٢ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ويكون $\boxed{(\text{أ}^{\text{مد}})^{\text{مد}} = \text{أ}}$

- **المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة :** إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن :

① أ مصفوفة متماثلة إذا كان : $\text{أ} = \text{أ}^{\text{مد}}$

فمثلًا : إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{pmatrix} = \text{أ}$ (مصفوفة متماثلة)

② أ مصفوفة شبه متماثلة إذا كان : $\text{أ} = -\text{أ}^{\text{مد}}$

فمثلًا : إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٤ \\ -٣ & -٤ & ٠ \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ & -٣ \\ -١ & ٠ & -٤ \\ ٣ & ٤ & ٠ \end{pmatrix} = -\text{أ}$ (مصفوفة شبه متماثلة)

مع ملاحظة أن المصفوفة شبه المتماثلة يجب أن يكون جميع عناصر قطرها الرئيسى أصفار

- **العمليات على المصفوفات :**

① **لضرب عدد حقيقى لا يساوى الصفر × مصفوفة :**

نضرب هذا العدد فى كل عنصر من عناصر المصفوفة.

② **لجمع مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان على نفس النظم :** نجمع كل عنصر مع نظيره.

③ **لطرح مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان على نفس النظم وتستخدم القاعدة :**

$\text{أ} - \text{ب} = \text{أ} + (-\text{ب})$

فمثلًا : $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ & -٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & ٥ & -٤ \\ ٣ & -٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٠ & ٤ & -٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٥ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٣ \\ -٣ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$

٤ لضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية لكى تكون عملية الضرب معرفة (ممكنة)

فمثلاً : إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن :

• $أ_{٣ \times ٢} \times ب_{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (متساويان)

$= \begin{pmatrix} (٢)(١)+(-١)(-٤) & (٢)(٠)+(-١)(٢) \\ (٣)(١)+(٠)(-٤) & (٣)(٠)+(٠)(٢) \\ (٤)(١)+(٥)(-٤) & (٤)(٠)+(٥)(٢) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -٢ \\ ٣ & ٠ \\ -١٦ & ١٠ \end{pmatrix}$

• $ب_{٢ \times ٢} \times أ_{٣ \times ٢}$ = (غير معرفة) لأن عدد أعمدة ب ≠ عدد صفوف أ (غير متساوين)

ملاحظات

١ لأى ثلاث مصفوفات أ ، ب ، ج على نفس النظم يكون :

• أ + ب = ب + أ
• (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)
• أ + □ = أ
• أ + (-أ) = □
• $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

٢ لأى ثلاث مصفوفات أ ، ب ، ج إذا كانت عمليات الضرب معرفة فإن :

• أ ب ≠ ب أ
• (أ ب) ج = أ (ب ج)
• أ I = I أ = أ
• أ (ب + ج) = أ ب + أ ج ، (ب + ج) أ = ب أ + ج أ
• $(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$ وبصفة عامة $(أ ب ج .. هـ)^{مد} = هـ^{مد} ... ج^{مد} ب^{مد} أ^{مد}$
• |أ ب| = |أ| × |ب|

• المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢ :

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربى للمصفوفة أ الذى يرمز له بالرمز $أ^{-١}$ يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون (محدد أ) (أى Δ) ≠ ٠ ويكون :

$أ^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$ حيث $أ أ^{-١} = أ^{-١} أ = I$

فمثلاً :

١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$

فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} -٢ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = (-٢)(-٤) - (٣)(٢) = ٢ \neq ٠$.

∴ المصفوفة أ معكوس ضربى.

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} -٤ & -٢ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ \frac{-٣}{٢} & -١ \end{pmatrix}$

٢ إذا كانت : $ب = \begin{pmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix}$

فإن : $|ب| = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٢ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix} = (\frac{١}{٢})(١٢) - (٢)(٣) = ٠$.

∴ $ب^{-١}$ غير معرف (ليس له وجود)

والآن سوف نستكمل دراستنا لموضوع المصفوفات بدراسة المعكوس الضربى للمصفوفة باستخدام مصفوفة العوامل المرافقة كما يلى :

المعكوس الضربى للمصفوفة

تعريف

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة على النظم م × م وكان أ^{-1} هو المعكوس الضربى للمصفوفة أ فيجب أن تتحقق العلاقة $\text{أ}\,\text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1}\,\text{أ} = I$ بشرط أن يكون محدد المصفوفة أ لايساوى صفر أى $\Delta \neq 0$ حيث $\Delta = |\text{أ}|$

ملاحظات

التعريف السابق يوضح لنا أن الشرط الأساسى لوجود المعكوس الضربى لأى مصفوفة مربعة هو أن يكون محدد هذه المصفوفة لا يساوى الصفر ولذلك فإن المصفوفات المربعة التى محددها يساوى صفر ليس لها معكوس ضربى وتعرف باسم المصفوفة المنفردة (الشاذة)

ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

(١) **المصفوفة المنفردة (الشاذة)** : هى المصفوفة التى محددها يساوى صفر وبالتالى لا يكون لها معكوس ضربى.

(٢) **المصفوفة غير المنفردة (غير الشاذة)** : هى المصفوفة التى محددها لا يساوى صفر وبالتالى يكون لها معكوس ضربى.

مثال ١

بين أى من المصفوفتين الآتيتين منفردة وأيهما غير منفردة :

(١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

الحل

(١) $\because \Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2 \neq 0$

$\therefore$ المصفوفة أ غير منفردة أى لها معكوس ضربى.

(٢) $\because \Delta = |\text{ب}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

وبضرب $ص_1 \times (-1)$ والجمع إلى $ص_3$ ثم بضرب $ص_2 \times (-1)$ والجمع إلى $ص_3$

$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore$ المصفوفة ب مصفوفة منفردة أى ليس لها معكوس ضربى.

مثال ٢

أوجد قيمة س التى تجعل كلًا من المصفوفات الآتية منفردة (أى ليس لها معكوس ضربى) :

(١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} س & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} س - 2 & 7 \\ 5 & س \end{pmatrix}$ (٣) $\text{ج} = \begin{pmatrix} 1 & 2س & 3 \\ 1 & س & 4 \\ 1 & س + 1 & 3 \end{pmatrix}$

الحل

(١) بوضع $|\text{أ}| = 0$ $\therefore \begin{vmatrix} س & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore 4س - 4 = 0$ $\therefore س = 1$

$\therefore$ عند س = ١ تكون المصفوفة أ منفردة أى ليس لها معكوس ضربى.

(٢) بوضع $|\text{ب}| = 0$ $\therefore \begin{vmatrix} س - 2 & 7 \\ 5 & س \end{vmatrix} = 0$

$\therefore س(س - 2) - 35 = 0$ $\therefore س^2 - 2س - 35 = 0$

$\therefore (س - 7)(س + 5) = 0$ $\therefore س = 7$ أو $س = -5$

$\therefore$ عند س = ٧ أو س = −٥ تكون المصفوفة ب منفردة.

③ بوضع $|ج| = ٠$

$\therefore \begin{vmatrix} ١ & ٢س & ٣ \\ ١ & س & ٤ \\ ١ & ١+س & ٢ \end{vmatrix} = ٠$

، $ص_٢ \times (-١) + ص_١$ ثم $ص_٣ \times (-١) + ص_٢$ $\quad \therefore \begin{vmatrix} ١ & ٢س & ٣ \\ ٠ & -س & ١ \\ ٠ & ١-س & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

، بتبديل $ع_٢$ ، $ع_٣$ $\quad \therefore - \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢س \\ ٠ & ١ & -س \\ ٠ & ٠ & ١-س \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore -(١ \times ١ \times (١ - س)) = ٠ \qquad \therefore س - ١ = ٠$

$\therefore س = ١$ $\qquad \therefore$ عند $س = ١$ تكون المصفوفة ج منفردة.

العوامل المرافقة

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ فإن :

العامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$ والذى يرمز له بالرمز $\overline{أ}_{ص ع}$ يعرف كحاصل ضرب $(-١)^{ص+ع}$ فى المحدد الناتج من حذف الصف ص والعمود ع وعلى ذلك تكون مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى :

$$م = \begin{pmatrix} (-١)^{١+١}\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{١+٢}\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{١+٣}\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} \end{vmatrix} \\ (-١)^{٢+١}\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+٢}\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٢+٣}\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} \end{vmatrix} \\ (-١)^{٣+١}\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+٢}\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٣} \end{vmatrix} & (-١)^{٣+٣}\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه

يمكن تحديد إشارة العامل المرافق لكل عنصر باستخدام قاعدة الإشارات التالية دون الحاجة إلى الضرب × $(-١)^{ص+ع}$ قاعدة الإشارات : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

ملاحظة

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$ فإن :

$\overline{أ}_{١١} = (-١)^{١+١} |أ_{٢٢}| = أ_{٢٢}$ ، $\overline{أ}_{١٢} = (-١)^{١+٢} |أ_{٢١}| = -أ_{٢١}$

$\overline{أ}_{٢١} = (-١)^{٢+١} |أ_{١٢}| = -أ_{١٢}$ ، $\overline{أ}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} |أ_{١١}| = أ_{١١}$

وتكون مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى $م = \begin{pmatrix} أ_{٢٢} & -أ_{٢١} \\ -أ_{١٢} & أ_{١١} \end{pmatrix}$

مثال ③

أوجد مصفوفة المرافقات لكل من المصفوفتين الآتيتين :

① $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ...

② $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٣ \\ ٠ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ & ٧ \end{pmatrix}$

الحل

① $\overline{أ}_{١١} = (-١)^{١+١} |٤| = ٤$

، $\overline{أ}_{١٢} = (-١)^{١+٢} |١| = -١$

، $\overline{أ}_{٢١} = (-١)^{٢+١} |-٢| = ٢$

، $\overline{أ}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} |٣| = ٣$

$\therefore$ مصفوفة المرافقات للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

تذكر أنه :

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ١ × ١
وكانت $أ = (ك)$
فإن : $|أ| = ك$

(٢) $\overline{ب}_{١١} = (-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} = -٢$ ، $\overline{ب}_{٢١} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} = ١٥$

، $\overline{ب}_{٣١} = (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} ٤ & ٠ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٢$ ، $\overline{ب}_{١٢} = (-١)^{٢+١} \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٧ & ٦ \end{vmatrix} = -٢٥$

، $\overline{ب}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix} = ٢٣$ ، $\overline{ب}_{٣٢} = (-١)^{٢+٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} = -٩$

، $\overline{ب}_{١٣} = (-١)^{٣+١} \begin{vmatrix} -٣ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = ١٧$ ، $\overline{ب}_{٢٣} = (-١)^{٣+٢} \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix} = -١٠$

، $\overline{ب}_{٣٣} = (-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٨$

∴ مصفوفة المرافقات للمصفوفة ب $= \begin{pmatrix} -١٢ & ١٥ & -٢ \\ -٩ & ٢٣ & -٢٥ \\ ٨ & -١٠ & ١٧ \end{pmatrix}$

المصفوفة الملحقة

المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ هى المصفوفة الناتجة من إيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ ويرمز لها بالرمز $(أ)^{مل}$

أى أن :

• إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{pmatrix}$ فإن : $(أ)^{مل} = \begin{pmatrix} \overline{أ}_{١٣} & \overline{أ}_{١٢} & \overline{أ}_{١١} \\ \overline{أ}_{٢٣} & \overline{أ}_{٢٢} & \overline{أ}_{٢١} \\ \overline{أ}_{٣٣} & \overline{أ}_{٣٢} & \overline{أ}_{٣١} \end{pmatrix}$

• إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{pmatrix}$ فإن : $(أ)^{مل} = \begin{pmatrix} \overline{أ}_{١٢} & \overline{أ}_{١١} \\ \overline{أ}_{٢٢} & \overline{أ}_{٢١} \end{pmatrix}$

مثال ٤

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فأوجد : $(أ)^{مل}$ ثم أوجد : $أ\,أ^{مل}$ ، $أ^{مل}\,أ$ واذكر ماذا تلاحظ ؟

الحل

$\overline{أ}_{١١} = (-١)^{١+١} |١| = ١$ ، $\overline{أ}_{٢١} = (-١)^{٢+١} |٤| = -٤$

، $\overline{أ}_{١٢} = (-١)^{١+٢} |-٣| = ٣$ ، $\overline{أ}_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} |٢| = ٢$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ هى م $= \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $(أ)^{مل} = (م)^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

∴ $أ\,أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١٤ \\ ١٤ & ٠ \end{pmatrix} = ١٤\, I$

، $أ^{مل}\,أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١٤ \\ ١٤ & ٠ \end{pmatrix} = ١٤\, I$

لاحظ أنه
المصفوفة الملحقة للمصفوفة $أ_{٢ \times ٢}$ تنتج من تبديل عنصرى القطر الرئيسى مع تغيير إشارة كل من عنصرى القطر الآخر

نلاحظ أن : $أ\,أ^{مل} = أ^{مل}\,أ = ١٤\, I$

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} -٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ + ١٢ = ١٤$ ∴ $أ\,أ^{مل} = أ^{مل}\,أ = |أ|\, I$

ملاحظات

• إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ولتكن $أ = \begin{pmatrix} ب & أ \\ ء & حـ \end{pmatrix}$

فإن : $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -ب & ء \\ أ & -حـ \end{pmatrix}$ أى أن المصفوفة الملحقة لمصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ تنتج من تبديل عنصرى القطر الرئيسى مع تغيير إشارتى عنصرى القطر غير الرئيسى

فمثلًا : $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}^{مل} = \begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -٧ & -٦ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix}^{مل} = \begin{pmatrix} ٨ & ٦ \\ -٢ & -٧ \end{pmatrix}$

• لأى مصفوفة مربعة غير منفردة : $أ\,أ^{مل} = أ^{مل}\,أ = \Delta\, I$ حيث $\Delta = |أ|$

• فى مصفوفة الوحدة I تكون العوامل المرافقة لعناصر القطر الرئيسى كل منها = ١ والعوامل المرافقة لباقى العناصر أصفارًا وعلى ذلك فإن : $I^{مل} = I$

أى أن : المصفوفة الملحقة لمصفوفة الوحدة هى نفس مصفوفة الوحدة.

مثال ٥

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ فأوجد : $(أ)^{مل}$

الحــل

∵ مصفوفات المرافقات للمصفوفة أ هى :

$$م = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$∴ (أ)^{مل} = (م)^{مد} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ملاحظة

إذا كان : أ مصفوفة على النظم م × م فإن :

(١) $|ك أ| = ك^{م} |أ|$ (٢) $|أ^{-1}| = \frac{1}{|أ|}$ (٢) $|أ^{مل}| = |أ|^{-1}$

فمثلًا : $|5 I| = 5^{2} \times |I| = 25$ [حيث I على النظم ٢ × ٢]

، $|5 I| = 5^{3} \times |I| = 125$ [حيث I على النظم ٣ × ٣]

، $|4 أ| = 4^{2} \times |أ| = 16 \times |أ|$ [حيث أ على النظم ٢ × ٢]

إيجاد المعكوس الضربى لمصفوفة غير منفردة بطريقة العوامل المرافقة

إذا كانت : أ مصفوفة مربعة غير منفردة

وكانت $أ^{-1}$ هى المعكوس الضربى لها فإن : $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}$

ولإيجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ نتبع الخطوات الآتية :

(١) نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة أن $|أ| \neq$.

(٢) نوجد مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ

(٣) نوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ وهى $(أ^{مل})$ بإيجاد مدور مصفوفة العوامل المرافقة.

(٤) نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة : $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{مل}$

مثال ٦

أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$

الحــل

(١) ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times (-1) - 1 \times (-5) = -4 + 5 = 1 \neq$ صفر

∵ أ مصفوفة غير منفردة. ∴ لها معكوس ضربى هو $أ^{-1}$

(٢) العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ هى :

$\bar{أ}_{11} = (-1)^{1+1} \times -1 = -1$ ، $\bar{أ}_{21} = (-1)^{1+2} \times -5 = 5$

، $\bar{أ}_{12} = (-1)^{2+1} \times 1 = -1$ ، $\bar{أ}_{22} = (-1)^{2+2} \times 4 = 4$

(٣) $أ^{مل} = \begin{pmatrix} \bar{أ}_{11} & \bar{أ}_{21} \\ \bar{أ}_{12} & \bar{أ}_{22} \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(٤) $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}$ ∴ $أ^{-1} = \frac{1}{1} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

ملاحظة

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$

في المثال السابق : يمكن إيجاد $أ^{-1}$ دون الحاجة إلى اتباع خطوات الحل مباشرة كالتالي :

$\because |أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ -٥ & -١ \end{vmatrix} = ١ \neq ٠$

$\therefore أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \frac{١}{١} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

مثال ٧

أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ -١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

- إيجاد قيمة محدد المصفوفة :

$\therefore |أ| = ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} - ٢ \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix}$

$\therefore |أ| = ٢(٣ - ٠) - ١(-١ - ٢٠) - ٢(٠ - ١٢)$

$\therefore |أ| = ٦ + ٢١ + ٢٤ = ٥١ \neq$ صفر

- إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة :

$\overline{أ_{١١}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = ٣$ ، $\overline{أ_{١٢}} = - \begin{vmatrix} -١ & ٥ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٢١$ ، $\overline{أ_{١٣}} = \begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = -١٢$

$\overline{أ_{٢١}} = - \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} = -١$ ، $\overline{أ_{٢٢}} = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ١٠$ ، $\overline{أ_{٢٣}} = - \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{vmatrix} = ٤$

$\overline{أ_{٣١}} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = ١١$ ، $\overline{أ_{٣٢}} = - \begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = -٨$ ، $\overline{أ_{٣٣}} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix} = ٧$

- إيجاد المصفوفة الملحقة :

$\because$ مصفوفة العوامل المرافقة : $م = \begin{pmatrix} ٣ & ٢١ & -١٢ \\ -١ & ١٠ & ٤ \\ ١١ & -٨ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢١ & -١٢ \\ -١ & ١٠ & ٤ \\ ١١ & -٨ & ٧ \end{pmatrix}^{مد}$ $\therefore أ^{مل} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ١١ \\ ٢١ & ١٠ & -٨ \\ -١٢ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

- إيجاد $أ^{-1}$:

$\because أ^{-1} = \frac{١}{|أ|} أ^{مل}$ $\therefore أ^{-1} = \frac{١}{٥١} \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ١١ \\ ٢١ & ١٠ & -٨ \\ -١٢ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{١٧} & \frac{-١}{٥١} & \frac{١١}{٥١} \\ \frac{٧}{١٧} & \frac{١٠}{٥١} & \frac{-٨}{٥١} \\ \frac{-٤}{١٧} & \frac{٤}{٥١} & \frac{٧}{٥١} \end{pmatrix}$

بعض خواص المعكوس الضربي للمصفوفة

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن :

① $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$
② $(أ^{-1})^{-1} = أ$
③ $(أ^{-1})^{مد} = (أ^{مد})^{-1}$
④ $(أ^{-1})^{٢} = (أ^{٢})^{-1}$
⑤ $(I)^{-1} = I$

مثال ٨

إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن :

① $(أ^{-1})^{-1} = أ$
② $(أب)^{-1} = ب^{-1} أ^{-1}$
③ $(أ^{مد})^{-1} = (أ^{-1})^{مد}$

الحل

① $\because |أ| = \begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{vmatrix} = -١٨ + ١٦ = -٢$

$\therefore أ^{-1} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} -٣ & -٢ \\ ٨ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ١ \\ -٤ & -٣ \end{pmatrix}$

، $|\text{أ}^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{٣}{٢} & ١ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = \frac{٣}{٢} \times -٣ - ١ \times -٤ = -\frac{١}{٢}$

∴ $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \frac{١}{-\frac{١}{٢}} \begin{pmatrix} -٣ & -١ \\ ٤ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix} = -٢ \begin{pmatrix} -٣ & -١ \\ ٤ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix}$ ∴ $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix} = \text{أ}$

(٢) ∵ $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٢ - ٣ = -٥$

∴ $\text{ب}^{-1} = \frac{١}{-٥} \begin{pmatrix} -١ & -١ \\ -٣ & ٢ \end{pmatrix}$ ∴ $\text{ب}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix}$

∴ $\text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{-٢}{٥} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ١ \\ -٤ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & -\frac{٢}{٥} \\ \frac{٥}{٢} & \frac{٩}{٥} \end{pmatrix}$ (١)

، $\text{أب} = \begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ -٨ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٨ & ٤ \\ -٢٥ & -٥ \end{pmatrix}$

∴ $|\text{أب}| = \begin{vmatrix} ١٨ & ٤ \\ -٢٥ & -٥ \end{vmatrix} = -٩٠ + ١٠٠ = ١٠$

∴ $(\text{أب})^{-1} = \frac{١}{١٠} \begin{pmatrix} -٥ & -٤ \\ ٢٥ & ١٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & -\frac{٢}{٥} \\ \frac{٥}{٢} & \frac{٩}{٥} \end{pmatrix}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) نجد أن : $(\text{أب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$

(٣) $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٦ & -٨ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ ∴ $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-1} = \frac{١}{-٢} \begin{pmatrix} -٣ & ٨ \\ -٢ & ٦ \end{pmatrix}$

∴ $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & -٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (١)

، $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & ١ \\ -٤ & -٣ \end{pmatrix}$ ∴ $(\text{أ}^{-1})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٢} & -٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $(\text{أ}^{\text{مد}})^{-1} = (\text{أ}^{-1})^{\text{مد}}$

مثال ٩

أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفتين :

(١) $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{pmatrix}$ (٢) $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{س} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ص} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ع} \end{pmatrix}$

الحل

(١) $\text{أ} = \text{س} \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ $\text{أ} = \text{س}\, I$ ∴ $\text{أ}^{-1} = (\text{س}\, I)^{-1}$

∴ $\text{أ}^{-1} = \text{س}^{-1}\, I^{-1}$ ∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{١}{\text{س}}\, I$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{١}{\text{س}} \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ∴ $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{\text{س}} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{\text{س}} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{\text{س}} \end{pmatrix}$

(٢) $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{ص} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ع} \end{vmatrix} = \text{س ص ع}$

، $\overline{\text{ب}}_{١١} = \text{ص ع}$ ، $\overline{\text{ب}}_{٢٢} = \text{س ع}$ ، $\overline{\text{ب}}_{٣٣} = \text{س ص}$

أما $\overline{\text{ب}}_{٢١} = \overline{\text{ب}}_{٣١} = \overline{\text{ب}}_{١٢} = \overline{\text{ب}}_{٣٢} = \overline{\text{ب}}_{١٣} = \overline{\text{ب}}_{٢٣} =$ صفر

∴ $\text{ب}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} \text{ص ع} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س ع} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س ص} \end{pmatrix}^{\text{مد}}$ ∴ $\text{ب}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} \text{ص ع} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س ع} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س ص} \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{ب}^{-1} = \frac{١}{|\text{ب}|}\, \text{ب}^{\text{مل}}$ ∴ $\text{ب}^{-1} = \frac{١}{\text{س ص ع}} \begin{pmatrix} \text{ص ع} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س ع} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س ص} \end{pmatrix}$

∴ $\text{ب}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{١}{\text{س}} & ٠ & ٠ \\ ٠ & \frac{١}{\text{ص}} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{\text{ع}} \end{pmatrix}$

مثال ١٠

إذا كانت: $أ = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن: $أ^2 - 2أ = 3I$ ومن ذلك أوجد: $أ^{-1}$

الحل

$$أ^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore أ^2 - 2أ = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore أ^2 - 2أ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I$$ (المطلوب أولاً)

$\therefore أ^2 - 2أ = 3I$ $\therefore أ(أ - 2I) = 3I$

$\therefore أ\left(\frac{1}{3}أ - \frac{2}{3}I\right) = I$ وحيث أن $أأ^{-1} = I$

$\therefore أ^{-1} = \frac{1}{3}أ - \frac{2}{3}I$ $\therefore أ^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $\therefore أ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (المطلوب ثانياً)

مثال ١١

إذا كانت: $أ = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

وكان: $أس + ب = ج$ فأثبت أن: $س = أ^{-1}(ج - ب)$

ومن ذلك أثبت أن المصفوفة: $س = 2\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

الحل

$\because أس + ب = ج$ $\therefore أس = ج - ب$

وبضرب كل من الطرفين من اليمين في $أ^{-1}$

$\therefore أ^{-1}أس = أ^{-1}(ج - ب)$ $\therefore I\,س = أ^{-1}(ج - ب)$

$\therefore س = أ^{-1}(ج - ب)$ (المطلوب أولاً)

ولكن $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|}أ^{مل}$ $\therefore أ^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore أ^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $ج - ب = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\therefore ج - ب = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\therefore س = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore س = \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ $\therefore س = 2\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (المطلوب ثانياً)

مثال ١٢

إذا كانت: $أ = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة: $أس ب = 2I$

الحل

$\because أس ب = 2I$ $\therefore أ^{-1}أس ب = أ^{-1} \times 2I$

$\therefore I\,س ب = 2أ^{-1}$ $\therefore س ب = 2أ^{-1}$

$\therefore س ب ب^{-1} = 2أ^{-1}ب^{-1}$ $\therefore س\,I = 2أ^{-1}ب^{-1}$

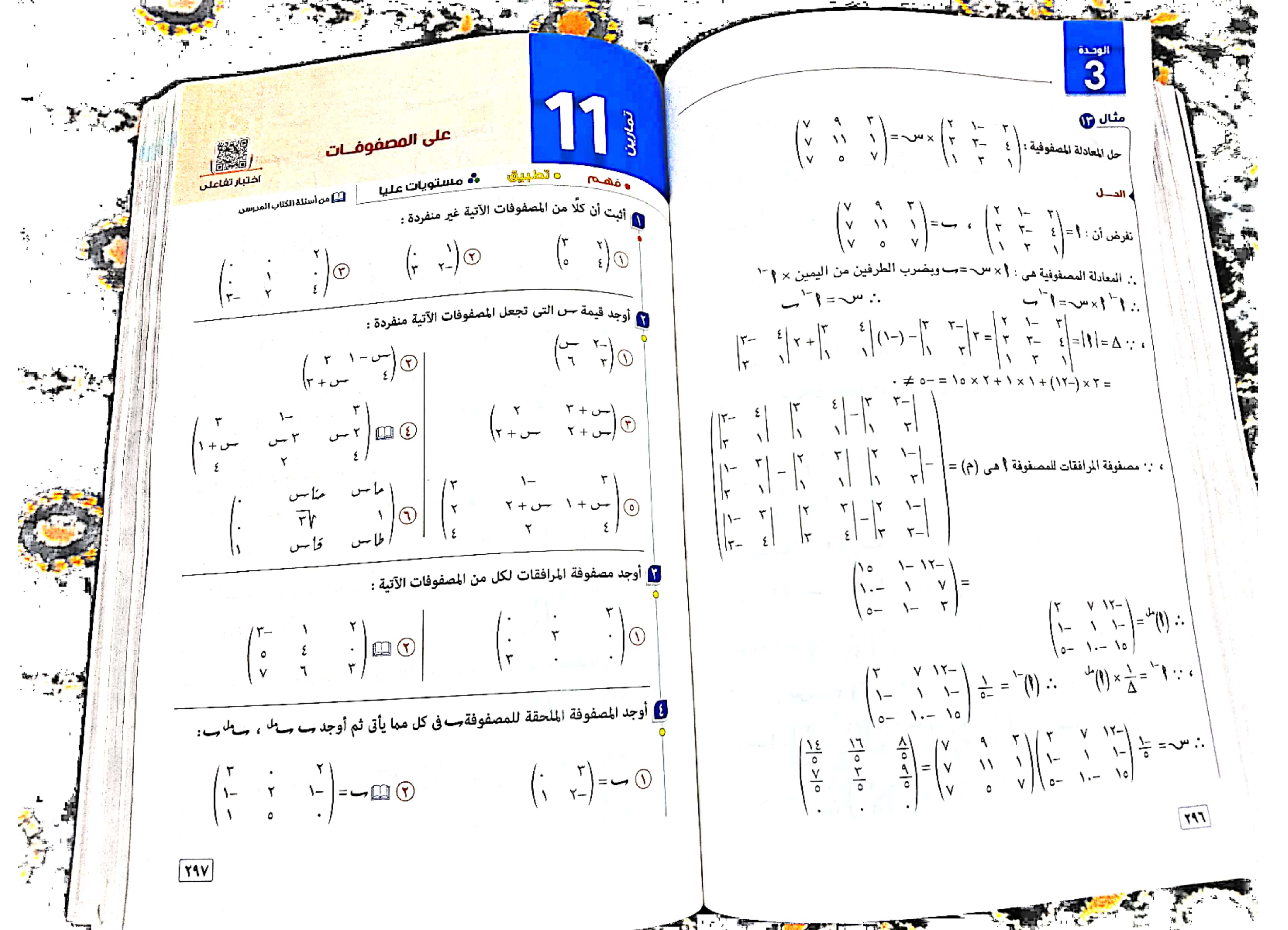
$\therefore س = 2أ^{-1}ب^{-1}$ ولكن $أ^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $ب^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore س = 2 \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\therefore س = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

حل آخر: $\because س = 2أ^{-1}ب^{-1}$ $\therefore س = 2(ب أ)^{-1}$

ولكن $ب أ = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$ $\therefore (ب أ)^{-1} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

$\therefore س = 2 \times \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$



مثال ⑬

حل المعادلة المصفوفية : $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \text{س} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

الحل

نفرض أن : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

∴ المعادلة المصفوفية هى : أ × س = ب وبضرب الطرفين من اليمين × أ^{-1}

∴ $\text{أ}^{-1} \times \text{أ} \times \text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}$ ∴ $\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}$

، ∵ $\Delta = |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3 \times (-12) + 1 \times 1 + 2 \times 15 = -5 \neq 0$

، ∵ مصفوفة المرافقات للمصفوفة أ هى (م) =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & -1 & 15 \\ 7 & 1 & -10 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

∴ $(\text{أ})^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -12 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 15 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

، ∵ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times (\text{أ})^{\text{مل}}$ ∴ $(\text{أ})^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -12 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 15 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

∴ $\text{س} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -12 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 15 & -10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{16}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى — اختبار تفاعلى

1 أثبت أن كلًا من المصفوفات الآتية غير منفردة :

① $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2 أوجد قيمة س التى تجعل المصفوفات الآتية منفردة :

① $\begin{pmatrix} -2 & \text{س} \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} \text{س} - 1 & 3 \\ 4 & \text{س} + 3 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} \text{س} + 3 & 2 \\ \text{س} + 2 & \text{س} + 2 \end{pmatrix}$ ④ 📖 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2\text{س} & 3\text{س} & \text{س} + 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ \text{س} + 1 & \text{س} + 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} \text{جا س} & \text{جتا س} & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \text{ظا س} & \text{قا س} & 1 \end{pmatrix}$

3 أوجد مصفوفة المرافقات لكل من المصفوفات الآتية :

① $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ② 📖 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

4 أوجد المصفوفة الملحقة للمصفوفة ب فى كل مما يأتى ثم أوجد $\text{ب}\,\text{ب}^{\text{مل}}$ ، $\text{ب}^{\text{مل}}\,\text{ب}$:

① $\text{ب} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ② 📖 $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

٥ أوجد المعكوس الضربي لكل من المصفوفات الآتية إن وجد :

① $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} قتاθ & ١ \\ ١ & قتاθ \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} جاθ & -جتاθ \\ جتاθ & جاθ \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ⑥ $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

⑦ $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ⑧ $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٧ & ٢ & -٢ \\ ٢ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

⑨ $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ⑩ $\begin{pmatrix} جتاهـ & -جاهـ & ٠ \\ جاهـ & جتاهـ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المصفوفة المنفردة بين المصفوفات التالية هى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

② جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$

③ جميع المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & -٦ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٨ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

④ قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ٢ \\ -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ منفردة هى ....

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) -٣

⑤ قيمة أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & أ \\ أ & ٨ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربى هى ....

(أ) -٤ (ب) ٤ (جـ) ±٤ (د) ١٦

⑥ قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س - ١ & ٢ \\ ٤ & س + ١ \end{pmatrix}$ منفردة هى ....

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) ±٣ (د) ٩

⑦ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٥ \end{pmatrix}$ فإن : أ^{مل} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

⑧ ناتج جمع المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & -٧ \end{pmatrix}$ ومعكوسها الضربى يساوى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & -٦ \\ ١٠ & -١٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} -٥ & ٠ \\ ٠ & -٥ \end{pmatrix}$

⑨ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فإن ....

(أ) أ^{مد} = أ (ب) أ^{مد} = أ^{مل} (جـ) أ^{مد} = أ$^{-١}$ (د) جميع ما سبق صحيح.

⑩ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ فإن : أ أ^{مل} = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٠ & ١٠ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٠ & ١٠ \\ ١٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ١٠ & ١ \\ ١ & ١٠ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١٠ \\ ١٠ & ١ \end{pmatrix}$

⑪ لأى مصفوفة مربعة أ إذا كان : أ^{٢} - أ + I = ☐ فإن : أ$^{-١}$ = ...

(أ) أ$^{-٢}$ (ب) أ + I (جـ) I - أ (د) أ - I

(١٢) قيمة أ التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & أ & ١ \\ -١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ منفردة هي ....

(أ) $\frac{-٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٣) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & \text{لو س} \\ \text{لو س} & ١ \end{pmatrix}$ منفردة فإن : س = ...

(أ) -١ ، ١ (ب) ١٠ ، $-\frac{١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ أ، -١٠ (د) ١٠ أ، $\frac{١}{١٠}$

(١٤) إذا كانت : أ مصفوفة غير منفردة فإن : $(أ)^{مل}$ = ...

(أ) $|أ| أ^{-١}$ (ب) $(أ^{مد})^{-١}$ (جـ) $\frac{١}{|أ|} أ^{-١}$ (د) $|أ^{مد}|$

(١٥) إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة على النظم ٣ × ٣ وكان ك ∈ ح* فأي مما يأتي صحيح دائمًا ؟

(أ) $|ك أ| = ك |أ|$ (ب) $|أ^{-١}| = |أ|^{٢}$

(جـ) $|أ| = |أ^{مد}|$ (د) $|أ| = |أ^{-١}|$

(١٦) إذا كان كل من أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن كل مما يأتي صحيح ما عدا ....

(أ) $(أ + ب)^{-١} = أ^{-١} + ب^{-١}$ (ب) $(أ × ب)^{مد} = ب^{مد} × أ^{مد}$

(جـ) $(أ × ب)^{-١} = ب^{-١} × أ^{-١}$ (د) $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

(١٧) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن : $(أ ب)^{-١}$ = ...

(أ) أ ب (ب) $أ^{-١} ب^{-١}$ (جـ) $ب^{-١} أ^{-١}$ (د) $(ب أ)^{-١}$

(١٨) إذا كانت : أ مصفوفة مربعة ، $|أ| = ٤$ فإن : $أ أ^{مل}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٤ I (جـ) I (د) $\frac{١}{٤}$ I

(١٩) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٧ \\ ١٧ & -٤٦ \end{pmatrix}$ وكان أ × ج = ب

فإن : ج = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٨ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -١١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٧ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

(٢٠) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} \text{جا}θ & \text{جتا}θ \\ \text{جتا}θ & -\text{جا}θ \end{pmatrix}$ فإن : $(أ^{٢})^{-١}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} -\text{جا}٢θ & \text{جتا}٢θ \\ \text{جتا}٢θ & \text{جا}٢θ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} \text{جا}θ & \text{جتا}θ \\ \text{جتا}θ & -\text{جا}θ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} -\text{جا}θ - \text{جتا}θ \\ \text{جتا}θ - \text{جا}θ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} \text{جا}٢θ & \text{جتا}٢θ \\ \text{جتا}٢θ & \text{جا}٢θ \end{pmatrix}$

(٢١) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان $|أ| = ٥$ فإن : $|٣ أ|$ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٥ (جـ) ٤٥ (د) ١٠

(٢٢) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتان على النظم ٣ × ٣ وكان أ = ٢ب ، $|ب| = ٥$

فإن : $|أ|$ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٤٠

(٢٣) إذا كانت : I مصفوفة الوحدة على النظم ٢ × ٢ فإن : $|٤ I|$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٦

(٢٤) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان $|أ| = ٥$ فإن : $|أ × أ^{مل}|$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (جـ) ١٢٥ (د) ١

(٢٥) إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان $|أ| = -٣$ فإن : $|أ أ^{مل}|$ = ...

(أ) ٣ (ب) -٢٧ (جـ) ٢٧ (د) -٩

(٢٦) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} أ & ٠ & ٠ \\ ٠ & أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & أ \end{pmatrix}$ فإن : $|أ| |أ^{مل}|$ = ...

(أ) $أ^{٣}$ (ب) $أ^{٦}$ (جـ) $أ^{٩}$ (د) $أ^{٢٧}$

(٢٧) إذا كان : أ ، ب ، ج ثلاث مصفوفات على النظم ن × ن وكان أ ب ج = I

فإن : $ب^{-١}$ = ...

(أ) $أ^{-١} ج^{-١}$ (ب) $(أ ج)^{-١}$ (جـ) $ج^{-١} + أ^{-١}$ (د) ج أ

(٢٨) إذا كان : $أ$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ وكان $|أ| = ٥$

فإن : $|أ^{مد}| = $ ....

(أ) ٥ (ب) ٢٥ (ج) ١٢٥ (د) $\frac{١}{٥}$

(٢٩) إذا كانت : $أ$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ فإن : $(٢ أ)^{مد} = $ ....

(أ) $٢ أ^{مد}$ (ب) $\frac{١}{٢} أ^{مد}$ (ج) $٤ أ^{مد}$ (د) $٨ أ^{مد}$

(٣٠) إذا كان : $أ$ مصفوفة مربعة على النظم ٣ × ٣ وكان $|أ| = ٥$

فإن : $|٢ أ^{مد}| = $ ....

(أ) ٢٥٠ (ب) ٢٠٠ (ج) ٥٠ (د) ٢٥

(٣١) إذا كانت : $أ$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان $حـ_{ص ع}$ ترمز للعامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$ في المصفوفة $أ$ فإن : $أ_{١١} حـ_{١٣} + أ_{٢١} حـ_{٢٣} + أ_{٣١} حـ_{٣٣} = $ ....

(أ) صفر (ب) ٥ (ج) ١٥ (د) ٢٥

(٣٢) إذا كانت : $أ$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان $|أ| = ٥$ وكان $حـ_{ص ع}$ ترمز للعامل المرافق للعنصر $أ_{ص ع}$ في المصفوفة $أ$ فإن : $أ_{١١} حـ_{١١} + أ_{٢١} حـ_{٢١} + أ_{٣١} حـ_{٣١} = $ ....

(أ) صفر (ب) ٥ (ج) ١٥ (د) ٢٥

---

٧ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & -٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ فأوجد :

(١) $(أ + ب)^{-١}$ (٢) $(أ - ب)^{-١}$

---

٨ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

فأثبت أن : $٢ ج^{-١} = أ ب$

---

٩ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ فحقق الخواص التالية :

(١) $(أ ب)^{-١} = ب^{-١} أ^{-١}$

(٢) $(أ^{-١})^{-١} = أ$

١٠ في كل مما يأتي حقق أن : $(أ^{٢})^{-١} = (أ^{-١})^{٢}$

(١) $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٧ & ١٢ \end{pmatrix}$

(٢) $أ = \begin{pmatrix} -٣ & ٤ & ٠ \\ ٢ & -١ & ٥ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

---

١١ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & -٢ & -١ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{pmatrix}$ فحقق أن : $(أ^{مد})^{-١} = (أ^{-١})^{مد}$

---

١٢ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

فحقق أن : $(أ ب ج)^{-١} = ج^{-١} ب^{-١} أ^{-١}$

---

١٣ إذا كانت : $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : $أ ب = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد : $ب^{-١}$

---

١٤ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان : $(أ ب)^{-١} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ فأوجد : $ب$

---

١٥ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١٠ & ٤ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} - ٧ أ - ٨ I = $ ☐

ثم استخدم ذلك في إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة $أ$

---

١٦ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ -١ & -١ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} - ٤ أ + ٣ I = $ ☐ ثم استنتج $أ^{-١}$

---

١٧ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} -١ & -١ & -١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $أ^{٢} = I$ ثم استنتج $أ^{-١}$

---

١٨ إذا كانت : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ -١ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$

فبين أن : $(أ ب)^{٢} - ٢ (أ ب) = ٢٤ I$ ومن ثم أوجد : $(أ ب)^{-١}$ ، $(أ ب)^{-٢}$

• فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

١٩ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ع & ٢ص & ٠ \\ -ع & ص & س \\ ع & -ص & س \end{pmatrix}$ وكان : $أ^{مد} = أ^{-١}$

أوجد قيم كل من : س ، ص ، ع

«$\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\pm \frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، $\pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$»

---

٢٠ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -٧ & س \\ ع & ص \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ل & ٢ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

وكان : أ ب = ٢ $ج^{-١}$ فأوجد : س ، ص ، ع ، ل

«٢ ، -١ ، ٤ ، ٢ ، ٢»

---

٢١ حل كلًا من المعادلات المصفوفية الآتية :

① س $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

② س $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ١ & -٤ \end{pmatrix}$ - ٣ $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

③ ٢ س $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

---

٢٢ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ & ١ \\ ٨ & -٣ & ٢ \\ -١٠ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & -٢ & ٢ \\ -١ & -٢ & ٣ \\ ٣ & ٧ & -٥ \end{pmatrix}$ فأوجد : $أ^{-١}$

ثم أوجد المصفوفة ج بحيث يكون : أ ج = ب

---

٢٣ إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين وكان : أ ب = ب أ

فأثبت أن : $أ^{-١}$ ب = ب $أ^{-١}$

---

٢٤ إذا كان : أ ، ب ، ج مصفوفات مربعة على نفس النظم وغير منفردة وكان أ ب = ج أ = I

فأثبت أن : ب = ج

٢٥ حل المعادلة المصفوفية : ٤ $\left(س + \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} \right)$ = ٣ س + $\begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$

ومن ذلك أثبت أن : $س^{٢} + (س^{٢})^{-١} = ٢ I$

---

٢٦ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س التى تحقق : $أ^{٢}$ س = ٥ I

---

٢٧ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١٦ & ٢ \\ ٩ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة : أ س ب = I

---

٢٨ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

فأوجد : أ $(ب + ج)^{-١}$ ومنها استنتج : $(ب + ج)^{-١}$ $أ^{-١}$

---

٢٩ إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

فأثبت أن المصفوفة : $ب^{-١}$ أ ب قطرية ومن ذلك استنتج قيمة : $ب^{-١}$ $أ^{٢}$ ب

الدرس 3 حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

- **المعادلة الخطية :**

- الصورة العامة للمعادلة الخطية هى :

$$\text{أ}_1 \text{س}_1 + \text{أ}_2 \text{س}_2 + \text{أ}_3 \text{س}_3 + \dots\dots + \text{أ}_{ن} \text{س}_{ن} = \text{ب}$$

(حيث س_1 ، س_2 ، س_3 ، .... ، $\text{س}_{ن}$ رموز لمتغيرات عددها ن ، أ_1 ، أ_2 ، أ_3 ، .... ، $\text{أ}_{ن}$ ، ب رموزًا لأعداد حقيقية)

فمثلًا : المعادلة ٧ س + ٣ ص = ٤ معادلة خطية فى س ، ص

، ٢ س − ص + ٣ ع = ١٢ معادلة خطية فى س ، ص ، ع

- المعادلة الخطية تكون متجانسة إذا كانت ب (وهى ثابت المعادلة) = صفر

وبذلك تكون الصورة العامة للمعادلة الخطية المتجانسة هى :

$$\text{أ}_1 \text{س}_1 + \text{أ}_2 \text{س}_2 + \text{أ}_3 \text{س}_3 + \dots\dots\dots + \text{أ}_{ن} \text{س}_{ن} = \text{صفر}$$

فمثلًا : المعادلة ٧ س + ٢ ص = صفر معادلة خطية متجانسة فى س ، ص

، المعادلة ٧ س − ٢ ص + ٥ ع = صفر معادلة خطية متجانسة فى س ، ص ، ع

- **استخدام المصفوفات فى التعبير عن أنظمة المعادلات الخطية :**

نظام المعادلات الخطية المكون من معادلات خطية عددها م وتحتوى على ن من المتغيرات يمكن التعبير عنها بالمعادلة المصفوفية **أ س = ب**

حيث أ هى مصفوفة المعاملات ، س هى مصفوفة المتغيرات (المجاهيل) ، ب هى مصفوفة الثوابت

- إذا كان نظام المعادلات الخطية مكون من معادلتين فى متغيرين :

$\text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_1 \text{ص} = \text{حـ}_1$ ، $\text{أ}_2 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ص} = \text{حـ}_2$ فإن :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{pmatrix} ، \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} ، \text{ب} = \begin{pmatrix} \text{حـ}_1 \\ \text{حـ}_2 \end{pmatrix}$$

أى أنه يمكن التعبير عن نظام المعادلات بالمعادلة المصفوفية :

$$\underset{\text{معاملات}}{\begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{pmatrix}} \underset{\text{متغيرات}}{\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}} = \underset{\text{ثوابت}}{\begin{pmatrix} \text{حـ}_1 \\ \text{حـ}_2 \end{pmatrix}}$$

- إذا كان نظام المعادلات الخطية مكون من ثلاث معادلات فى ثلاث متغيرات

$\text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_1 \text{ص} + \text{حـ}_1 \text{ع} = \text{ء}_1$ ، $\text{أ}_2 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ص} + \text{حـ}_2 \text{ع} = \text{ء}_2$

، $\text{أ}_3 \text{س} + \text{ب}_3 \text{ص} + \text{حـ}_3 \text{ع} = \text{ء}_3$ فإن :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{pmatrix} ، \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} ، \text{ب} = \begin{pmatrix} \text{ء}_1 \\ \text{ء}_2 \\ \text{ء}_3 \end{pmatrix}$$

أى يعبر عنها بالمعادلة المصفوفية :

$$\underset{\text{معاملات}}{\begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{pmatrix}} \underset{\text{متغيرات}}{\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}} = \underset{\text{ثوابت}}{\begin{pmatrix} \text{ء}_1 \\ \text{ء}_2 \\ \text{ء}_3 \end{pmatrix}}$$

- **نظام المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة :**

يقال أن نظام المعادلات الخطية متجانسة إذا كان كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت يساوى صفر أما إذا كان أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوى صفر فإن نظام المعادلات الخطية يسمى معادلات خطية غير متجانسة.

فمثلًا : • نظام المعادلات : ٢ س − ص + ع = ٠ ، س + ٣ ص − ٢ ع = ٠

، س + ص + ع = ٠

يمثل نظام معادلات خطية متجانسة لأن ب = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$ كل عناصرها أصفار

- نظام المعادلات : س + ٣ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ص − ع = ٤

، س + ص = ٠

يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة لأن ب = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ أحد عناصرها لا يساوى صفر

مثال 1

اكتب كلًا من أنظمة المعادلات الخطية الآتية على شكل معادلة مصفوفية :

(١) ٢ س − ٣ ص = ١ ، س + ٢ ص = ٥

(٢) س + ص = ١ ، ٢ س − ص + ٥ = ٠ ، ٣ س − ص = ٧

(٣) ٦ س = ٥ ، س + ٢ ص = ٣ ، ع = ٢

الحل

① $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$

، ∵ المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى : $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$

② $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٧ \end{pmatrix}$

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى : $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٥ \\ ٧ \end{pmatrix}$

③ $أ = \begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

∴ المعادلة المصفوفية للنظام هى : $\begin{pmatrix} ٦ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

ملاحظة

يمكن حل المعادلة المصفوفية على الصورة أ س = ب باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة إذا كان أ مصفوفة مربعة وغير منفردة أى $|أ| \neq ٠$ كالآتى :

∵ أ س = ب بضرب طرفى المعادلة من اليمين فى $أ^{-1}$

∴ $أ^{-1} أ س = أ^{-1} ب$ ، ∵ $أ^{-1} أ = I$

∴ $I س = أ^{-1} ب$ ، ∵ $I س = س$

∴ $س = أ^{-1} ب$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

أى مجموعة من المعادلات الخطية يمكن كتابتها بالصورة المصفوفية

أ س = ب وإذا تحقق الشرطان الآتيان :

① أ مصفوفة مربعة بمعنى أن عدد المعادلات الخطية = عدد المجاهيل.

② أ مصفوفة غير منفردة أى قيمة محدد مصفوفة المعاملات لا يساوى صفرًا.

فإن : $س = أ^{-1} ب$

ومن هذه المعادلة وباستخدام خواص تساوى مصفوفتين نحصل على قيم المجاهيل.

مثال ٢

حل أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

① ٤ س + ص = ٥ ، ٣ س − ٢ ص = ١٢

② س + ٢ ص − ٣ ع = ٦ ، ٢ س − ص − ٤ ع = ٢ ، ٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ١٤

الحل

① يمكن كتابة المعادلتين على الصورة المصفوفية أ س = ب

∴ $\begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١٢ \end{pmatrix}$

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = -٨ - ٣ = -١١ \neq ٠$ ∴ أ مصفوفة غير منفردة.

∴ مجموعة حل المعادلة المصفوفية هى : $س = أ^{-1} ب$

، ∵ $أ^{-1} = \frac{١}{-١١} \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ∴ $س = \frac{-١}{١١} \begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ -٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١٢ \end{pmatrix} = \frac{-١}{١١} \begin{pmatrix} -٢٢ \\ ٣٣ \end{pmatrix}$

∴ $س = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = −٣

(٢) بكتابة مجموعة المعادلات على الصورة المصفوفية $أ\,س = ب$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

، $\because |أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1(2 + 12) - 2(-4 + 16) - 3(6 + 4)$

$= 14 - 24 - 30 = -40 \neq$ صفر

$\therefore$ مجموعة المعادلات لها حل هو : $س = أ^{-1} ب$

، $\because أ^{مل} = \begin{pmatrix} 14 & -12 & 10 \\ -5 & 10 & 5 \\ -11 & -2 & -5 \end{pmatrix}^{مد} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & -11 \\ -12 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

، $\because أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}$ $\quad \therefore أ^{-1} = \frac{1}{-40} \begin{pmatrix} 14 & -5 & -11 \\ -12 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$$\therefore س = \frac{-1}{40} \begin{pmatrix} 14 & -5 & -11 \\ -12 & 10 & -2 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\therefore س = \frac{-1}{40} \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ٢ ، ع = صفر

مرتبة المصفوفة

تعريف

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هي أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوي صفر.

مع ملاحظة أن :

إذا كانت أ مصفوفة غير صفرية على النظم $م \times ن$ فإنه يرمز لمرتبة المصفوفة أ بالرمز $ر(أ)$ ويكون :

- $1 \le ر(أ) \le ن$ إذا كان : $م \ge ن$
- $1 \le ر(أ) \le م$ إذا كان : $م \le ن$

لاحظ أنه

حين نقول إن مرتبة المصفوفة أ = ٢ (مثلًا) فإن هذا يعني أمرين متحققين :

(١) يوجد محدد أو محدد أصغر واحد على الأقل من الدرجة ٢ بحيث قيمته ≠ صفر

(٢) قيم جميع المحددات الصغرى من درجة أكبر من ٢ = صفر

فمثلًا : المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوي ٢

وذلك لأن $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 5$

$= 13 \neq$ صفر

، المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوي ٢

وذلك لأن $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq$ صفر

، المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوي ١ لأن جميع المحددات من الدرجة الثانية قيمتها = صفرًا كما أن أحد عناصر المصفوفة ≠ صفر

ملاحظات

(١) إذا كانت أ مصفوفة صفرية فإن : $ر(أ) = 0$.

فمثلًا : المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ مرتبتها تساوي صفر

(٢) إذا كانت أ مصفوفة صف أو عمود غير صفرية فإن : $ر(أ) = 1$

فمثلًا : إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ أو $أ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ فإن : $ر(أ) = 1$

(٣) إذا كانت I مصفوفة وحدة على النظم $ن \times ن$ فإن : $ر(I) = ن$

فمثلًا : إذا كانت $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $ر(I) = 2$

، إذا كانت $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ فإن : $ر(I) = 3$

④ مرتبة المصفوفة أ = مرتبة $أ^{مد}$ أى أن : ر (أ) = ر ($أ^{مد}$)

فمثلاً : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ٧ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ٢

ويكون $أ^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٧ \\ -١ & ٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر ($أ^{مد}$) = ٢

⑤ إذا أضيف أو حذف صف (عمود) صفرى على المصفوفة أ فإن رتبتها لا تتغير.

فمثلاً : مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٥ \\ ٧ & -٢ & ٩ \end{pmatrix}$ = مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٥ & ٠ \\ ٧ & -٢ & ٩ & ٠ \end{pmatrix}$

= مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & -٥ \\ ٧ & -٢ & ٩ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = ٢

⑥ إذا أضيف أو حذف صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة لا تتغير.

فمثلاً : مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ -٥ & ٧ & ٩ \\ ١ & ٣ & ١٧ \end{pmatrix}$ = مرتبة $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ -٥ & ٧ & ٩ \end{pmatrix}$ = ٢

لأن الصف الثالث هو حاصل جمع الصف الأول مضروبًا فى ٢ والصف الثانى.

مثال ٣

أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

① أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ② ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$

③ ج = $\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix}$ ④ د = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

الحل

① ∵ أ مصفوفة صف وغير صفرية. ∴ مرتبتها تساوى ١

② ∵ |ب| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ -١ & -٢ \end{vmatrix}$ = -٦ + ٥ = -١ ≠ صفر

∴ مرتبة ب تساوى درجة |ب| = ٢

③ ∵ |ج| = $\begin{vmatrix} ٤ & -٢ \\ ٦ & -٣ \end{vmatrix}$ = -١٢ + ١٢ = صفر

∴ مرتبة ج < ٢ ولكن ج مصفوفة غير صفرية. ∴ مرتبة ج = ١

④ ∵ |د| = $\begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر.

∴ مرتبة د < ٢ ولكن د مصفوفة غير صفرية. ∴ مرتبة د = ١

مثال ٤ أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

① أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ & -٦ \\ -٣ & -٥ & ٧ \end{pmatrix}$ ② ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ٢ & -٥ \end{pmatrix}$

③ ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ④ د = $\begin{pmatrix} ١ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ١٠ & -٤ \\ ٣ & -١٥ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل

① |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٢ & ٤ & -٦ \\ -٣ & -٥ & ٧ \end{vmatrix}$ = ١ (٢٨ - ٣٠) - ٣ (١٤ - ١٨) -٢ (-١٠ + ١٢) = ٦ ≠ ٠

∴ مرتبة أ = درجة |أ| = ٣

② |ب| = $\begin{vmatrix} ١ & ٤ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٢ \\ -٤ & ٢ & -٥ \end{vmatrix}$ = ١ (-٣٠ - ٤) -٤ (-٢٥ + ٨) -١ (١٠ + ٢٤) = صفر

∴ ر (ب) < ٣ ، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٦ - ٢٠ = -١٤ ≠ صفر ∴ ر (ب) = ٢

③ |ج| = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ (٤ - ٤) = صفر

∴ ر (ج) < ٣

∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢ ≠ صفر ∴ ر (ج) = ٢

④ $|د| = \begin{vmatrix} ١ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ١٠ & -٤ \\ ٣ & -١٥ & ٦ \end{vmatrix} =$ صفر «لأن $ع_٣ = ٢\ ع_١$»

∴ ر(د) < ٣

، ∵ المحددات الصغرى من الدرجة الثانية هى :

$\begin{vmatrix} ١٠ & -٤ \\ -١٥ & ٦ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} -٢ & -٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} -٢ & ١٠ \\ ٣ & -١٥ \end{vmatrix} =$ صفر

، $\begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ -١٥ & ٦ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٣ & -١٥ \end{vmatrix} =$ صفر

، $\begin{vmatrix} -٥ & ٢ \\ ١٠ & -٤ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & -٤ \end{vmatrix} =$ صفر ، $\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ -٢ & ١٠ \end{vmatrix} =$ صفر

وحيث أن جميع قيمها أصفار ∴ ر(د) < ٢

، ∵ د مصفوفة غير صفرية ∴ ر(د) = ١

لاحظ أنه :

يمكن الحصول على نفس النتيجة إذا لاحظنا أن :

$$|د| = \begin{vmatrix} ١ & -٥ & ٢ \\ -٢ & ١٠ & -٤ \\ ٣ & -١٥ & ٦ \end{vmatrix} = -٥ \times ٢ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & -٢ & -٢ \\ ٣ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٥ \times ٢ \times -٢ \times ٣ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

أى أن المحدد من الدرجة الثالثة = صفر

وكذلك كل المحددات الصغرى من الدرجة الثانية = صفر

أيضًا ، ∵ المصفوفة د غير صفرية.

∴ مرتبة د = ١

مثال ٥

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & ك & -١ \\ ٢ & -١ & ك \\ ١ & ١٠ & -٦ \end{pmatrix}$ فأوجد قيمة ك فى كل من الحالتين الآتيتين :

① إذا كان : ر(أ) = ٣ ② إذا كان : ر(أ) = ٢

الحل

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ك & -١ \\ ٢ & -١ & ك \\ ١ & ١٠ & -٦ \end{vmatrix}$

$= ١(٦ - ١٠ ك) - ك(-١٢ - ك) -١(٢٠ + ١)$

$= ٦ - ١٠ ك + ١٢ ك + ك^٢ - ٢١$

∴ $|أ| = ك^٢ + ٢ك - ١٥$

$|أ| =$ صفر إذا كان $ك^٢ + ٢ك - ١٥ = ٠$.

إذا كان : (ك + ٥) (ك − ٣) = ٠ أى أن المحدد ينعدم عندما ك = −٥ أ، ك = ٣

عند ك = −٥ نجد أن $\begin{vmatrix} ١ & -٥ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ + ١٠ = ٩ \neq ٠$.

عند ك = ٣ نجد أن $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix} = -١ - ٦ = -٧ \neq ٠$.

ر(أ) = ٣ عندما ك ∈ ح − {−٥ ، ٣}

ر(أ) = ٢ عندما ك ∈ {−٥ ، ٣}

المصفوفة الموسعة

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية فى ن من المجاهيل فإنها تكتب على الصورة أ س = ب

ويمكن تعريف المصفوفة الموسعة أ* حيث أ* = (أ ⋮ ب) وتكون على النظم م × (ن + ١)

مثال ٦

أوجد المصفوفة الموسعة لكل من الأنظمة الآتية :

① ٢س + ص = ٣ ، س − ٢ص = ١

② ٢س + ٣ص = ٧ ، ٣س − ص = ٥ ، س − ص = ١

③ ٣س + ٢ص − ع = ٤ ، س + ص − ع = ٣ ، س − ٢ع = ٠ .

الحل

① $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & -٢ & ١ \end{array}\right)$

② $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ٣ & ٧ \\ ٣ & -١ & ٥ \\ ١ & -١ & ١ \end{array}\right)$

③ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٣ & ٢ & -١ & ٤ \\ ١ & ١ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٢ & ٠ \end{array}\right)$

مثال ٧

أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة لكل نظام من المعادلات الآتية :

(١) ٥ س − ٢ ص = ٧ ، ١٠ س − ٦ ص = ٩

(٢) ٢ س + ص = ٥ ، ٤ س + ٢ ص = ٧ ، ٦ س + ٣ ص = ٤

الحل

(١) $أ^* = \begin{pmatrix} ٥ & -٣ & \vdots & ٧ \\ ١٠ & -٦ & \vdots & ٩ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢ ، ∵ $\begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ ١٠ & ٩ \end{vmatrix}$ = ٤٥ − ٧٠ = −٢٥ ≠ ٠ . ∴ ر (أ*) = ٢

(٢) $أ^* = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & \vdots & ٥ \\ ٤ & ٢ & \vdots & ٧ \\ ٦ & ٣ & \vdots & ٤ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية. ∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢

، ∵ |أ*| = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٧ \\ ٦ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر لأن ع١ = ٢ ع٢ ∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ = ٧ − ١٠ = −٣ ≠ ٠ . ∴ ر (أ*) = ٢

إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية

لأى نظام من المعادلات الخطية المكون من (م) من المعادلات فى (ن) من المتغيرات (المجاهيل) معادلته المصفوفية على الصورة أ س = ب حيث أ مصفوفة المعاملات ، س مصفوفة المتغيرات ، ب مصفوفة الثوابت هناك حالتان :

أولًا المعادلات غير المتجانسة

إذا كانت مصفوفة الثوابت ب غير صفرية أى ب ≠ ☐ فإن هذا النظام يمثل معادلات خطية غير متجانسة ويكون النظام

(١) له حل وحيد إذا كان : ر (أ) = ر (أ*) = ن

(٢) له عدد غير محدود من الحلول (عدد لانهائى من الحلول)

إذا كان : ر (أ) = ر (أ*) = ك حيث ك < ن

(٣) ليس له حل على الإطلاق إذا كان : ر (أ) ≠ ر (أ*)

ثانيًا المعادلات المتجانسة

إذا كانت مصفوفة الثوابت ب صفرية أى ب = ☐ فإن هذا النظام يمثل معادلات خطية متجانسة وفى هذه الحالة تكون دائمًا ر (أ) = ر (أ*) أى مرتبة المصفوفة أ هى نفسها مرتبة المصفوفة الموسعة أ* ويكون النظام

(١) له حل وحيد إذا كان ر (أ) = ن حيث ن عدد المجاهيل وفيه تكون جميع قيم المتغيرات تساوى صفر لذلك يسمى بالحل الصفرى (البديهى لكونه شديد الوضوح)

(٢) له عدد لا نهائى من الحلول بجانب الحل الصفرى إذا كان ر (أ) < ن حيث ن عدد المجاهيل.

مثال ٨

ابحث إمكانية حل كل نظام من أنظمة المعادلات الآتية ثم حل النظام باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة إن وجد :

(١) ٢ س + ص = ١ ، ٥ س − ٢ ص = ٩

(٢) ٢ س + ٤ ص = ٨ ، ٦ س + ٨ ص = ١١

(٣) ٢ س − ٣ ص = ٦ ، ٦ س − ٩ ص = ١٨

الحل

(١) ∵ $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix}$ = −٦ − ٥ = −١١ ≠ ٠

∴ ر (أ) = ٢ ، ∵ $أ^* = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & \vdots & ١ \\ ٥ & -٢ & \vdots & ٩ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ ، أ* غير صفرية

∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢ ، ∵ |أ| ≠ ٠ . ∴ ر (أ*) = ٢

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ٢ = عدد المجاهيل (المتغيرات) ∴ المعادلتان لهما حل وحيد.

، ∵ $أ^{-1} = \frac{1}{-١١}\begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ∵ المعادلة المصفوفية للمعادلتين هى : أ س = ب

∴ س = $أ^{-1}$ ب

∴ س = $\frac{1}{-١١}\begin{pmatrix} -٢ & -١ \\ -٥ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ٩ \end{pmatrix} = \frac{1}{-١١}\begin{pmatrix} -١١ \\ ٢٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ -٢ \end{pmatrix}$ ∴ س = ١ ، ص = −٢ ∴ مجموعة الحل = {(١ ، −٢)}

(٢) ∵ أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية.

، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{vmatrix}$ = ٢٤ − ٢٤ = ٠

∴ ر (أ) = ١

، ∵ أ* = $\left(\begin{array}{cc:c} ٣ & ٤ & ٨ \\ ٦ & ٨ & ١١ \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر (أ*) ≤ ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} ٤ & ٨ \\ ٨ & ١١ \end{vmatrix}$ = ٤٤ − ٦٤ = −٢٠ ≠ ٠ ∴ ر (أ*) = ٢

∴ ر (أ) ≠ ر (أ*) ∴ المعادلتان ليس لهما حل.

∴ مجموعة الحل = ∅

(٣) ∵ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ ٦ & -٩ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ، غير صفرية. ∴ ١ ≤ ر (أ) ≤ ٢

، ∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٦ & -٩ \end{vmatrix}$ = −١٨ + ١٨ = ٠

∴ ر (أ) = ١ ، ∵ أ* = $\left(\begin{array}{cc:c} ٢ & -٣ & ٦ \\ ٦ & -٩ & ١٨ \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية.

، ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٦ & -٩ \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\begin{vmatrix} -٣ & ٦ \\ -٩ & ١٨ \end{vmatrix}$ = ٠ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٦ & ١٨ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ ر (أ*) = ١ ∴ ر (أ) = ر (أ*) = ١ < ٢ (أقل من عدد المتغيرات)

∴ المعادلتان لهما عدد لانهائى من الحلول.

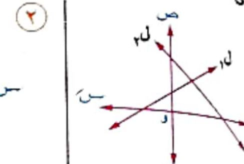
وبوضع س = ل فى إحدى المعادلتين ∴ ٢ ل − ٣ ص = ٦

∴ ص = $\frac{٦ - ٢ل}{-٣} = \frac{٢}{٣}$ ل − ٢ ∴ الحل العام = (ل ، $\frac{٢}{٣}$ ل − ٢)

ملاحظة : إذا لم يحدد فى المسألة إيجاد مجموعة حل المعادلتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة فيمكن استخدام طريقة كرامر أو أى طريقة أخرى فى حل المعادلتين.

ملاحظات

المعنى الهندسى لحل معادلتين خطيتين فى متغيرين يمثلهما المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ هو :

(١)	(٢)	(٣)
		
المستقيمان متقاطعان فى نقطة واحدة	المستقيمان منطبقان أى متقاطعان فى كل نقط المستقيمين	المستقيمان متوازيان وغير منطبقين
ر (أ) = ر (أ*) = ٢	ر (أ) = ر (أ*) = ١ (أقل من عدد المتغيرات)	ر (أ) ≠ ر (أ*)
حل وحيد.	عدد لا نهائى من الحلول.	لا يوجد حل.

مثال 9

عين قيم ك حتى يكون للنظام : س + ك ص = ٢ ، (ك − ١) س + ٢ ص = ك

(١) حل وحيد. (٢) عدد لانهائى من الحلول. (٣) ليس له حل.

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} ١ & ك \\ ك - ١ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ك \\ ك - ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢ − ك (ك − ١) = − ك² + ك + ٢

(١) لكى يكون للنظام حل وحيد يجب أن يكون ر (أ) = ٢ = عدد المتغيرات

أى : − ك² + ك + ٢ ≠ ٠ ∴ ك² − ك − ٢ ≠ ٠ ∴ (ك − ٢) (ك + ١) ≠ ٠

أى : ك ≠ ٢ ، ك ≠ −١

(٢) لكى يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول يجب أن يكون ر (أ) = ر (أ*) = ١ (أقل من عدد المتغيرات)

عند ك = ٢ يكون $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ ر (أ) = ١

، أ* = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & \vdots & ٢ \\ ١ & ٢ & \vdots & ٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية ، ∵ |أ| = ٠ ، $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٠

∴ ر (أ*) < ٢ ∴ ر (أ*) = ١

∴ يكون للنظام عدد لانهائى من الحلول عندما ك = ٢

(٣) لكى يكون النظام ليس له حل يجب أن يكون ر (أ) ≠ ر (أ*)

عند ك = −١ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ ر (أ) = ١

ويكون أ* = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & \vdots & ٢ \\ -٢ & ٢ & \vdots & -١ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣ وغير صفرية

، ∵ $\begin{vmatrix} -١ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}$ = ٢ − ٤ = −٢ ≠ ٠ ∴ ر (أ*) = ٢

∴ ر (أ) ≠ ر (أ*) ∴ عند ك = −١ لا يكون للنظام حل على الإطلاق.

مثال ١٠

إذا كان المعادلتان : ٥ س − ٢ ص = ٠ ، ٢ س + (ك − ١) ص = ٠ عدد لانهائى من الحلول. **فأوجد قيمة ك واكتب الحل العام للمعادلتين.**

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ك - ١ \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ٢ & ك - ١ \end{vmatrix}$ = ٥ ك − ٥ + ٤ = ٥ ك − ١

، ∵ المعادلتان متجانستان.

∴ لكى يكون للمعادلتين عدد لانهائى من الحلول يجب أن يكون ر (أ) = ١ (أقل من عدد المجاهيل)

أى أن : |أ| = ٠ ∴ ٥ ك − ١ = ٠ ∴ ك = $\frac{١}{٥}$

∴ قيمة ك التى تجعل للمعادلتين عدد لانهائى من الحلول = $\frac{١}{٥}$

ولإيجاد صورة الحل العام : نضع فى إحدى المعادلتين س = ل

∴ ٥ ل − ٢ ص = ٠ ∴ ص = $\frac{٥ ل}{٢}$ ∴ الحل العام للمعادلتين = (ل ، $\frac{٥}{٢}$ ل)

مثال ١١

ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لكل من أنظمة المعادلات الآتية :

(١) ٣ س − ٢ ص = ٠ ، ٢ س − ٣ ص = ٠

(٢) ٢ ص = ٧ س ، ٢١ س − ٦ ص = ٠

الحل

(١) أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix}$ = −٩ + ٤ = −٥ ≠ ٠.

∴ ر (أ) = ٢ (تساوى عدد المجاهيل)

∴ للنظام حل وحيد هو الحل الصفرى (٠ ، ٠)

(٢) أ = $\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٢١ & -٦ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٢ ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٧ & -٢ \\ ٢١ & -٦ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ ر (أ) = ١ (أقل من عدد المجاهيل)

∴ يوجد عدد لانهائى من الحلول خلاف الحل الصفرى.

لاحظ أننا : فى بحث إمكانية وجود حل لمجموعة من المعادلات المتجانسة نكتفى بتحديد مرتبة مصفوفة المعاملات أ دون تحديد رتبة المصفوفة الموسعة أ* وذلك لأن ر (أ) = ر (أ*) دائمًا حيث أن أ* تنتج من إضافة عمود الثوابت إلى المصفوفة أ وهو دائمًا يساوى أصفار وذلك لا يغير من مرتبتها.

مثال ١٢

ابحث إمكانية حل كل نظام من أنظمة المعادلات الآتية :

(١) ٢ ص − ع = ٥ ، ٢ س + ص + ع = ٩ ، س + ٢ ص + ٢ ع = ٣

(٢) س − ص + ٢ ع = ٥ ، ٢ س + ص + ع = ٧ ، ٣ س − ٢ ص + ٥ ع = ٢٠

(٣) س − ص + ع = ٧ ، ٣ س + ٢ ص − ١٢ ع = ١١ ، ٤ س + ص − ١١ ع = ١٨

الحل

(١) أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٣ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية.

$\therefore |أ| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3(4-1) - 1(4-1) = -12 \neq 0$.

$\therefore$ ر $(أ) = 3$

، $\because$ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$ على النظم 3×4 وغير صفرية.

$\therefore 1 \leq$ ر $(أ^*) \leq 3$ ، $\because$ ر $(أ) = 3$ $\qquad \therefore$ ر $(أ^*) = 3$

$\therefore$ ر $(أ) =$ ر $(أ^*) = 3 =$ عدد المجاهيل. $\qquad \therefore$ نظام المعادلات له حل وحيد.

(٢) $أ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ على النظم 3×3 وغير صفرية.

، $\because |أ| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1(5+2) + 1(10-3) + 2(-4-3) =$ صفر

$\therefore 1 \leq$ ر $(أ) < 3$

، $\because \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq$ صفر. $\qquad \therefore$ ر $(أ) = 2$

، $\because$ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \end{array}\right)$ على النظم 3×4 وغير صفرية.

، $\because \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 20 \end{vmatrix} = -1(20-35) - 2(20+14) + 5(5+2) = -18 \neq$ صفر

$\therefore$ ر $(أ^*) = 3$ $\qquad \therefore$ ر $(أ) \neq$ ر $(أ^*)$

$\therefore$ نظام المعادلات لا يوجد له حل على الإطلاق.

(٣) $أ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \\ 4 & 1 & -11 \end{pmatrix}$ على النظم 3×3 وغير صفرية.

، $\because |أ| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \\ 4 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 0$ لأن $ص_1 + ص_2 = ص_3$

$\therefore 1 \leq$ ر $(أ) < 3$ ، $\because \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$. $\qquad \therefore$ ر $(أ) = 2$

، $\because$ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -12 & 11 \\ 4 & 1 & -11 & 18 \end{array}\right)$ على النظم 3×4 وغير صفرية.

، $\because$ $ص_1 + ص_2 = ص_3$ في المصفوفة $أ^*$ $\quad \therefore$ أي محدد من الدرجة (٣) ستنعدم قيمته.

$\therefore 1 \leq$ ر $(أ^*) < 3$ ، $\because \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$ $\qquad \therefore$ ر $(أ^*) = 2$

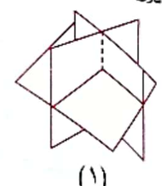
$\therefore$ ر $(أ) =$ ر $(أ^*) = 2 < 3$ (عدد المجاهيل)

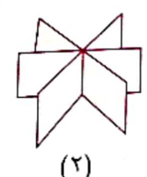
$\therefore$ نظام المعادلات له عدد لانهائى من الحلول.

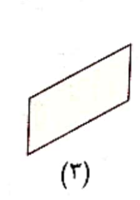
ملاحظات

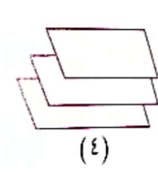
المعنى الهندسى لنظام من ٣ معادلات خطية فى ٣ مجاهيل

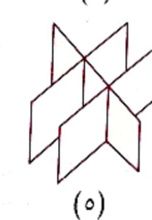
كل ثلاث معادلات خطية فى ثلاث متغيرات يمثلهم ثلاث مستويات فى الفراغ بأحد الأشكال الآتية :

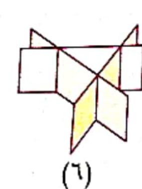

(١)


(٢)


(٣)


(٤)


(٥)


(٦)

1. المستويات الثلاثة تتقاطع فى نقطة واحدة (النظام له حل وحيد)
2. المستويات الثلاثة تتقاطع فى خط مستقيم واحد (النظام له عدد لانهائى من الحلول)
3. المستويات الثلاثة منطبقة (النظام له عدد لانهائى من الحلول)
4. الثلاث مستويات متوازية (النظام ليس له حل على الإطلاق)
5. مستوى يقطع مستويين متوازيين (النظام ليس له حل على الإطلاق)
6. المستويات تتقاطع مثنى مثنى ولا تتقاطع فى نقطة واحدة (النظام ليس له حل على الإطلاق)

مثال ١٣

بين أن المعادلات: ٣س − ص + ع = ٠ ، ٣ص − ع = ٠ ، ٢س + ٢ص = ٠

لها فقط الحل الصفرى.

الحــل

$أ = \begin{pmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٠ & ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ وهى على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية. ∴ ١ ≤ ر(أ) ≤ ٣

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -١ & ١ \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٣ (٠ + ٣) + ٢ (١ − ٣) = ٥ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣

، ∵ مجموعة المعادلات متجانسة ، ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ المعادلات لها الحل الصفرى فقط.

وهو س = ٠ ، ص = ٠ ، ع = ٠.

أى أن المستويات الثلاثة تتقاطع فى النقطة (٠ ، ٠ ، ٠)

مثال ١٤

بين أن النظام: ٣س − ٢ص + ع = ٠ ، ٣ص − ع = ٠ ، ٣س + ص = ٠

له حلول غير صفرية ، أوجد صورة هذا الحل.

الحــل

∵ $أ = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ وغير صفرية.

∴ ١ ≤ ر(أ) ≤ ٣

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ = ٣ (٠ + ١) + ٣ (٢ − ٣) = صفر.

، ∵ $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٩ − ٠ = ٩ ≠ ٠.

∴ ر(أ) = ٢ < ٣ (عدد المجاهيل)

، ∵ مجموعة المعادلات متجانسة.

∴ النظام له عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى ولإيجاد صورة الحل:

نضع س = ل وبالتعويض فى المعادلة الثالثة.

∴ ٣ل + ص = ٠ ومنها ص = −٣ل وبالتعويض فى المعادلة الثانية.

∴ −٩ل − ع = ٠ ∴ ع = −٩ل

∴ للنظام عدد لانهائى من الحلول على الصورة (ل ، −٣ل ، −٩ل)

مثال ١٥

أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل وحيد وأوجده:

س + ٣ص − ٢ع = ٠ ، ٣س − ٤ص + ع = ٦ ، ٤س + ص + ٥ع = −٢

الحــل

∵ $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ٤ & ١ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ٣ & -٤ & ١ \\ ٤ & ١ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١ (−٢٠ − ١) − ٣ (١٥ − ٤) −٢ (٣ + ١٦) = −٩٢ ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٣ ، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc:c} ١ & ٣ & -٢ & ٠ \\ ٣ & -٤ & ١ & ٦ \\ ٤ & ١ & ٥ & -٢ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٣ = عدد المجاهيل.

∴ مجموعة المعادلات لها حل وحيد على الصورة $س = أ^{-١} ب$

، ∵ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٢١ & -١١ & ١٩ \\ -١٧ & ١٣ & ١١ \\ -٥ & -٧ & -١٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٢١ & -١٧ & -٥ \\ -١١ & ١٣ & -٧ \\ ١٩ & ١١ & -١٣ \end{pmatrix}$

$\therefore$ ، $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^{\text{مد}} = \frac{-1}{92}\begin{pmatrix} -21 & -17 & -5 \\ -11 & 13 & -7 \\ 19 & 11 & -13 \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= A^{-1}$ ب $\qquad \therefore$ س $= \frac{-1}{92}\begin{pmatrix} -21 & -17 & -5 \\ -11 & 13 & -7 \\ 19 & 11 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= \frac{-1}{92}\begin{pmatrix} -92 \\ 92 \\ 92 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= 1$ ، ص $= -1$ ، ع $= -1$

لاحظ أنه يمكن استخدام طريقة كرامر فى إيجاد الحل بدلًا من المعكوس الضربى للمصفوفة كالآتى:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -92$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 6 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -92$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 92$ ، $\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 92$

$\therefore$ س $= \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = 1$ ، ص $= \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = -1$ ، ع $= \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = -1$

مثال 16

أوجد قيمة الثابت ك الذى يجعل مجموعة المعادلات الآتية لها حل وحيد ثم أوجد هذا الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة عندما ك = 1

س $- 2$ص $+$ ع $= 2$ ، 3س $- 5$ص $+ 2$ع $= 5$ ، 4س $+$ ص $+$ ك ع $= -1$

الحل

بكتابة مجموعة المعادلات على الصورة: أ س = ب

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & \text{ك} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\because \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & \text{ك} \end{vmatrix} = 1(-5\text{ك} - 2) + 2(3\text{ك} - 8) + 1(3 + 20)$

$= -5\text{ك} - 2 + 6\text{ك} - 16 + 23$

$= \text{ك} + 5$

ملاحظة

أ* تكون على النظم 3×4

وعندما $|A| \neq$ صفر

فإن ر(أ*) = 3

ولكى يكون لمجموعة المعادلات حل وحيد لابد أن ك + 5 ≠ 0 . أى: ك ≠ -5

$\therefore$ لجميع قيم ك الحقيقية عدا ك = -5 أى: ك ∈ ح - {-5} يكون لمجموعة المعادلات حل وحيد.

وعند ك = 1 يكون:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، $\because \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$\therefore$ ر(أ) = ر(أ*) = 3 = عدد المجاهيل.

$\therefore$ لمجموعة المعادلات حل وحيد هو س = A^{-1} ب

أى: $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\because A^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 23 \\ 3 & -3 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\because A^{-1} = \frac{A^{\text{مد}}}{|A|}$

$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 23 & -9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= 0$ ، ص $= -1$ ، ع $= 0$

تمارين 12 على حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مرتبة مصفوفة الوحدة I_2 هى ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٢) مرتبة المصفوفة [ ] من النظم ٣ × ٣ هى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) من بين الأنظمة الخطية الآتية، مجموعة المعادلات المتجانسة هى ....

(أ) ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٤

(ب) س − ص = ٠ ، س + ٢ص = ٥

(جـ) ٣س + ص = ٣ ، ٢س + ص = ٠

(د) س − ٢ص = ٠ ، س + ص = ٠

(٤) إذا كان م عدد المعادلات الخطية ، ن عدد المجاهيل فإن المصفوفة الموسعة تكون على النظم ....

(أ) م × ن (ب) م × (ن + ١)

(جـ) (م + ١) × ن (د) (م + ١) (ن + ١)

(٥) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٤ & ٦ \end{pmatrix}$ فإن : ر(أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & -٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر(أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٧) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & -٣ \\ -٢ & -٤ & ٦ \\ ٣ & ٦ & -٩ \end{pmatrix}$ فإن : ر(أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٨) إذا كانت : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن : ر(أ^{مد}) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٩) مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام : س − ٢ص = ٣ ، ٣س − ٦ص = ٩ هى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٠) إذا كان : أ$^{-1}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان : أ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١١) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

(١٢) يوجد للنظام $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ & ٣ \\ ١ & -٤ & -٣ \\ ٤ & -٤ & -٣ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ = [ ] ....

(أ) الحل البديهى فقط.

(ب) عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى.

(جـ) عدد لانهائى من الحلول عدا الحل الصفرى.

(د) لايوجد حل على الإطلاق.

(١٣) إذا كانت : أ مصفوفة من النظم م × ن فإن : ....

(أ) ر(أ) ≥ أصغر العددين م ، ن (ب) ر(أ) < أصغر العددين م ، ن

(جـ) ر(أ) ≤ أصغر العددين م ، ن (د) ر(أ) > أصغر العددين م ، ن

2 اكتب نظام المعادلات الخطية الآتى على صورة معادلة مصفوفية :

(١) ٢س − ٧ص = ١٠ ، ٥س + ٢ص = ٣

(٢) س + ٥ص = ٢ ، ٣س − ص = ٣ ، ٤س + ص = ٤

(٣) ٣س − ص + ع = ٥ ، ٢س + ٣ص − ع = −٢ ، ٩س − ٢ص − ٢ع = ٩

(٤) ٦س = ١ ، ص = −٢ ، −٣ع = ٥

٣ بين أى نظام من أنظمة المعادلات الآتية يمثل نظام معادلات خطية متجانسة وأيها يمثل نظام معادلات خطية غير متجانسة :

(١) س + ٢ ص = ٠ ، س − ١ = ٠ .

(٢) ٢ س − ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٠ .

(٣) ٢ س + ٢ ص − ٥ ع = ٠ ، ٥ س − ٣ ص + ٢ ع = ٤ ، س − ٢ ع = ٠ .

(٤) ٢ س + ٢ ص = ٥ ع ، ٣ س + ع = ٤ ص ، س + ع = ٠ .

(٥) س − ٢ = ٠ ، ص + ٣ = ٠ ، ع − ١ = ٠ .

٤ أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية :

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ & -٨ \end{pmatrix}$ «١»

(٢) $\begin{pmatrix} ٥ \\ -١١ \\ ٧ \end{pmatrix}$ «١»

(٣) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ «صفر»

(٤) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٧ \end{pmatrix}$ «١»

(٥) $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ «١»

(٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$ «١»

(٧) $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ «٢»

(٨) $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & -٣ \\ ٣ & ٥ & ٢ \end{pmatrix}$ «٢»

(٩) $\begin{pmatrix} ١٫٥ & ٣ & ٩ \\ ١ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ «١»

(١٠) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٦ & -٢ \\ ٩ & ٣ \end{pmatrix}$ «٢»

(١١) $\begin{pmatrix} \text{جا هـ} & \text{جتا هـ} \\ -\text{جتا هـ} & \text{جا هـ} \end{pmatrix}$ «٢»

(١٢) $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ٣ \end{pmatrix}$ «٢»

(١٣) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & -٢ \\ ٦ & ٩ & ١٥ \end{pmatrix}$ «٢»

(١٤) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ «٣»

(١٥) $\begin{pmatrix} ٠ & -٣ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \\ -١ & -٢ & ٠ \end{pmatrix}$ «٢»

(١٦) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$ «١»

٥ أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة لكل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية :

(١) ٢ س − ص = ٣ ، ٦ س − ٣ ص = ٩ «١»

(٢) س − ٣ ص = ٥ ، ٣ ص − س = ١ «٢»

(٣) ٣ س + ٢ ص = ٤ ، ٢ س + ٣ ص = ٦ «٢»

(٤) ٣ س − ٥ ص = ٢ ، ٢ س + ٧ ص = ٩ «٣»

(٥) س + ٢ ص = ٧ ، ٢ س − ص = ٤ ، ٤ س − ص = ٣ «٢»

(٦) ٣ س + ٢ ص − ع = ٤ ، ٣ س − ٢ ص = ٥ «٣»

(٧) س + ص + ع = ٩ ، س + ص + ع = ٣ ، س − ع = ٠ ، ٢ س − ٣ ص + ٢ ع = ٣ ، ٢ س + ٢ ص − ٣ ع = −٣ «٣»

٦ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ \text{ك} & ٠ & ١ \\ ٢ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ أوجد قيمة : ك «$\frac{٦}{١٣}$»

٧ إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٣ & ١ \\ ٠ & \text{ك} & ٢ \\ ٣ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٣

أوجد قيمة : ك الحقيقية. «ك ∈ ح − $\{\frac{٢٠}{٧}\}$»

٨ احسب مرتبة المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & \text{ك} & -٢ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ لجميع قيم ك المختلفة.

٩ أوجد قيمة ك التى تجعل رتبة المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ \text{ك} & ٤ & ١٠ \\ ١ & ٧ & ١٧ \end{pmatrix}$ أقل رتبة ممكنة. «صفر»

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد حلول النظام : ٢ س + ٥ ص = ٠ ، ٣ س − ع = ٠ ، ٢ ص − ٣ ع = ٠ . هو ....

(أ) الحل الصفرى فقط. (ب) صفر

(ج) عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى.

(د) عدد لانهائى من الحلول بينها الحل الصفرى.

② إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢- & ١ \\ ١ & ٠ & ك \\ ١- & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ وكان ر (أ) = ٢ فإن : ك = ...

(أ) ٢-　(ب) صفر　(جـ) ٢　(د) ٦

③ إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ك عدد لانهائى من الحلول فإن : ك = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

④ إذا كان للمعادلات : ٣ س - ٢ ص + ع = ٠ ، ٦ س - ٥ ص + ٢ ع = ٠ ، ٩ س - ٦ ص + ك ع = ٠ حلول خلاف الحل الصفرى فإن : ك = ...

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٣　(د) ٤

⑤ إذا كان للمعادلات : س + ٢ ص + ٣ ع = ٥ ، ٢ س - ٣ ص + ك ع = ١٢ ، ٢ س + ك ص + ٢ ع = ٣ حل وحيد فإن : ك ∋ ....

(أ) ع　(ب) ع - {-١}　(جـ) ع - {١٢}　(د) ع - {-١ ، ١٢}

⑥ إذا كانت : أ مصفوفة غير منفردة فإن العبارة الخاطئة فما يلى هى ....

(أ) أ لها معكوس ضربى.　(ب) ر (أ) = ر ($أ^{-1}$)

(جـ) |أ| = $|أ^{-1}|^{-1}$　(د) أ + $أ^{-1}$ = ☐

⑦ (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت المصفوفة ($أ_{س ص}$) على النظم ٣ × ٣ حيث $أ_{س ص}$ = ٢ س - ص فإن مرتبة المصفوفة أ هى ....

(أ) ٣　(ب) ٢　(جـ) ١　(د) صفر

⑧ نظام المعادلات : ٣ س + ص - ع = ٠ ، ٥ س + ٢ ص - ٣ ع = ٢ ، ١٥ س + ٦ ص + ٩ ع = ٥ ....

(أ) له حل وحيد.　(ب) له عدد لا نهائى من الحلول.

(جـ) له ثلاثة حلول.　(د) ليس له حل.

⑨ إذا كان $أ^*$ = $\left(\begin{array}{c|ccc} ٢ & ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ١ & ٤ & ١ \\ ٠ & ٠ & ٧ & ٢ \end{array}\right)$ فإن : ر (أ) + ر ($أ^*$) = ...

(أ) ٦　(ب) ٥　(جـ) ٤　(د) ٢

⑩ فى المعادلات الخطية الغير متجانسة فى ٣ متغيرات على الصورة أ س = ب حيث أ مصفوفة المعاملات إذا كان : ر (أ) = ر ($أ^*$) فإن للمعادلات ....

(أ) حل وحيد فقط.　(ب) عدد لانهائى من الحلول.

(جـ) ليس لها حل.　(د) (أ) أو (ب)

⑪ إذا كانت المعادلات الغير متجانسة فى ٣ متغيرات ليس لها حل على الإطلاق فإن المستويات الممثلة لهذه المعادلات فى الفراغ ....

(أ) الثلاثة مستويات تكون متوازية.

(ب) مستويان متوازيان والثالث قاطع لها.

(جـ) المستويات تتقاطع مثنى مثنى ولا تتقاطع فى نقطة واحدة.

(د) كل ما سبق صحيح.

١١ حل المعادلات المصفوفية الآتية :

① $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} ١- & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١- & ١- & ٢ \\ ١- & ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١- \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١- & ٢ \\ ١- & ١ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ \\ ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

١٢ ابحث باستخدام رتبة المصفوفة إمكانية حل مجموعات المعادلات الآتية واكتب الحل (أو صورته) إن وجد :

① س + ص = ٢ ، ٢ س + ٣ ص = ٥　«(١ ، ١)»

(٢) ٥ س − ص = −١١ ، ٣ ص − س = ٥ «(−٢ ، ١)»

(٣) ٧ س − ٤ ص = ٩ ، ٤ ص − ٧ س = ١٢ «لا يوجد حل»

(٤) ص = س − ٥ ، س = ص + ٩ «لا يوجد حل»

(٥) ص = ٢ س − ٣ ، ٤ س − ٢ ص = ٦ «عدد لا نهائي على الصورة (ل ، ٢ ل − ٣)»

١٣ أوجد قيمة ك التي تجعل لمجموعة المعادلات الآتية عدد لانهائي من الحلول :

(١) ك س + ٣ ص = ٦ ، س + ص = ٢ «٣»

(٢) ك س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + (٤ ك − ٥) ص = ٥ «٢»

(٣) (ك + ١) س − ٢ ص = ٤ ، ك س + ٢ ص = ٨ «لا يوجد»

(٤) ٣ س + ٩ ص = ٢ (ك + ١) ، ٢ س + ٦ ص = ك + ٣ «٥»

١٤ ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لكل مما يأتى :

(١) س + ٢ ص = ٠ ، ٤ س = ٩ ص «لا يوجد»

(٢) س + ص = ٠ ، ٢ س − ٣ ص = ٠ «لا يوجد»

(٣) ٢ س + ٣ ص = ٠ ، ٦ ص + ٤ س = ٠ «يوجد»

١٥ بين أن للأنظمة الآتية حلًا صفريًا فقط :

(١) ٢ س + ٧ ص + ٣ ع = ٠ ، ٣ س + ص − ٢ ع = ٠ ، ٤ س − ٣ ص − ع = ٠

(٢) س − ٢ ص + ٢ ع = ٠ ، ٣ س + ٤ ع = ٠ ، ٦ ع − ص = ٠

(٣) س + ٢ ص − ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٠ ، ٣ س − ٤ ص + ٢ ع = ٠

١٦ بين أن للأنظمة الآتية عددًا لانهائيًا من الحلول واكتب صورة الحل :

(١) س + ٢ ص + ٣ ع = ٠ ، ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٠ ، ٣ س − ص + ٢ ع = ٠

(٢) ٢ س − ص + ٣ ع = ٠ ، ٤ س − ٢ ص + ٦ ع = ٠ ، س + ٢ ع = ٠

(٣) ٢ س − ٥ ص − ٢ ع = ٠ ، ٢ س + ص + ٣ ع = ٠ ، − س + ٣ ص + ٢ ع = ٠

١٧ ابحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية واكتب صورته أن وجد :

(١) س + ص + ٣ ع = ٠ ، س − ص + ع = ٠ ، س − ٢ ص = ٠

(٢) س + ٣ ص − ٢ ع = ٠ ، س − ٨ ص + ٨ ع = ٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٠

(٣) ٢ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٣ س − ص − ٢ ع = ٠ ، ٢ س − ٢ ص − ٣ ع = ٠

١٨ حل كلًا من أنظمة المعادلات الخطية الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة :

(١) س + ص − ع = ١ ، ٢ س − ص + ٢ ع = ٣ ، ٣ س + ٢ ص − ٤ ع = ١ «١ ، ١ ، ١»

(٢) ٤ س + ص = ٠ ، س + ٢ ع = ١٥ ، ص − ٧ ع = ٠ «−١٠٥ ، ٤٢٠ ، ٦٠»

(٣) ٢ س + ٢ ص = ٨ ، ٣ ص + ٢ ع = ٩ ، ٣ ع + ٢ س = ١٣ «٢ ، ١ ، ٣»

(٤) ٢ س + ص − ٢ ع = ١٠ ، س + ٢ ص + ٢ ع = ١ ، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٦ «$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، −٣»

(٥) س − ٢ ص + ٢ ع = ٢ ، ٣ س + ٤ ع = ١٠ ، ٦ ع − ص = ٥ «٢ ، ١ ، ١»

(٦) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = ١$ ، $\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} + \frac{٢}{ع} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} - \frac{٤}{ع} = \frac{٤}{٣}$

حيث س ، ص ، ع لا تساوى صفر. «٢ ، ٣ ، ٦»

(٧) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} + \frac{١٠}{ع} = ٤$ ، $\frac{٤}{س} - \frac{٦}{ص} + \frac{٥}{ع} = ١$ ، $\frac{٦}{س} + \frac{٩}{ص} - \frac{٢٠}{ع} = ٢$

حيث س ، ص ، ع ≠ صفر. «٢ ، ٣ ، ٥»

١٩ ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية واكتب الحل أو صورته أن وجد :

(١) س − ص + ع = ٢ ، ٢س + ٢ص − ع = ٥ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = −١

(٢) س + ٢ص + ع = ٣ ، ٤س − ص − ع = ٦ ، س + ص + ٢ع = ١٠

(٣) ٤س + ٣ص + ٢ع + ٧ = ٠ ، ٢س + ص − ٤ع + ١ = ٠ ، س − ٧ع − ٢ = ٠

(٤) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(٥) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(٦) (دور أول ٢٠١٩) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

٢٠ اكتب مصفوفة موسعة لنظام المعادلات الآتي، ثم حل هذا النظام باستخدام طريقة معكوس المصفوفة (إن أمكن) :

(١) ٢س + ص + ع = ٠ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = ١٢ ، ٤س + ص + ٢ع = −١

(٢) س + ٢ص + ٢ع = ٠ ، س + ع = −١ ، س + ٢ص = ٣

(٣) ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، س + ص = −١ ، ص + ٢ع = ٣

(٤) ٤س + ٣ص − ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، س − ص + ع = ٢

٢١ ابحث إمكانية حل مجموعة المعادلات الآتية :

٤س + ٣ص − ٥ع = ٦ ، ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، ٥س − ٢ص − ٧ع = ١

ثم أوجد مجموعة حل هذه المعادلات باستخدام المعكوس الضربي. «{(٢ ، ١ ، ١)}»

٢٢ أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى واكتب الصورة العامة لهذا الحل :

٢س − ص + ٣ع = ٠ ، ٤س + ٥ص − ع = ٠ ، ٢س + ٣ص − ع = ٠ .

٢٣ احسب مرتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

ومن ثم أثبت أن مجموعة المعادلات : ٢س − ص − ٣ع = ٢ ، س + ٢ص + ع = ١ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = ١٣ لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة.

«٣ ، س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١»

٢٤ أوجد قيمة الثابت ك الذى يجعل لكل مجموعة من المعادلات الآتية حل وحيد وأوجد هذا الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة عند ك = ١

(١) س + ٢ص − ع = ٣ ، س − ٣ص + ٤ع = ٢ك ، ٢س + ٢ص − ك ع = ٧

(٢) س + ٥ص − ٢ع = ٤ ، ٢س + ص + ك ع = ٣ ، ٢س − ٢ص + ك ع = −٣

٢٥ أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات :

ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ١

عددًا غير منته من الحلول. «١»

٢٦ أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون لمجموعة المعادلات الآتية :

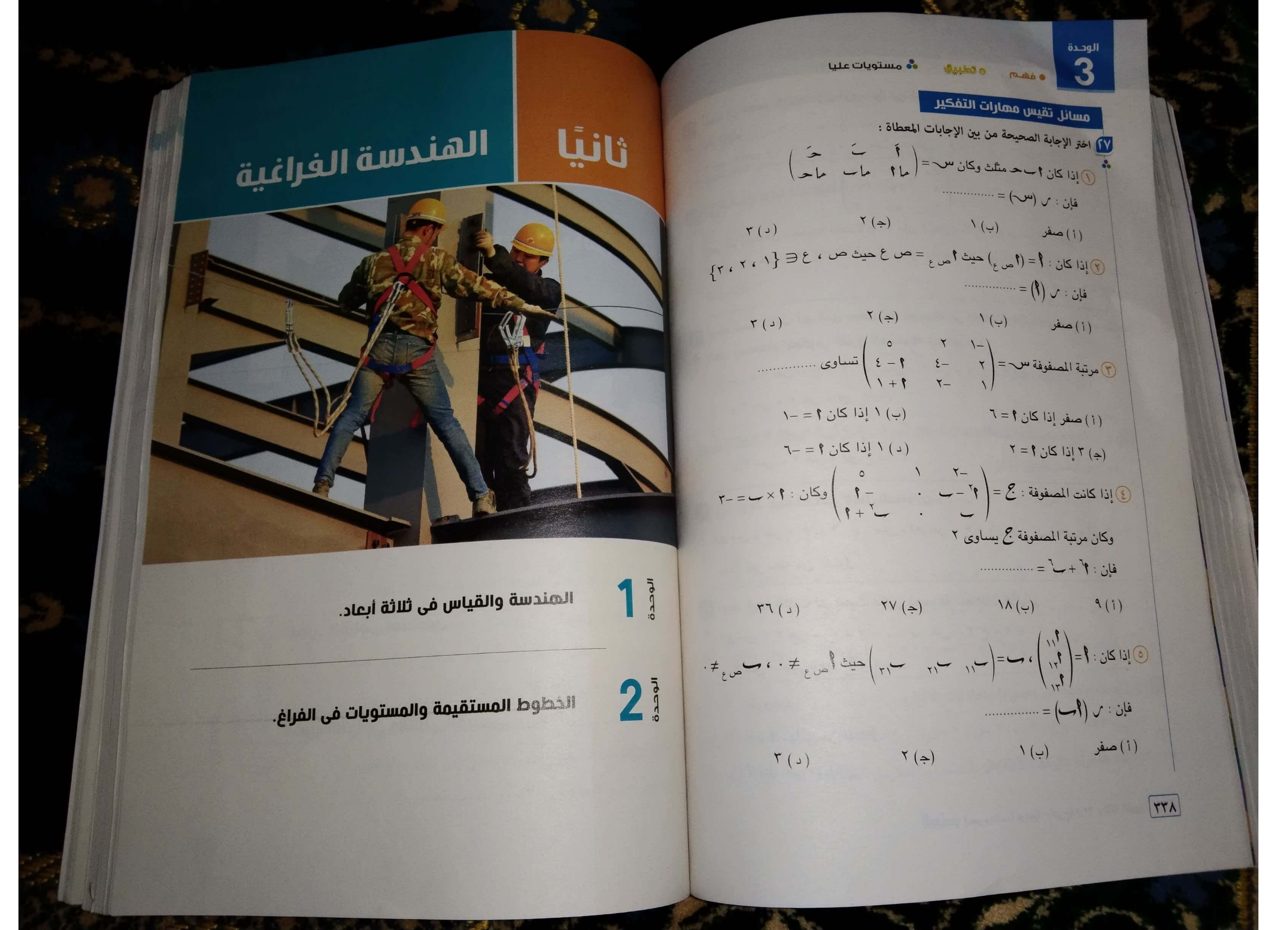
ك س + ٢ص − ع + ٢ = ٠ ، ص − ٣ع + ٣ = ٠ ، ٢س + ص + ك ع − ١ = ٠ .

(١) حل وحيد.

(٢) عدد لا نهائي من الحلول.

(٣) لا حل على الإطلاق.

«ك ∈ ح − {٢ ، −٥} ، ك = ٢ ، ك = −٥»



مسائل تقيس مهارات التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان أ ب ح مثلث وكان $س = \begin{pmatrix} أَ & بَ & حَ \\ جا أ & جا ب & جا ح \end{pmatrix}$

فإن : ر (س) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

② إذا كان : $أ = (أ_{ص ع})$ حيث $أ_{ص ع} = ص ع$ حيث ص ، ع ∈ {١ ، ٢ ، ٣}

فإن : ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

③ مرتبة المصفوفة $س = \begin{pmatrix} -١ & ٢ & ٥ \\ ٢ & -٤ & أ - ٤ \\ ١ & -٢ & أ + ١ \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) صفر إذا كان أ = ٦ (ب) ١ إذا كان أ = -١

(جـ) ٣ إذا كان أ = ٢ (د) ١ إذا كان أ = -٦

④ إذا كانت المصفوفة : $ج = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ٥ \\ أ^٢ - ب & ٠ & -أ \\ ب & ٠ & ب^٢ + أ \end{pmatrix}$ وكان : أ × ب = -٣

وكان مرتبة المصفوفة ج يساوى ٢

فإن : $أ^٦ + ب^٦$ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٢٧ (د) ٣٦

⑤ إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} \\ أ_{١٢} \\ أ_{١٣} \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} & ب_{٣١} \end{pmatrix}$ حيث $أ_{ص ع} \neq ٠$ ، $ب_{ص ع} \neq ٠$

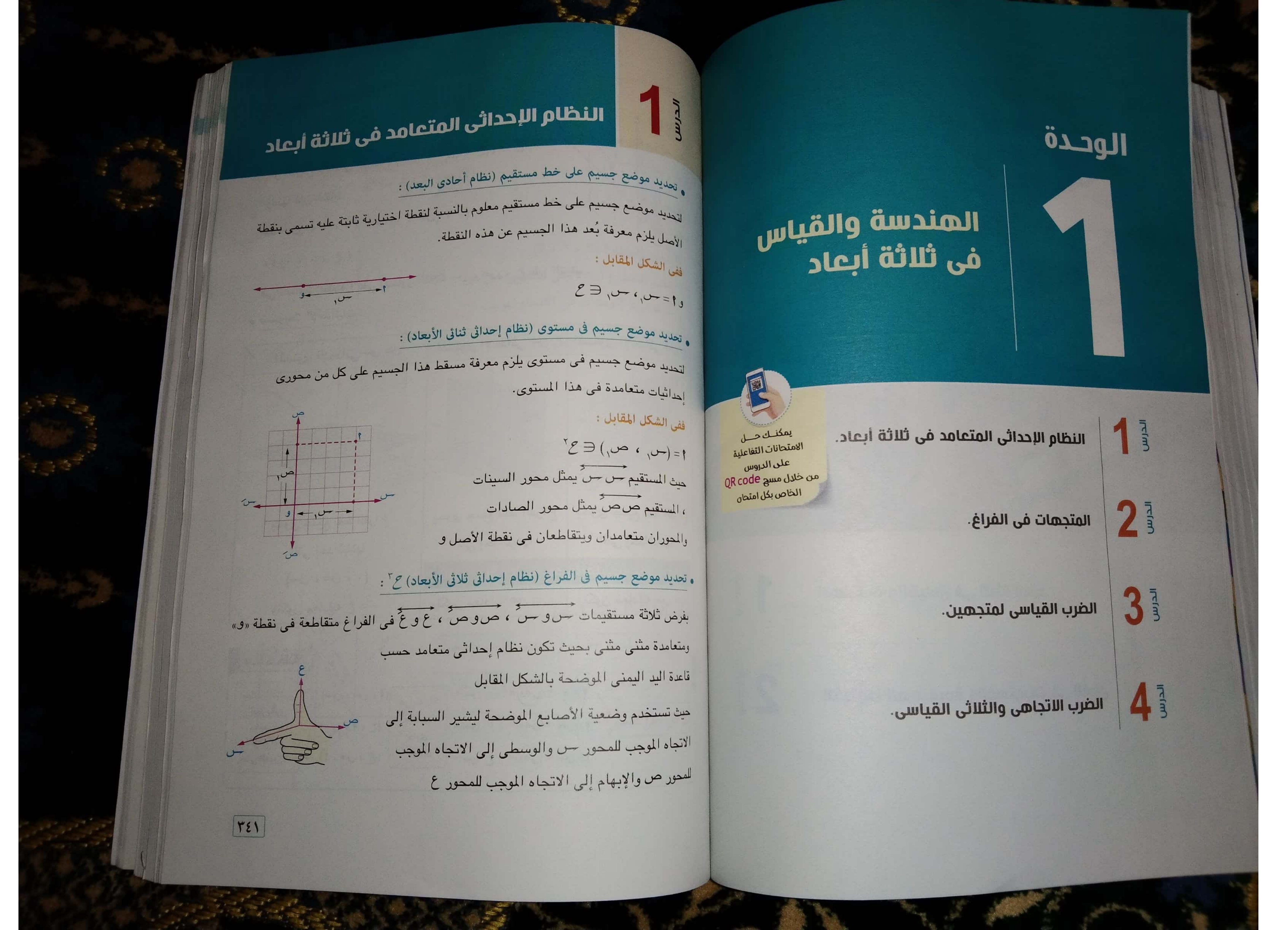
فإن : ر (أ ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

ثانيًا الهندسة الفراغية

الوحدة **1** الهندسة والقياس فى ثلاثة أبعاد.

الوحدة **2** الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ.



الوحدة 1

الهندسة والقياس في ثلاثة أبعاد

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

• **تحديد موضع جسيم على خط مستقيم (نظام أحادى البعد) :**

لتحديد موضع جسيم على خط مستقيم معلوم بالنسبة لنقطة اختيارية ثابتة عليه تسمى بنقطة الأصل يلزم معرفة بُعد هذا الجسيم عن هذه النقطة.

ففى الشكل المقابل :

و أ = س١ ، س١ ∈ ح

• **تحديد موضع جسيم فى مستوى (نظام إحداثى ثنائى الأبعاد) :**

لتحديد موضع جسيم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسيم على كل من محورى إحداثيات متعامدة فى هذا المستوى.

ففى الشكل المقابل :

أ = (س١ ، ص١) ∈ ح٢

حيث المستقيم $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ يمثل محور السينات

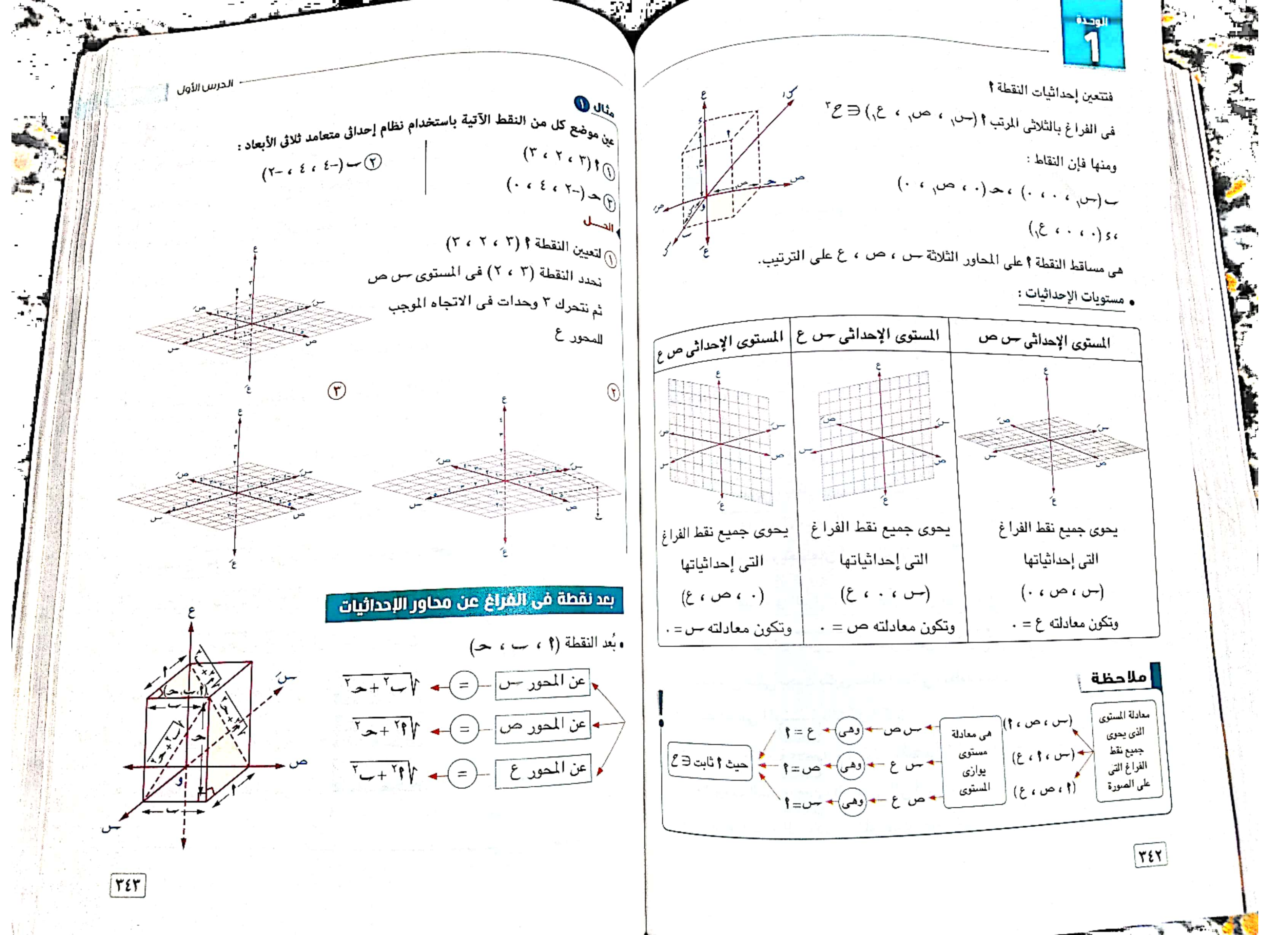
، المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$ يمثل محور الصادات

والمحوران متعامدان ويتقاطعان فى نقطة الأصل و

• **تحديد موضع جسيم فى الفراغ (نظام إحداثى ثلاثى الأبعاد) ح٣ :**

بفرض ثلاثة مستقيمات $\overleftrightarrow{\text{س و س}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص و ص}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع و ع}'}$ فى الفراغ متقاطعة فى نقطة «و» ومتعامدة مثنى مثنى بحيث تكون نظام إحداثى متعامد حسب قاعدة اليد اليمنى الموضحة بالشكل المقابل

حيث تستخدم وضعية الأصابع الموضحة ليشير السبابة إلى الاتجاه الموجب للمحور س والوسطى إلى الاتجاه الموجب للمحور ص والإبهام إلى الاتجاه الموجب للمحور ع



فتتعين إحداثيات النقطة أ

في الفراغ بالثلاثي المرتب أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1) \in ح^3$

ومنها فإن النقاط :

ب $(س_1 ، ٠ ، ٠)$ ، حـ $(٠ ، ص_1 ، ٠)$

، ء $(٠ ، ٠ ، ع_1)$

هي مساقط النقطة أ على المحاور الثلاثة س ، ص ، ع على الترتيب.

- مستويات الإحداثيات :

المستوى الإحداثي س ص	المستوى الإحداثي س ع	المستوى الإحداثي ص ع
يحوي جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س ، ص ، ٠) وتكون معادلته ع = ٠	يحوي جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (س ، ٠ ، ع) وتكون معادلته ص = ٠	يحوي جميع نقط الفراغ التي إحداثياتها (٠ ، ص ، ع) وتكون معادلته س = ٠

ملاحظة

معادلة المستوى الذي يحوي جميع نقط الفراغ التي على الصورة:
- (س ، ص ، أ) ← هي معادلة مستوى يوازي المستوى س ص ← وهي ← ع = أ
- (س ، أ ، ع) ← هي معادلة مستوى يوازي المستوى س ع ← وهي ← ص = أ
- (أ ، ص ، ع) ← هي معادلة مستوى يوازي المستوى ص ع ← وهي ← س = أ

حيث أ ثابت $\in ح$

مثال 1

عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد :

(١) أ (٣ ، ٢ ، ٣)　　(٢) ب (-٤ ، ٤ ، -٢)

(٣) حـ (-٢ ، ٤ ، ٠)

الحل

(١) لتعيين النقطة أ (٣ ، ٢ ، ٣)

نحدد النقطة (٣ ، ٢) في المستوى س ص

ثم نتحرك ٣ وحدات في الاتجاه الموجب

المحور ع

(٢)

(٣)

بعد نقطة في الفراغ عن محاور الإحداثيات

- بُعد النقطة (أ ، ب ، حـ)

عن المحور س $= \sqrt{ب^2 + حـ^2}$

عن المحور ص $= \sqrt{أ^2 + حـ^2}$

عن المحور ع $= \sqrt{أ^2 + ب^2}$

الوحدة 1

ملاحظات

- النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على المحور س
- النقطة (٠ ، ص ، ٠) تقع على المحور ص
- النقطة (٠ ، ٠ ، ع) تقع على المحور ع
- النقطة أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ، ع$_{١}$)
  - ← تبعد |س$_{١}$| وحدة طول عن المستوى ص ع
  - ← تبعد |ص$_{١}$| وحدة طول عن المستوى س ع
  - ← تبعد |ع$_{١}$| وحدة طول عن المستوى س ص

فمثلاً :

النقطة أ (٥ ، −٤ ، ٣) تبعد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع ، ٤ وحدات طول عن المستوى س ع ، ٣ وحدات طول عن المستوى س ص

- المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{صص'}$ يعينان المستوى س ص ، المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يعينان المستوى س ع ، المستقيمان $\overleftrightarrow{صص'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يعينان المستوى ص ع
- معادلة محور س فى الفراغ هى : ص = ٠ ، ع = ٠
- معادلة محور ص فى الفراغ هى : س = ٠ ، ع = ٠
- معادلة محور ع فى الفراغ هى : س = ٠ ، ص = ٠

مثال ٢

أوجد إحداثيات النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ (٢ + م ، ٣ − م ، م) ∈ المستوى س ع

(٢) أ (٣ ل ، ل + ٣ ، ٥ ل) ∈ المحور ص

(٣) أ (٢ + ك ، ٤ ك ، − ك) تبعُد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

(٤) أ (٤ م ، ٣ م ، م + ١) تبعُد ٥ وحدات عن محور ع

الحل

(١) ∵ أ (٢ + م ، ٣ − م ، م) ∈ المستوى س ع

∴ ٣ − م = ٠ ∴ م = ٣ ∴ أ (٥ ، ٠ ، ٣)

(٢) ∵ أ (٣ ل ، ل + ٣ ، ٥ ل) ∈ المحور ص

∴ ٣ ل = ٥ ل = ٠ ∴ ل = ٠ ∴ أ (٠ ، ٣ ، ٠)

(٣) ∵ أ (٢ + ك ، ٤ ك ، − ك) تبعُد ٥ وحدات طول عن المستوى ص ع

∴ ٢ + ك = ٥ ∴ ك = ٣ ∴ أ (٥ ، ١٢ ، −٣)

أ، ٢ + ك = −٥ ∴ ك = −٧ ∴ أ (−٥ ، −٢٨ ، ٧)

(٤) ∵ $\sqrt{(٤م)^{٢} + (٣م)^{٢}} = ٥$

∴ ١٦ م^{٢} + ٩ م^{٢} = ٢٥ ∴ ٢٥ م^{٢} = ٥^{٢} ∴ م^{٢} = ١

∴ م = ± ١

∴ أ (٤ ، ٣ ، ٢) أ، أ (−٤ ، −٣ ، ٠)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

اب حء أ'ب'ح'ء' متوازى مستطيلات فيه : أ (٣ ، ٧ ، ٥)

أوجد : (١) إحداثيات النقط : ب ، ب' ، ح ، ء ، ء' ، أ'

(٢) حجم متوازى المستطيلات.

الحل

(١) ب (٠ ، ٧ ، ٥) «لاحظ أن : ب ∈ المستوى ص ع »

، ب َ (٠ ، ٧ ، ٠) «لاحظ أن : ب َ ∈ محور ص »

، حـ (٠ ، ٠ ، ٥) «لاحظ أن : حـ ∈ محور ع »

، ء (٣ ، ٠ ، ٥) «لاحظ أن : ء ∈ المستوى س ع »

، ءَ (٣ ، ٠ ، ٠) «لاحظ أن : ءَ ∈ محور س »

، أ َ (٣ ، ٧ ، ٠) «لاحظ أن : أ َ ∈ المستوى س ص »

(٢) حجم متوازى المستطيلات = ٣ × ٧ × ٥ = ١٠٥ وحدة مكعبة.

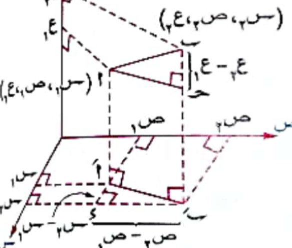
البعد بين نقطتين فى الفراغ

سبق لك دراسة البُعد بين نقطتين :

أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$)

فى المستوى الإحداثى ثنائى البعد حيث :

$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أما إذا كانت النقطتان أ ، ب فى الفراغ ثلاثى الأبعاد

حيث : أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$)

فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يعطى بالعلاقة :

$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

فمثلًا : إذا كانت : أ (٢ ، -٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ١ ، -١)

فإن : $أب = \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (-٣ - ١)^٢ + (٥ + ١)^٢} = ٢\sqrt{١٤}$ وحدة طول.

مثال ٤

إذا كان : أ (٦ ، ٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ١ ، ٧) ، حـ (٩ ، ٣ ، ١٥)

أثبت أن : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

الحل

$أب = \sqrt{(٦ - ٧)^٢ + (٠ - ١)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٣\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $ب حـ = \sqrt{(٧ - ٩)^٢ + (١ - ٣)^٢ + (٧ - ١٥)^٢} = ٦\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $أ حـ = \sqrt{(٦ - ٩)^٢ + (٠ - ٣)^٢ + (٣ - ١٥)^٢} = ٩\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∵ أ حـ = أ ب + ب حـ

∴ أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ٥

أثبت أن : النقط أ (٥ ، ٦ ، ٣) ، ب (٥ ، ٢ ، ٧) ، حـ (١ ، ٦ ، ٧)

هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع وأوجد مساحته.

الحل

$أب = \sqrt{(٥ - ٥)^٢ + (٦ - ٢)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $ب حـ = \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٢ - ٦)^٢ + (٧ - ٧)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

، $أ حـ = \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٦ - ٦)^٢ + (٣ - ٧)^٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع.

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤$\sqrt{٢}$ × ٤$\sqrt{٢}$ جا ٦٠° = ٨$\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

مثال ٦

أثبت أن : Δ أ ب حـ حيث أ (٤ ، ١ ، ٥) ، ب (-٤ ، ٣ ، ١) ، حـ (-٢ ، ٥ ، ١)

منفرج الزاوية فى حـ

الحل

(أ ب)^2 = (٤ + ٤)^2 + (١ - ٣)^2 + (٥ - ١)^2 = ٨٤

، (ب حـ)^2 = (-٤ + ٢)^2 + (٣ - ٥)^2 + (١ - ١)^2 = ٨

، (أ حـ)^2 = (٤ + ٢)^2 + (١ - ٥)^2 + (٥ - ١)^2 = ٦٨

، ∵ (أ ب)^2 > (أ حـ)^2 + (ب حـ)^2

∴ Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى حـ

تذكر أن :

فى المثلث أ ب حـ إذا كان :

- (أ ب)^2 = (ب حـ)^2 + (أ حـ)^2
  فإن ∠ حـ قائمة.
- (أ ب)^2 > (ب حـ)^2 + (أ حـ)^2
  فإن ∠ حـ منفرجة.
- (أ ب)^2 < (ب حـ)^2 + (أ حـ)^2
  فإن ∠ حـ حادة.

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان : أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) نقطتين فى الفراغ

فإن إحداثيات نقطة حـ التى تقع فى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ هى :

حـ = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$

فمثلًا : إذا كان : أ (٥ ، -٤ ، ٠) ، ب (١ ، ٨ ، ٤)

فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ = (٣ ، ٢ ، ٢)

مثال ٧

إذا كانت : حـ (٣ ، ٢ ، -١) هى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ (٤ ، ٣ ، -١)

أوجد : إحداثيات نقطة ب

الحل

بفرض أن إحداثيات نقطة ب هى (س ، ص ، ع)

∵ حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ (٣ ، ٢ ، -١) = $\left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{٣ + ص}{٢} ، \frac{-١ + ع}{٢}\right)$

∴ ٤ + س = ٦ ∴ س = ٢

، ٣ + ص = ٤ ∴ ص = ١

، -١ + ع = -٢ ∴ ع = -١

∴ ب (٢ ، ١ ، -١)

معادلة الكرة فى الفراغ

تعريف

الكرة هى مجموعة نقط الفراغ التى تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بعدًا ثابتًا (يعرف بطول نصف قطر الكرة)

وبفرض النقطة أ (س ، ص ، ع) تقع على سطح الكرة التى مركزها النقطة م (ل ، ك ، ن) وطول نصف قطرها نق

فإنه من تعريف الكرة ومن قانون البُعد بين نقطتين فإن :

$\sqrt{(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2}$ = نق

وبتربيع الطرفين :

∴ (س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2

وهذه هى الصورة القياسية لمعادلة الكرة.

تذكر أن :

- مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^2
- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^3

الوحدة 1

الصورة العامة لمعادلة الكرة

• سبق لك دراسة معادلة الدائرة فى المستوى : $(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

حيث (ء ، هـ) مركز الدائرة ونق طول نصف قطرها وكانت لها الصورة العامة :

$س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + حـ = 0$ ومنها كان مركز الدائرة (– ل ، – ك)

وطول نصف قطرها نق $= \sqrt{ل^2 + ك^2 - حـ}$

• بالمثل يوجد أيضًا الصورة العامة لمعادلة الكرة فى الفراغ والتى يمكن استنتاجها من الصورة القياسية الموضحة سابقًا فتكون الصورة العامة :

$س^2 + ص^2 + ع^2 + 2 ل س + 2 ك ص + 2 ن ع + ء = 0$ ومنها فإن مركز الكرة

هو (– ل ، – ك ، – ن) أى ($-\frac{1}{2}$ معامل س ، $-\frac{1}{2}$ معامل ص ، $-\frac{1}{2}$ معامل ع)

وذلك بشرط أن معامل كل من $س^2$ ، $ص^2$ ، $ع^2$ هو الواحد الصحيح

ومنها أيضًا فإن طول نصف قطر الكرة نق $= \sqrt{ل^2 + ك^2 + ن^2 - ء}$

مثال 8

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة فى كل من الحالات الآتية :

(1) مركزها النقطة (2 ، –1 ، 1) وطول نصف قطرها 5 وحدات طول.

(2) مركزها نقطة الأصل وطول قطرها 6 وحدات طول.

(3) النقطتين أ(2 ، –3 ، 5) ، ب(4 ، 3 ، 1) هما طرفا قطر فيها.

الحل

(1) الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى : $(س - 2)^2 + (ص + 1)^2 + (ع - 1)^2 = 25$

(2) الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى : $س^2 + ص^2 + ع^2 = 9$

(3) مركز الكرة م = منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{2+4}{2} ، \frac{-3+3}{2} ، \frac{5+1}{2}\right) = (3 ، 0 ، 3)$

، نق = أ م $= \sqrt{(2-3)^2 + (-3-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{14}$ وحدة طول

∴ الصورة القياسية لمعادلة الكرة هى $(س - 3)^2 + (ص - 0)^2 + (ع - 3)^2 = 14$

أى أن : $(س - 3)^2 + ص^2 + (ع - 3)^2 = 14$

معلومة إثرائية

* معادلة الكرة بمعلومية طرفى قطر فيها :

إذا كان : ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) هما طرفى قطر فى الكرة

فإن معادلتها تكون على الصورة :

$(س - س_1)(س - س_2) + (ص - ص_1)(ص - ص_2) + (ع - ع_1)(ع - ع_2) = 0$.

ويمكن استخدام ذلك فى حل الفرعية (3) من المثال السابق كالتالى :

معادلة الكرة فى الصورة العامة هى :

$(س - 2)(س - 4) + (ص + 3)(ص - 3) + (ع - 5)(ع - 1) = 0$.

أى أن : $س^2 - 6 س + 8 + ص^2 - 9 + ع^2 - 6 ع + 5 = 0$.

∴ $س^2 + ص^2 + ع^2 - 6 س - 6 ع + 4 = 0$.

∴ $(س - 3)^2 + ص^2 + (ع - 3)^2 = 14$

مثال 9

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

(1) $(س - 5)^2 + (ص + 4)^2 + (ع + 2)^2 = 25$ وأوجد مساحة سطحها.

(2) $س^2 + ص^2 + ع^2 = 16$ وأوجد حجمها.

الحل

(1) ∵ المعادلة على الصورة القياسية.

∴ مركز الكرة (5 ، –4 ، –2) وطول نصف قطرها 5 وحدات طول.

∴ مساحة سطحها $= 4 \pi نق^2 = 4 \times \pi \times 25 = 100 \pi$ وحدة مربعة.

(٢) ∵ المعادلة على الصورة القياسية.

∴ مركز الكرة هى نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) وطول نصف قطرها ٤ وحدات طول.

∴ حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3 = $\frac{4}{3}\pi \times 4^3 = \frac{256}{3}\pi$ وحدة حجم.

مثال ١٠

عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع + ١٢ = ٠

الحل

∵ معادلة الكرة هى : س^2 + ص^2 + ع^2 + ٢ س − ٤ ص + ٦ ع + ١٢ = ٠

∴ مركز الكرة (−١ ، ٢ ، −٣)

، طول نصف قطرها نق = $\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (-3)^2 - 12} = \sqrt{2}$ وحدة طول.

حل آخر : نكتب المعادلة على الصورة القياسية وذلك باستخدام إكمال المربع.

(س^2 + ٢ س + ①) + (ص^2 − ٤ ص + ④)

+ (ع^2 + ٦ ع + ⑨) − (① + ④ + ⑨) + ١٢ = ٠

∴ (س + ١)^2 + (ص − ٢)^2 + (ع + ٣)^2 = ٢

وهى الصورة القياسية لمعادلة الكرة.

∴ مركز الكرة (−١ ، ٢ ، −٣) وطول نصف قطرها $\sqrt{2}$ وحدة طول.

تذكر أن :

لجعل المقدار س^2 + ب س مقدار ثلاثى مربع كامل نضيف إليه مربع نصف معامل س أى $\left(\frac{ب}{2}\right)^2$

ملاحظات

في المعادلة العامة للكرة يكون :

* معامل س^2 = معامل ص^2 = معامل ع^2 ≠ صفر
* ل^2 + ك^2 + ن^2 − د > صفر
* المعادلة خالية من الحدود التى تشتمل على س ص أ، ص ع أ، س ع

الكرة التى مركزها نقطة الأصل والنقطة (أ ، ب ، حـ) تقع عليها

- يكون طول نصف قطرها نق = $\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}$
- تكون معادلتها فى الصورة القياسية : س^2 + ص^2 + ع^2 = أ^2 + ب^2 + حـ^2

مثال ١١

أوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل والنقطة (٥ ، −٢ ، ٣) تقع عليها.

الحل

المعادلة هى : س^2 + ص^2 + ع^2 = ٥^2 + (−٢)^2 + ٣^2

∴ س^2 + ص^2 + ع^2 = ٣٨

الكرة التى يقع مركزها على أحد المحاور وتمس المستوى المار بالمحورين الآخرين

* إذا كان المركز يقع على المحور س والكرة تمس المستوى ص ع
فإن إحداثيات المركز (أ ، ٠ ، ٠) وطول نصف القطر = |أ|
* إذا كان المركز يقع على المحور ص والكرة تمس المستوى س ع
فإن إحداثيات المركز (٠ ، ب ، ٠) وطول نصف القطر = |ب|
* إذا كان المركز يقع على المحور ع والكرة تمس المستوى س ص
فإن إحداثيات المركز (٠ ، ٠ ، حـ) وطول نصف القطر = |حـ|

مثال ١٢

أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها على المحور ص وتمس المستوى س ع ومركزها يبعُد عنه ٤ وحدات طولية.

الحل

، طول نصف قطر الكرة = ٤ وحدات طولية.

، مركز الكرة : إما (٠ ، ٤ ، ٠) أ، (٠ ، −٤ ، ٠)

∴ هناك كرتان معادلتاهما :

س^2 + (ص − ٤)^2 + ع^2 = ١٦ أ، س^2 + (ص + ٤)^2 + ع^2 = ١٦

الكرة التى مركزها النقطة (أ ، ب ، حـ) وتمس أحد مستويات الإحداثيات

* إذا كانت تمس المستوى س ص فإن طول نصف قطرها | حـ |
* إذا كانت تمس المستوى س ع فإن طول نصف قطرها | ب |
* إذا كانت تمس المستوى ص ع فإن طول نصف قطرها | أ |

مثال ١٣

أوجد معادلة الكرة التى مركزها (−٥ ، ١ ، −٢) وتمس المستوى الإحداثى س ص

الحل

∵ الكرة مركزها (−٥ ، ١ ، −٢) وتمس المستوى س ص

∴ نق = | −٢ | = ٢ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى : $(س + ٥)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٢)^٢ = ٤$

الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات وطول نصف قطرها نق

* يكون مركزها هو النقطة (± نق ، ± نق ، ± نق)

مثال ١٤

أوجد معادلة الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات وإحداثيات مركزها موجبة وطول نصف قطرها ٣ وحدات طول.

الحل

مركز الكرة هو النقطة (٣ ، ٣ ، ٣) ، نق = ٣

∴ معادلة الكرة هى : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

ملاحظة

إذا كانت : م ، ن كرتين طولا نصفى قطريهما $نق_١$ ، $نق_٢$ على الترتيب (حيث $نق_١ > نق_٢$)

إذا كانت الكرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	$م ن > نق_١ + نق_٢$
(٢) متماستين من الخارج	$م ن = نق_١ + نق_٢$
(٣) متقاطعتين	$نق_١ - نق_٢ < م ن < نق_١ + نق_٢$
(٤) متماستين من الداخل	$م ن = نق_١ - نق_٢$
(٥) إحداهما بداخل الأخرى	$م ن < نق_١ - نق_٢$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

مثال ١٥

إذا كانت الكرتان : $(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١٠٠$ ، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٩$ متماستين أوجد : ك

الحل

بالنسبة للكرة الأولى : مركزها $م_١$ = (٣ ، ١ ، ٢) ، طول نصف قطرها ١٠ وحدات طولية.

بالنسبة للكرة الثانية : مركزها $م_٢$ = (−١ ، ٤ ، ك) ، طول نصف قطرها ٣ وحدات طولية.

∴ $م_١ م_٢ = \sqrt{(٣ + ١)^٢ + (١ - ٤)^٢ + (٢ - ك)^٢} = \sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^٢}$

∵ الكرتين متماستان.

∴ إما $م_١ م_٢$ = ١٠ + ٣ = ١٣ (متماستان من الخارج)

∴ $\sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^٢} = ١٣$ ∴ $٢٥ + (٢ - ك)^٢ = ١٦٩$

∴ $(٢ - ك)^٢ = ١٤٤$ ∴ ٢ − ك = ± ١٢

∴ ك = ١٤ ، أ −١٠

∵ $م_1 م_2 = ١٠ - ٣ = ٧$ (متماستان من الداخل)

∴ $\sqrt{٢٥ + (٢ - ك)^٢} = ٧$ ∴ $٢٥ + (٢ - ك)^٢ = ٤٩$

∴ $(٢ - ك)^٢ = ٢٤$ ∴ $٢ - ك = \pm ٢\sqrt{٦}$

∴ $ك = ٢ + ٢\sqrt{٦}$ أو $٢ - ٢\sqrt{٦}$

مثال ١٦

أوجد معادلة الكرة التي تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول قطرها $١٠\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

الحل

نفرض أن مركز الكرة (أ ، ب ، حـ)

∴ $نق = \frac{١٠\sqrt{٢}}{٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طولية.

∵ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات.

∴ $أ = ب = حـ = \frac{٥\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٥$

∴ مركز الكرة = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ معادلة الكرة هي :

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٥٠$

لاحظ أنه

الكرة التي مركزها (أ ، ب ، حـ) وتمس محاور الإحداثيات الثلاثة ، طول نصف قطرها نق يكون :

* بعد المركز عن محور س = $\sqrt{ب^٢ + حـ^٢} = نق$
* بعد المركز عن محور ص = $\sqrt{أ^٢ + حـ^٢} = نق$
* بعد المركز عن محور ع = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} = نق$

∴ $\sqrt{أ^٢ + ب^٢} = \sqrt{أ^٢ + حـ^٢} = \sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$

ومنها نجد أن :

$|أ| = |ب| = |حـ|$ ، $نق = |أ|\sqrt{٢}$

مثال ١٧

أوجد معادلة أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥)

الحل

∵ النقط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥) هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه = $٥\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة المارة بهذه النقط = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠°} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$

ومركزها $\left(\frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، \frac{٥}{٣}\right)$

∴ معادلة أصغر كرة هي :

$\left(س - \frac{٥}{٣}\right)^٢ + \left(ص - \frac{٥}{٣}\right)^٢ + \left(ع - \frac{٥}{٣}\right)^٢ = \frac{٥٠}{٣}$

لاحظ أنه

لكي تحصل على أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإن هذه النقط لابد وأن تقع على أكبر دائرة على الكرة ويكون لها نفس مركز الكرة ونفس نصف قطرها

وإذا كونت النقاط الثلاثة مثلثًا متساوي الأضلاع ولتكن رؤوسه (أ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، أ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، أ)

∴ المركز = $\left(\frac{أ + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + أ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + أ}{٣}\right)$

$= \left(\frac{أ}{٣} ، \frac{أ}{٣} ، \frac{أ}{٣}\right)$ وطول ضلع المثلث = $|أ|\sqrt{٢}$

∴ طول نصف قطر الدائرة = $\frac{|أ|\sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠°} = \frac{|أ|\sqrt{٦}}{٣}$

تمارين 1

على النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد

• فهم • تطبيق • مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسي — اختبار تفاعلي

أولاً تمارين على النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد

1 عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد :

(١) أ (٣ ، ٤ ، ٥) (٢) ب (−٣ ، ٢ ، ٥)

2 📖 أوجد البُعد بين النقطتين أ ب في كل مما يأتي :

(١) أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)

(٢) أ (٤ ، ١ ، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٦)

(٣) أ (١ ، ١ ، −٧) ، ب (−٢ ، −٣ ، −٧)

3 أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث :

(١) 📖 أ (١ ، −٣ ، ٢) ، ب (٤ ، −١ ، ٤)

(٢) أ (٢ ، ٥ ، −٢) ، ء (−٦ ، ٣ ، ٤)

(٣) 📖 أ (−٣ ، ٥ ، ٥) ، ب (−٦ ، ٤ ، ٨)

(٤) أ (٥ ، ١ ، ٦) ، ب (٤ ، ٢ ، ١)

4 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) النقطة أ (٢ ، −٣ ، ٠) تقع ....

(أ) على المحور ع (ب) في المستوى ص ع

(ج) في المستوى س ص (د) على المحور س

(٢) النقطة (٢ ، ٠ ، ٠) تقع ....

(أ) على محور ص (ب) على محور ع

(ج) على محور س (د) في المستوى ص ع

(٣) بُعد النقطة أ (٢ ، −٣ ، ٥) عن المستوى الإحداثي س ع يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) −٣ (ج) ٣ (د) ٥

(٤) البُعد بين النقطة (أ ، ب ، ح) ومحور ص يساوي ....

(أ) $\sqrt{أ^2 + ح^2}$ (ب) $\sqrt{أ^2 + ب^2}$ (ج) $\sqrt{ب^2 + ح^2}$ (د) $\sqrt{أ^2 + ب^2 + ح^2}$

(٥) طول العمود المرسوم من النقطة (−٥ ، −٣ ، ٤) على محور س = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٤ (د) ١٠

(٦) إذا كانت النقطة (س ، ص ، ع) تقع في المستوى الإحداثي س ع فإن ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (ج) ع = ٠ (د) س + ص = ٠

(٧) 📖 مستويا الإحداثيات س ص ، ص ع يتقاطعان في ....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (ج) محور ص (د) محور ع

(٨) مستويات الإحداثيات س ص ، س ع ، ص ع تتقاطع معًا في ....

(أ) نقطة الأصل. (ب) محور س (ج) محور ص (د) محور ع

(٩) 📖 المستقيمان $\overleftrightarrow{س س'}$ ، $\overleftrightarrow{ع ع'}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذي معادلته ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (ج) ع = ٠ (د) ص = ٢

(١٠) معادلة محور ع في الفراغ هي ....

(أ) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) س = ٠ ، ع = ٠

(ج) ص = ٠ ، ع = ٠ (د) س = ٠

(١١) 📖 إحداثيات نقطة منتصف القطعة $\overline{ءهـ}$ حيث ء (٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ (٦ ، −١ ، −٤) هي ....

(أ) $(٤ ، ٢ ، ٣\frac{1}{2})$ (ب) $(٢ ، ١ ، \frac{1}{2})$

(ج) $(٤ ، ١ ، -\frac{1}{2})$ (د) $(٤ ، ١ ، \frac{1}{2})$

(١٢) إذا كان : (أ ، ب ، حـ) منتصف ءهـ حيث ء (−٤ ، ٠ ، ٥) ، هـ (−٢ ، ٤ ، ١٢−)

فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) −٥ (ب) −٦ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٣) إذا كانت نقطة منتصف أب تقع فى المستوى الإحداثى س ع وكانت :

أ (−٣ ، ١٢ + ك ، ٥) ، ب (١ ، ٣ك ، −٢) فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) ١

(١٤) إذا كان : أ (٧ ، −١ ، ٨) ، ب (−١١ ، ٢ ، −٤)

فإن : طول أب = ... وحدة طول.

(أ) ١٠ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(١٥) النقطة (٢ ، ٠ ، −٣) تقع فى مستوى الإحداثيات الذى معادلته ....

(أ) ع = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) س = ٠ (د) س + ص = −١

(١٦) إذا كانت النقطة (٢ أ ، أ + ٣ ، ٥) تقع فى مستوى الإحداثيات س ع فإن بُعدها عن المستوى الإحداثى ص ع يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) صفر

(١٧) إذا كانت النقطة (أ − ٢ ، ٥ ، أ − ٤) تُبعد عن المستوى ص ع خمسة وحدات طولية وتُبعد عن المستوى س ص ثلاثة وحدات طولية فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٧ أو −٣

(١٨) إذا كانت : (٥ ، ٦ ، −٣) هى منتصف أب حيث أ (٣ ، −١ ، ٥)

فإن : ب = ...

(أ) (٤ ، $\frac{5}{2}$ ، ١) (ب) (٧ ، ١٣ ، −١١)

(جـ) (−٢ ، −٧ ، ٨) (د) (٣ ، ٢ ، ١٣)

(١٩) بُعد النقطة (−٣ ، ٤ ، ٥) عن نقطة الأصل = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ٥$\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

(٢٠) إذا كان : أ (−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٢ ، ك) وكان طول أب = $\sqrt{77}$

فإن : ك = ...

(أ) −٣ أو ٦ (ب) −٣ أو ١٢ (جـ) ٩ أو ٦ (د) ٩ أو −٣

(٢١) جميع نقط الفراغ التى على الصورة (س ، ٥ ، ع) تقع فى المستوى الذى معادلته ....

(أ) س = ٥ (ب) ص = ٥ (جـ) ع = ٠ (د) ص = ٠

(٢٢) إذا كانت النقط أ (٦ ، ٠ ، ٣) ، ب (٧ ، ١ ، ٧) ، حـ (٩ ، ٣ ، ١٥) تقع على استقامة واحدة فإن : أ تقسم ب حـ بنسبة ....

(أ) ٣ : ١ من الداخل. (ب) ١ : ٣ من الخارج.

(جـ) ٢ : ٣ من الداخل. (د) ١ : ٢ من الخارج.

(٢٣) إذا كانت النقطة (ك ، ٣ ، −٥) تقع على أبعاد متساوية من المحورين س ، ص

فإن : ك = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٤ (د) ± ٥

(٢٤) إذا كان منتصف أب ∋ محور س حيث أ (٢ ، ١٢ + ك ، ك) ، ب (٤ ، م ، ٨ − م)

فإن : ك − ٣ م = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٢ (د) −١٠

(٢٥) النقطة أ (٣ ، −٥ ، ١) فى الفراغ فإن مجموع أبعادها عن مستويات الإحداثيات الثلاثة = ... وحدة طول.

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٩ (د) ٣٥

(٢٦) صورة النقطة (−٢ ، ٣ ، ٤) بالانعكاس فى محور ع هى ....

(أ) (−٢ ، ٣ ، ٤) (ب) (٢ ، ٣ ، ٤)

(جـ) (٢ ، −٣ ، −٤) (د) (٢ ، −٣ ، ٤)

(٢٧) إذا كان : م (١ ، ٢ ، ٣) ، ن (٤ ، ٢ ، ٣) ، هـ (١ ، ٦ ، ٣) إحداثيات نقط منتصفات كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{ب ح}$ ، $\overline{ح أ}$ على الترتيب فإن محيط Δ أ ب ح يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢٨) إذا كانت ل ، م ، ن هى مساقط الأعمدة المرسومة من النقطة أ (٣ ، ٤ ، ٥) على المحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن : م = ...

(أ) (٣ ، ٠ ، ٥) (ب) (٠ ، ٤ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٤ ، ٥) (د) (٠ ، -٤ ، ٠)

(٢٩) إذا كانت : ل ، م ، ن هى مساقط الأعمدة المرسومة من النقطة أ (٣ ، ٤ ، ٥) على المستويات س ص ، ص ع ، س ع على الترتيب فإن : ل = ...

(أ) (-٣ ، -٤ ، ٠) (ب) (٠ ، ٤ ، ٥)

(جـ) (٣ ، ٤ ، ٠) (د) (٣ ، ٠ ، ٠)

(٣٠) إذا كانت النقطة هـ على أبعاد متساوية من النقط : و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (ل ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، م ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، ن) فإن النقطة هـ = ...

(أ) (ل ، م ، ن) (ب) $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-م}{٢} ، \frac{-ن}{٢}\right)$

(جـ) (-ل ، -م ، -ن) (د) $\left(\frac{ل}{٢} ، \frac{م}{٢} ، \frac{ن}{٢}\right)$

(٣١) النقطة التى تقع على محور الصادات وتبعد مسافة $\sqrt{١٠}$ وحدة طول عن النقطة (١ ، ٢ ، ٣) هى ....

(أ) (٠ ، -٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢ ، ٠)

(جـ) (٠ ، ٤ ، ٠) (د) (٠ ، -٤ ، ٠)

(٣٢) إذا كانت أ (٦ ، -٢ ، ٤) ، ب (٢ ، ٤ ، -٨) ، حـ (-٢ ، ٢ ، ٤) هى ثلاث رؤوس متتالية لمتوازى الأضلاع أ ب حـ ء فإن : ء = ...

(أ) (٢ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ٠) (ب) (-٢ ، ٤ ، -١٦)

(جـ) (٢ ، -٤ ، ١٦) (د) (١ ، -٢ ، ٨)

(٣٣) إذا كانت : أ (٣ ، -٤ ، ٠) ، ب (١٥ ، ٠ ، ٢) ، حـ (٠ ، -٨ ، ٤) ثلاث نقط فى الفراغ وهى رؤوس المثلث أ ب حـ فإن بعد المركز الهندسى للمثلث عن المستوى الإحداثى س ع يكون ....

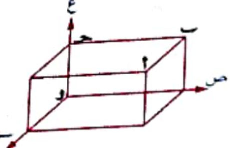
(أ) أكبر من بعده عن المستوى س ص

(ب) أصغر من أو يساوى بعده عن المستوى س ص

(جـ) أكبر من بعده عن المستوى ص ع

(د) أكبر من أو يساوى بعده عن المستوى ص ع

(٣٤) الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات :



أ (٥ ، ٨ ، ٤) فإن :

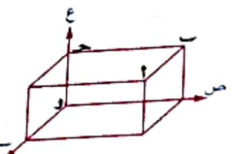
أولًا : إحداثيات النقطة ب هى ....

(أ) (٤ ، ٨ ، ٠) (ب) (٠ ، ٨ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٨ ، ٠) (د) (٥ ، ٠ ، ٤)

ثانيًا : إحداثيات النقطة حـ هى ....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٠) (ب) (٠ ، ٠ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٠ ، ٤) (د) (٠ ، ٨ ، ٠)

(٣٥) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء و بَ حـَ ءَ مكعب

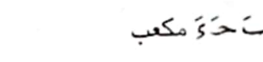
طول حرفه ٥ وحدات مكعبة فإن :

أولًا : إحداثيات النقطة حـ هى ....

(أ) (٥ ، ٥ ، ٠) (ب) (٥ ، ٥ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠ ، ٥) (د) (٠ ، ٥ ، ٠)

ثانيًا : إحداثيات النقطة ءَ هى ....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٥) (ب) (٥ ، ٥ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٥ ، ٥) (د) (٥ ، ٠ ، ٠)



ثالثًا : طول قطر المكعب = ... وحدة طول.

(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) $٥\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) $٥\sqrt{٦}$

(٣٦) فى الشكل المقابل :

متوازى مستطيلات فيه :

حَ (٥ ، ٨ ، ٠) ، ءَ (٥ ، ٠ ، ٣) فإن :

أولًا : إحداثيات نقطة حـ ....

(أ) (٥ ، ٨ ، ٠) (ب) (٥ ، ٣ ، ٨) (جـ) (٥ ، ٨ ، ٣) (د) (٥ ، ٨ ، ٨)

ثانيًا : حجم متوازى المستطيلات .... وحدة مكعبة.

(أ) ٦٤ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٤٤ (د) ١٥٠

ثالثًا : معادلة المستوى وَ حَ ءَ هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) ع = ٣

رابعًا : معادلة المستوى ء ءَ حَ حـ هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) س = ٥ (د) ع = ٣

٥ الشكل المقابل يمثل مكعبًا حجمه ٢٧ وحدة مكعبة أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل، أوجد إحداثيات باقى الرؤوس.

٦ أوجد إحداثيات النقطة أ فى كل من الحالات الآتية :

(١) أ(١ - ك ، ٢ ك ، ٣ + ك) تقع فى المستوى س ص

(٢) أ(٠ ، م - ٣ ، م + ٤) تقع على المحور ع

(٣) أ(ن - ١ ، ن + ٤ ، ٥ ن) تقع فى المستوى ص = ٥

(٤) أ(ل + ٥ ، ٢ ل ، ل) تبعد $2\sqrt{5}$ وحدة طولية عن المحور س

(٥) أ(م ، ٢ م - ن ، م + ن + ٣) ∈ محور س

٧ أثبت أن كل مجموعة من النقط التالية تقع على استقامة واحدة :

(١) أ(٧ ، ١ ، ٤) ، ب(٨ ، ٢ ، ٨) ، حـ(١٠ ، ٤ ، ١٦)

(٢) أ(٢ ، -١ ، ٥) ، ب(٦ ، ٠ ، ٦) ، حـ(١٤ ، ٢ ، ٨)

٨ أثبت أن : النقط أ(١ ، ٢ ، ٥) ، ب(٢ ، ٥ ، ٣) ، حـ(-١ ، ٣ ، ٢) هى رؤوس مثلث متساوى الأضلاع وأوجد مساحته. «$\frac{7\sqrt{3}}{2}$ وحدة مربعة»

٩ أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث قائم وأوجد مساحته حيث :

(١) أ(٠ ، ٠ ، ٠) ، ب(٤ ، -٥ ، ٢) ، حـ(١ ، ٢ ، ٣)

(٢) أ(٢ ، -١ ، ٣) ، ب(-٤ ، ٤ ، ٢) ، حـ(-٢ ، ٥ ، ١)

١٠ أثبت أن : المثلث الذى رؤوسه النقط أ(٧ ، ١ ، ٣) ، ب(٥ ، ٣ ، ٤) ، حـ(٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين.

١١ أثبت أن : النقط أ(٧ ، ١ ، ٣) ، ب(٥ ، ٣ ، ك) ، حـ(٣ ، ٥ ، ٣) تكون مثلثًا متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية ، ثم أوجد : قيم ك الحقيقية التى تجعل المثلث متساوى الأضلاع. «$3 \pm 2\sqrt{6}$»

١٢ إذا كانت : حـ(٥ ، ٥ ، ٩) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٤ ، -١ ، ٣) أوجد : ب «(٦ ، ١١ ، ١٥)»

١٣ إذا كانت : حـ(-١ ، ٤ ، ٠) منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث ب(٤ ، -٢ ، ١) أوجد : إحداثيات النقطة أ «(-٦ ، ١٠ ، -١)»

١٤ إذا كانت : حـ(-١ ، ٦ ، -٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(ك - ٢ ، -١ ، م + ٣) ، ب(٢ ، ن - ٧ ، -٢) فأوجد قيمة : ك + م - ن «-٢٣»

١٥ أوجد محيط المثلث الناتج من توصيل منتصفات أضلاع △ أ ب حـ حيث : أ(٢ ، ٥ ، -١) ، ب(٦ ، -٣ ، ٣) ، حـ(-٤ ، ٧ ، ١) «١٥,٤»

16 إذا كانت: أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، حـ ∈ محور ع
وكانت النقطة (١ ، -١ ، صفر) منتصف $\overline{أب}$ ، والنقطة (٠ ، -١ ، ٢) منتصف $\overline{ب حـ}$
أوجد: إحداثيات منتصف $\overline{أحـ}$

17 إذا كان: أ ، ب ، حـ ، ء أربعة نقاط فى مستوى واحد أثبت أن:

(١) أ(٠ ، ٤ ، ١) ، ب(٢ ، ٣ ، -١) ، حـ(٤ ، ٥ ، ٠) ، ء(٢ ، ٦ ، ٢) هى رؤوس مربع.

(٢) أ(٥ ، -١ ، ١) ، ب(٧ ، -٤ ، ٧) ، حـ(١ ، -٦ ، ١٠) ، ء(-١ ، -٣ ، ٤) هى رؤوس معين.

18 إذا كانت: ء ، هـ ، و هى منتصفات أضلاع △ أ ب حـ وهى $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب حيث: ء(١ ، ٢ ، ٦) ، هـ(٠ ، ٣ ، ٢) ، و(٢ ، ٠ ، -٢)
أوجد: إحداثيات رؤوس △ أ ب حـ

ثانيًا تمارين على معادلة الكرة

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، -٣ ، ٥) وطول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ وحدة طول هى ....

(أ) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٥)^٢ = ٢\sqrt{٥}$

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٠$

(جـ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٢٠$

(د) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٥)^٢ = ٢\sqrt{٥}$

(٢) معادلة الكرة التى مركزها (-٢ ، ١ ، -٤) وطول نصف قطرها ٢٥ هى ....

(أ) $(س + ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ٥$

(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٦٢٥$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤س - ٢ص + ٨ع - ٦٢٥ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤س - ٢ص + ٨ع - ٦٠٤ = ٠$

(٣) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٣$

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٩$

(جـ) $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٩ = ٠$

(٤) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -١ ، ٢) هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٤$

(ب) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = ١٤$

(جـ) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٢)^٢ = \sqrt{١٤}$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤$

(٥) (دور أول ٢٠١٨) معادلة الكرة التى مركزها النقطة (٢ ، -٣ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثى س ص هى ....

(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٤$

(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ٩$

(جـ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ٤)^٢ = ١٦$

(د) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ١٦$

(٦) مركز الكرة التى معادلتها: $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٤ص + ٦ع - ١٦ = ٠$ هو ....

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٢ ، -٤ ، ٦)

(جـ) (-١ ، ٢ ، -٣) (د) (-٢ ، ٤ ، -٦)

(٧) النقطة أ = (٣ ، ٢ ، ١) تقع .... الكرة التى معادلتها: $س^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٤$

(أ) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) فى مركز

(٨) طول نصف قطر الكرة : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س − ٦ ص + ١٠ ع − ١ = صفر يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٩) 📖 (دور ثان ٢٠١٧) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س − ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠ . معادلة كرة طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(١٠) إذا كانت $\overline{أب}$ قطر فى الكرة التى معادلتها (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع − ١)^{٢} = ١١ وكانت إحداثيات أ (٨ ، −١ ، ٢) فإن إحداثيات نقطة ب هى ....

(أ) (٥ ، −٢ ، ١) (ب) (١٠ ، −٤ ، ٥)
(جـ) (٢ ، −٣ ، ٠) (د) (١٠ ، ٣ ، ٦)

(١١) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتقطع جزءًا طوله ٥ وحدات من الجزء الموجب للمحور س هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢٥ = ٠
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠٠ = ٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − $\sqrt{٥}$ = ٠

(١٢) إذا كانت نقطة الأصل تقع على الكرة التى مركزها (−١ ، ٢ ، ٢) فإن معادلتها ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س + ٤ ص + ٤ ع = −٣
(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص − ٤ ع = ٣
(جـ) (س + ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} + ٩ = ٠
(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ س − ٤ ص − ٤ ع = ٠

(١٣) 📖 معادلة الكرة التى مركزها النقطة (١ ، −٣ ، −١) وتمر بالنقطة (−٢ ، −١ ، −١) هى ....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ١٣
(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ٢ ع − ١٣ = ٠
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ٢ ع = ٢
(د) (س − ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = $\sqrt{١٣}$

(١٤) 📖 معادلة الكرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٧ ، ١ ، −٤) ، ب (٣ ، −١ ، ٢) هى ....

(أ) (س − ٧)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٨
(ب) (س − ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ١٤
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ س + ٢ ع − ١٤ = ٠
(د) (س − ٥)^{٢} + (ع + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٤

(١٥) 📖 طول نصف قطر الكرة التى معادلتها (س − ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع − ٥)^{٢} = ٦٤ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٦٤ (ب) ٣ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٨ (د) ٥

(١٦) مساحة الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠ تساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ٢٠ π (ب) ٤٠ π (جـ) ٢٥ π (د) ١٠٠ π

(١٧) حجم الكرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ س − ٨ ص − ١٠ ع − ٣٦ = ٠ يساوى .... وحدة حجم.

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٣٦ π (جـ) ٧٨٢ π (د) ٩٧٢ π

(١٨) 📖 إذا كانت النقطة (−٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٢٥ فإن : م = ...

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٧ أ، −١ (د) ٤ أ، −١

(١٩) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت النقطة (٧ ، −٢ ، ٢) تقع على سطح الكرة التى معادلتها (س − ٤)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ل^{٢} فإن : |ل| = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\sqrt{٣}$

(٢٠) مركز الكرة التى يكون فيها النقط أ (٣ ، −٣ ، ٢) ، ب (٥ ، −١ ، ٢) طرفى قطر فيها هو ....

(أ) (٨ ، −٤ ، ٤) (ب) (٤ ، −٢ ، ٠)
(جـ) (٤ ، −٢ ، ٢) (د) (−٢ ، −٢ ، ٠)



(٢١) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −١ ، ٤) ومساحتها ١٠٠ π وحدة مربعة هى ....

(أ) (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ٢٥

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٢٥

(جـ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٠٠

(د) (س − ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٥

(٢٢) مساحة أكبر دائرة مرسومة على سطح الكرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٠ ، −١) وتمر بالنقطة (٧ ، ١ ، −٤) تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٥ π (ب) ٤٩ π (جـ) ١٦ π (د) ١٤ π

(٢٣) معادلة كرة مركزها م (٤ ، −٦ ، −٥) ، وطول نصف قطرها ٢ وحدة طول هى س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠

فإن : أ + ب + جـ + ء = ...

(أ) ١٨ (ب) ٧٣ (جـ) ٨٧ (د) ٣٠٤

(٢٤) الكرة المحصورة بين المستويين ع = −١ ، ع = ٥ ومركزها (٢ ، −١ ، ك)

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٥) مركز الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها ٥ وحدات هو ....

(أ) (٠ ، ٠ ، ٠) (ب) (٥ ، ٥ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠ ، ٠) (د) (٠ ، ٥ ، ٥)

(٢٦) مركز الكرة س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ ع = ٠ يقع ....

(أ) على المحور س (ب) فى المستوى ع = ٠

(جـ) على المحور ص (د) على المحور ع

(٢٧) إذا كانت : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٤ ع + ك = ٠ معادلة كرة

فإن : ك يمكن أن تكون ....

(أ) ٩ (ب) ١٨ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢٨) الكرة (س − ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٢٥ تمس ....

(أ) المحور س (ب) المستوى الإحداثى س ص

(جـ) المستوى الإحداثى س ع (د) المحور ص

(٢٩) أى مما يأتى يمثل معادلة كرة مركزها يقع على المحور ع وتمس المستوى الإحداثى س ص ؟

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥ (ب) س^{٢} − ١٠ س + ص^{٢} + ع^{٢} = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ ع = ٢٥ (د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ ع = ٠

(٣٠) كرة مركزها (٢ ، ٣ ، ٤) تمس محور السينات فإن معادلة الكرة ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٥

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ س − ٦ ص − ٨ ع + ٤ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢٥ = ٠

(٣١) إذا كانت : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٤ ك س + ٤ ص − ٨ ع + ك = ٠ معادلة كرة طول نصف قطرها ٥ وحدات طول فإن : ك = ...

(أ) $\frac{-٥}{٤}$ أ، ١ (ب) $\frac{٥}{٤}$ أ، −١ (جـ) $-\frac{١}{٤}$ أ، $\frac{٥}{٤}$ (د) ١ أ، −١

(٣٢) إذا كان محور الصادات يقطع الكرة التى مركزها (٣ ، −٤ ، ١٢) وطول نصف قطرها ١٣ سم فى النقطتين أ ، ب فإن : أ ب يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٣ (د) ٢٦

(٣٣) الكرتان اللتان معادلاتهما : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ٢ س − ٢ ص + ٢ ع − ١ = ٠ ، (س − ٥)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + ع^{٢} = ٤ تكونان ....

(أ) متماستين من الخارج. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متقاطعتين. (د) متباعدتين.



الوحدة 1 • فهم ○ تطبيق ⁘ مستويات عليا

(٣٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كانت : م$_1$ ، م$_2$ كرتين متماستين من الداخل ، وكان : م$_1$ (−٣ ، ٢ ، −٦√٢) ، نق$_1$ = ٨ وحدة طول ، م$_2$ (−٢ ، ١ ، −٥√٢)
فإن : نق$_2$ = ... وحدة طول ، حيث نق$_1$ > نق$_2$

(أ) ٥ (ب) ٢ (ج) ٧ (د) ٦

(٣٥) أصغر مسافة بين النقطة (٣ ، ٥ ، ١) وسطح الكرة
(س − ١)^2 + (ص − ٢)^2 + (ع + ٥)^2 = ٢٥ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٧

(٣٦) نقطة فى الفراغ ثلاثى الأبعاد تبعد عن كل من مستويات الإحداثيات الثلاثة نفس المسافة (أ) وحدة طول أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) النقطة هى : (أ ، أ ، أ)

(ب) يوجد ٨ نقاط تحقق ذلك تقع على رؤوس مكعب حجمه (٨ أ^3) وحدة مكعبة.

(ج) هذه النقطة هى مركز الكرة التى تمس محاور الإحداثيات وطول نصف قطرها أ
وحدة طول.

(د) جميع هذه النقط تقع على سطح كرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها
أ وحدة طول.

(٣٧) كرة تمس المستويات س ص ، ص ع ، س ع وتمر بالنقطة (١ ، −٤ ، ٥)
فإن طول نصف قطرها يمكن أن يكون .... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٧ (ج) ٨ (د) ٩

٢ أوجد معادلة الكرة التى :

(١) مركزها النقطة (٢ ، −١ ، ٤) وطول نصف قطرها ٢ وحدات.

(٢) مركزها النقطة (٤ ، −٢ ، ٣) وطول قطرها ٢√٥

(٣) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها √٧ وحدة طول.

(٤) (٣ ، ٤ ، −٣) ، (٠ ، ٢ ، ١) نهايتا قطر فيها.

٣٧٢

الدرس الأول

(٥) أ(٢ ، ٣ ، −٥) ، ب(−٤ ، −١ ، ٣) طرفا قطر فيها.

(٦) مركزها النقطة (١ ، −٦ ، ١) وتمر بالنقطة (٢ ، −١ ، ٥)

(٧) مركزها النقطة (−١ ، ٢ ، −٢) وتمر بنقطة الأصل.

(٨) مركزها النقطة (−٢ ، −٥ ، ٣) وتمس المستوى س ص

(٩) مركزها النقطة (٠ ، ٤ ، ٠) وتمس المستوى الإحداثى س ع

(١٠) تكون متحدة المركز مع الكرة التى معادلتها :
س^2 + ص^2 + ع^2 − ٦ س + ٢ ص − ٤ ع = ٢ وطول نصف قطرها ضعف نصف قطر الكرة المعطاة.

(١١) طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس مستويات الإحداثيات علمًا بأن إحداثيات المركز موجبة.

٣ عين مركز وطول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

(١) (س − ٣)^2 + (ص − ٥)^2 + (ع + ٢)^2 − ٢٥ = صفر وأوجد حجمها.

(٢) س^2 + ص^2 + ع^2 = ١٨

(٣) س^2 + ص^2 + ع^2 + ٤ س − ٢ ص − ٦ ع + ١١ = ٠

(٤) س^2 + ص^2 + ع^2 = ٦ ع

(٥) ٢س^2 + ٣ ص^2 + ٣ ع^2 − ٣ س − ٩ ص − ٦ ع + ٣ = ٠ وأوجد مساحة سطحها.

(٦) س^2 + ص^2 + ع^2 − ٢ س + ٤ ص = ٠

٤ إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الكرة التى معادلتها :
س^2 + ص^2 + ع^2 − ٤ س + ٢ ص − ٦ ع − ٦٧ = ٠ حيث أ(−٦ ، ٣ ، ٢)
أوجد : إحداثيات نقطة ب

«(١٠ ، −٥ ، ٤)»

٥ متى تمثل المعادلة : س^2 + ص^2 + ع^2 + أ س + ب ص + ح ع − ء = ٠
معادلة كرة حيث أ ، ب ، ح ، ء ∈ ح ؟

٣٧٣



الوحدة 1

● فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

٦ إذا كان : $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ١$

، $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ٤$ معادلتا كرتين

أوجد البُعد بين مركزى الكرتين وبيِّن أن الكرتين غير متقاطعتين.

«١٠ وحدات»

٧ إذا كانت الكرتان $(س - ٣)^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ١٦$

، $(س + ١)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ك)^{٢} = ٢٥$ متماستين

فأوجد : قيمة ك

٨ أوجد معادلة الكرة التى :

(١) يقع مركزها على المحور ع ويبعد ٣ وحدات عن المستوى الإحداثى س ص وطول نصف قطرها وحدتان طول.

(٢) تمس مستوى إحداثى ومركزها (٣ ، ٠ ، ٠)

(٣) تمس المستوى الإحداثى ص ع ومركزها (-٣ ، ٢ ، ٤)

(٤) مركزها (-٣ ، -٣ ، ٥) وتمس مستويات الإحداثيات س ع ، ص ع

(٥) مركزها النقطة (٣ ، -٢ ، ٤) وتمس المستوى الإحداثى الذى معادلته ع = ٣

(٦) تمر بالنقط أ (-٥ ، -٤ ، ١) ، ب (٣ ، ٤ ، -٥) ، ح (٠ ، ٠ ، ٤) ، ء (٠ ، ٠ ، ٠)

(٧) تمر بالنقاط (٤ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٤) ويكون طول نصف قطرها أصغر ما يمكن.

(٨) تمس المستويات س ع ، س ص ، ص ع فى النقط أ ، ب ، ح على الترتيب ، أء قطر فيها حيث ء (٢ ، ٦ ، ٢)

٩ إذا قطع المحور س الكرة $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ١٤$ فى النقطتين أ ، ب أوجد : طول $\overline{أب}$

«٤ وحدات»

١٠ أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها على المحور ص والتى تمر بالنقطتين (١ ، ٣ ، ٢) ، (-٢ ، ٤ ، ٢)

١١ أوجد معادلة الكرة التى يقع مركزها فى المستوى س ع والتى تمر بالنقاط أ (٠ ، ٨ ، ٠) ، ب (٤ ، ٦ ، ٢) ، ح (٠ ، ١٢ ، ٤)

١٢ إذا كان محورا الإحداثيات س ، ص يقطعان الكرة التى معادلتها : $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع - ١٢)^{٢} = ١٦٩$

أوجد مساحة المقطع الناتج من الكرة والمستوى س ص

«٢٥ π وحدة مربعة»

١٣ كرة مركزها (ل - ٢ ، م + ١ ، ٤) ، وطول نصف قطرها ٣ وحدات تمس المستويين س ع ، ص ع أوجد قيم كل من : ل ، م

«٥ أو ١ ، -١ أو -٤ ، ٢»

١٤ أوجد معادلة الكرة التى تمس الأجزاء الموجبة من محاور الإحداثيات وطول نصف قطرها $٤\sqrt{٢}$ وحدة طول.

١٥ إذا كان مركز الكرة التى تمس محاور الإحداثيات هو $(أ ، ٢\sqrt{٢} ، ٢\sqrt{٢})$ فأوجد قيمة أ ثم اكتب معادلة الكرة.

مسائل تقيس مهارات التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) معادلة الكرة التى مركزها (٣ ، م - ١ ، ٥) وتمس محورى الإحداثيات س ، ص هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٣س - ٣ص + ٥ع = ٣٤$

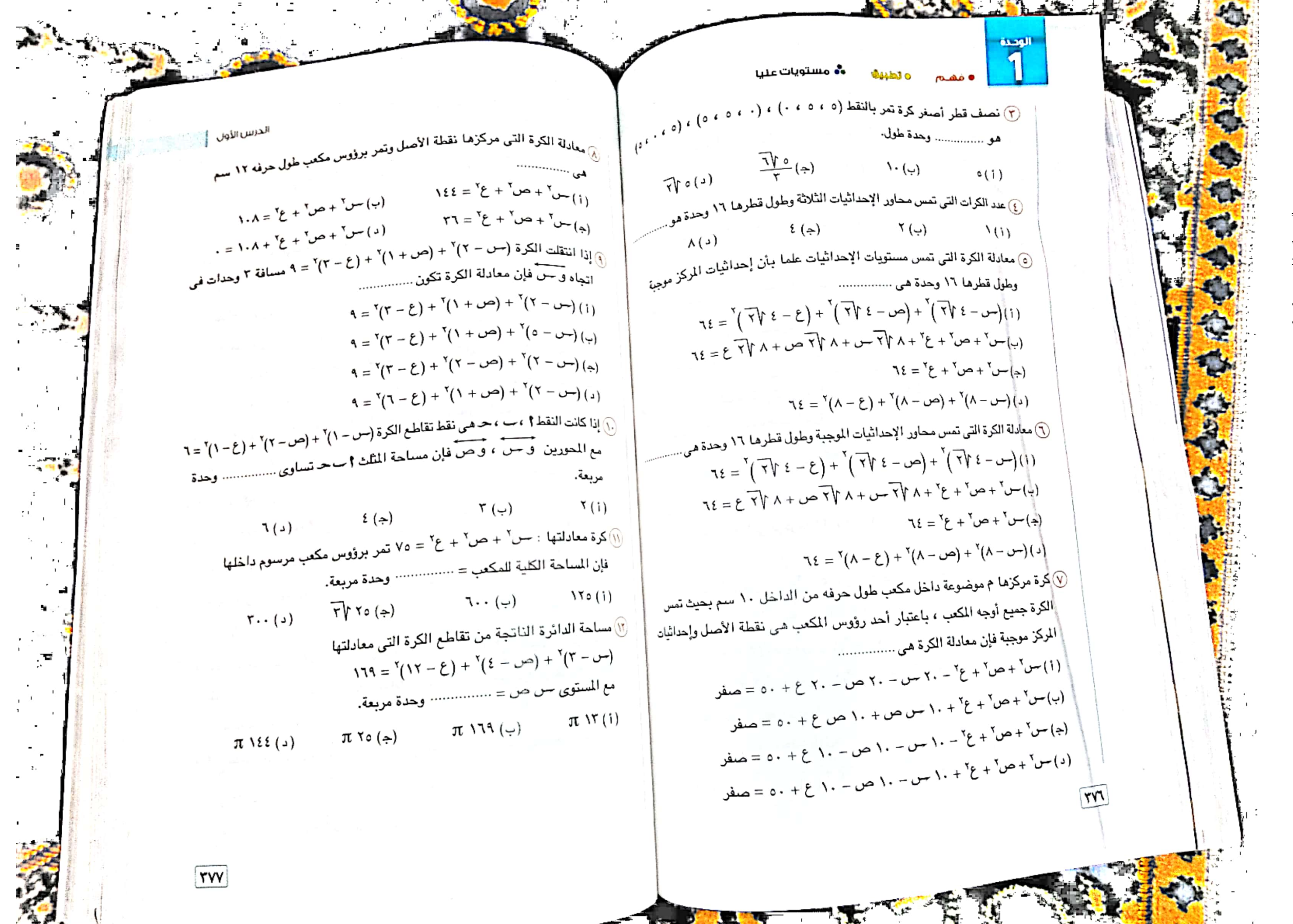
(ب) $(س - ٣)^{٢} + (ص \pm ٣)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٣٤$

(ج) $(س + ٣)^{٢} + (ص \pm ٣)^{٢} + (ع + ٥)^{٢} = ٣٤$

(د) $(س \pm ٣)^{٢} + (ص \pm ٣)^{٢} + (ع \pm ٥)^{٢} = ٣٤$

(٢) نصف قطر أصغر كرة تقع عليها النقاط (٥ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٥) ، (٠ ، ٥ ، ٠) هو .... وحدة طول.

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ (ج) $٥\sqrt{٣}$ (د) ٥



③ نصف قطر أصغر كرة تمر بالنقط (٥ ، ٥ ، ٠) ، (٠ ، ٥ ، ٥) ، (٥ ، ٠ ، ٥) هو .... وحدة طول.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) $\frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $٥\sqrt{٢}$

④ عدد الكرات التى تمس محاور الإحداثيات الثلاثة وطول قطرها ١٦ وحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

⑤ معادلة الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات علما بأن إحداثيات المركز موجبة وطول قطرها ١٦ وحدة هى ....

(أ) $(\text{س} - ٤\sqrt{٢})^٢ + (\text{ص} - ٤\sqrt{٢})^٢ + (\text{ع} - ٤\sqrt{٢})^٢ = ٦٤$

(ب) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٨\sqrt{٢}\,\text{س} + ٨\sqrt{٢}\,\text{ص} + ٨\sqrt{٢}\,\text{ع} = ٦٤$

(ج) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ٦٤$

(د) $(\text{س} - ٨)^٢ + (\text{ص} - ٨)^٢ + (\text{ع} - ٨)^٢ = ٦٤$

⑥ معادلة الكرة التى تمس محاور الإحداثيات الموجبة وطول قطرها ١٦ وحدة هى ....

(أ) $(\text{س} - ٤\sqrt{٢})^٢ + (\text{ص} - ٤\sqrt{٢})^٢ + (\text{ع} - ٤\sqrt{٢})^٢ = ٦٤$

(ب) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٨\sqrt{٢}\,\text{س} + ٨\sqrt{٢}\,\text{ص} + ٨\sqrt{٢}\,\text{ع} = ٦٤$

(ج) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ٦٤$

(د) $(\text{س} - ٨)^٢ + (\text{ص} - ٨)^٢ + (\text{ع} - ٨)^٢ = ٦٤$

⑦ كرة مركزها م موضوعة داخل مكعب طول حرفه من الداخل ١٠ سم بحيث تمس الكرة جميع أوجه المكعب ، باعتبار أحد رؤوس المكعب هى نقطة الأصل وإحداثيات المركز موجبة فإن معادلة الكرة هى ....

(أ) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ - ٢٠\,\text{س} - ٢٠\,\text{ص} - ٢٠\,\text{ع} + ٥٠ = \text{صفر}$

(ب) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ١٠\,\text{س ص} + ١٠\,\text{ص ع} + ٥٠ = \text{صفر}$

(ج) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ - ١٠\,\text{س} - ١٠\,\text{ص} - ١٠\,\text{ع} + ٥٠ = \text{صفر}$

(د) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ١٠\,\text{س} - ١٠\,\text{ص} - ١٠\,\text{ع} + ٥٠ = \text{صفر}$

⑧ معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر برؤوس مكعب طول حرفه ١٢ سم هى ....

(أ) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ١٤٤$ (ب) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ١٠٨$

(ج) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ٣٦$ (د) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ١٠٨ = ٠$

⑨ إذا انتقلت الكرة $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ٩$ مسافة ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ فإن معادلة الكرة تكون ....

(أ) $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ٩$

(ب) $(\text{س} - ٥)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ٩$

(ج) $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ + (\text{ع} - ٣)^٢ = ٩$

(د) $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٦)^٢ = ٩$

⑩ إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ هى نقط تقاطع الكرة $(\text{س} - ١)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ + (\text{ع} - ١)^٢ = ٦$ مع المحورين $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ص}}$ فإن مساحة المثلث أ ب حـ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦

⑪ كرة معادلتها : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ٧٥$ تمر برؤوس مكعب مرسوم داخلها فإن المساحة الكلية للمكعب = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢٥ (ب) ٦٠٠ (ج) $٢٥\sqrt{٣}$ (د) ٣٠٠

⑫ مساحة الدائرة الناتجة من تقاطع الكرة التى معادلتها $(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} - ٤)^٢ + (\text{ع} - ١٢)^٢ = ١٦٩$ مع المستوى س ص = ... وحدة مربعة.

(أ) ١٢π (ب) ١٦٩π (ج) ٢٥π (د) ١٤٤π

الدرس 2

المتجهات فى الفراغ

- **القطعة المستقيمة الموجهة :**

تحدد القطعة المستقيمة الموجهة بثلاثة عناصر:

(١) نقطة البداية.

(٢) نقطة النهاية.

(٣) الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

أى أن : القطعة المستقيمة الموجهة هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه

فمثلًا : أ (سـ١ ، ص١ ، ع١) نقطة البداية ، ب (سـ٢ ، ص٢ ، ع٢) نقطة النهاية

واتجاهها هو اتجاه أب→ ومعيارها "‖أب→‖" يعرف بطول أب→

ونعبر عن مقدارها واتجاهها معًا بالرمز أب→

- **متجه الموضع فى الفراغ :**

يتحدد موضع أى نقطة أ (أس ، أص ، أع) فى الفراغ بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠ ، ٠) بالقطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة أ واتجاهها وأ→

- متجه الموضع لنقطة أ فى الفراغ هو وأ→ = (أس ، أص ، أع) وحيث أن كل متجهات الموضع تنسب لنقطة الأصل و فإنه يمكن كتابة أ→ بدلًا من وأ→ للتعبير عن متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل.

- أس تسمى مركبة المتجه أ→ فى اتجاه محور س
- أص تسمى مركبة المتجه أ→ فى اتجاه محور ص
- أع تسمى مركبة المتجه أ→ فى اتجاه محور ع

- **معيار المتجه :**

هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التى تمثل المتجه فإذا كان : أ→ = (أس ، أص ، أع)

∵ أ→ هو القطعة المستقيمة الموجهة من نقطة الأصل «و» إلى النقطة «أ» ومن قانون البُعد بين نقطتين :

∴ طول أ→ ويرمز له بالرمز ‖أ→‖ = $\sqrt{(أ_س - ٠)^٢ + (أ_ص - ٠)^٢ + (أ_ع - ٠)^٢}$

أى أن : $‖أ→‖ = \sqrt{أ_س^٢ + أ_ص^٢ + أ_ع^٢}$

فمثلًا : إذا كان : أ→ = (−٢ ، ١ ، ٢)

فإن : ‖أ→‖ = $\sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ + (٢)^٢}$ = ٣ وحدات طول.

- **جمع المتجهات فى الفراغ :**

إذا كان : أ→ = (أس ، أص ، أع) ، ب→ = (بس ، بص ، بع)

فإن : حـ→ = أ→ + ب→ = (أس + بس ، أص + بص ، أع + بع) = (حـس ، حـص ، حـع)

فمثلًا : إذا كان : أ→ = (−٢ ، ٣ ، ٥) ، ب→ = (٤ ، −٣ ، ٢)

فإن : أ→ + ب→ = (−٢ ، ٣ ، ٥) + (٤ ، −٣ ، ٢) = (٢ ، ٠ ، ٧)

- **خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ :**

(١) خاصية الانغلاق : لكل أ→ ، ب→ ∈ ح٣ يكون : أ→ + ب→ ∈ ح٣

(٢) خاصية الإبدال : لأى متجهين أ→ ، ب→ يكون : أ→ + ب→ = ب→ + أ→

(٣) خاصية الدمج أو التجميع : لأى ثلاثة متجهات أ→ ، ب→ ، حـ→ يكون :

أ→ + (ب→ + حـ→) = (أ→ + ب→) + حـ→ = أ→ + ب→ + حـ→

(٤) خاصية وجود العنصر المحايد : لأى متجه أ→ يوجد متجه صفرى و→ = (٠ ، ٠ ، ٠)

حيث : أ→ + و→ = و→ + أ→ = أ→ ويسمى المتجه و→ = (٠ ، ٠ ، ٠) ∈ ح٣ بالمحايد الجمعى فى ح٣

⑤ **خاصية توفر المعكوسات الجمعية :** لكل متجه $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ يوجد متجه $(-\overrightarrow{أ}) = (-أ_س ، -أ_ص ، -أ_ع)$ حيث : $\overrightarrow{أ} + (-\overrightarrow{أ}) = (-\overrightarrow{أ}) + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و}$ (المتجه الصفرى)

والمتجه $(-\overrightarrow{أ})$ يسمى المعكوس الجمعى للمتجه $\overrightarrow{أ}$

⑥ **خاصية الحذف :** لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$

إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ}$ فإن : $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن : $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| \leq \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

- **ضرب المتجه فى عدد حقيقى :**

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) \in ح^3$ وكان $ك \in ح$

فإن : $ك \overrightarrow{أ} = ك (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) = (ك أ_س ، ك أ_ص ، ك أ_ع) \in ح^3$

فمثلاً : إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٤ ، -٢ ، ٥)$ فإن :

- $٣ \overrightarrow{أ} = (١٢ ، -٦ ، ١٥)$
- $\frac{١}{٢} \overrightarrow{أ} = (٢ ، -١ ، \frac{٥}{٢})$

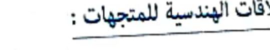
- **خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى :**

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب} \in ح^3$ ، $ك$ ، $ل \in ح$ فإن :

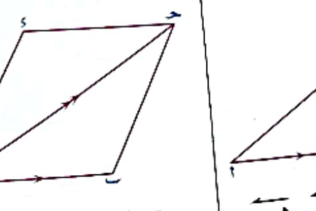
① **خاصية التوزيع :** • $ك (\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}) = ك \overrightarrow{أ} + ك \overrightarrow{ب}$ • $(ك + ل) \overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{أ} + ل \overrightarrow{أ}$

② **خاصية الدمج (التجميع) :** $ك (ل \overrightarrow{أ}) = (ك ل) \overrightarrow{أ} = ل (ك \overrightarrow{أ})$

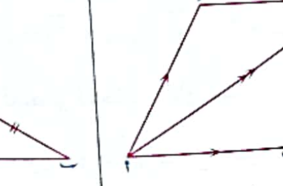
③ **خاصية الحذف :** إذا كانت $ك \neq ٠$ وكان $ك \overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$

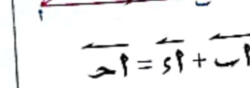


- **العلاقات الهندسية للمتجهات :**

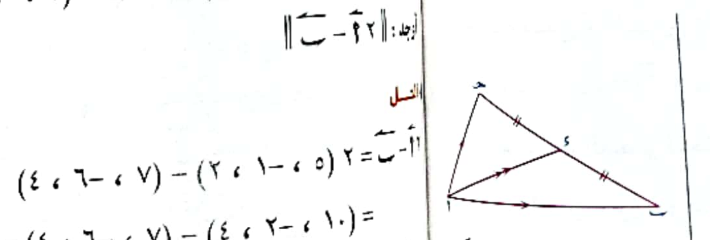


$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بحـ} = \overrightarrow{أحـ}$





$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء} = \overrightarrow{أحـ}$



$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ} = ٢ \overrightarrow{أء}$

مثال ①

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٥ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{حـ} = (-٤ ، ٢ ، ٦)$

فأوجد كلًا من المتجهات الآتية :

① $٣ \overrightarrow{أ} - ٢ \overrightarrow{ب}$ ② $\frac{١}{٢} (٤ \overrightarrow{أ} - ٢ \overrightarrow{ب} + ٣ \overrightarrow{حـ})$

③ $٣ \overrightarrow{و} - ٢ (\overrightarrow{حـ} + ٢ \overrightarrow{أ})$ «حيث $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفرى»

الحل

① $٣ \overrightarrow{أ} - ٢ \overrightarrow{ب} = ٣ (٣ ، -١ ، ٢) - ٢ (٢ ، ٥ ، -٣)$

$= (٩ ، -٣ ، ٦) + (-٤ ، -١٠ ، ٦) = (٥ ، -١٣ ، ١٢)$

② $\frac{١}{٢} (٤ \overrightarrow{أ} - ٢ \overrightarrow{ب} + ٣ \overrightarrow{حـ})$

$= \frac{١}{٢} [٤ (٣ ، -١ ، ٢) - ٢ (٢ ، ٥ ، -٣) + ٣ (-٤ ، ٢ ، ٦)]$

$= \frac{١}{٢} [(١٢ ، -٤ ، ٨) + (-٤ ، -١٠ ، ٦) + (-١٢ ، ٦ ، ١٨)]$

$= \frac{١}{٢} (-٤ ، -٨ ، ٣٢) = (-٢ ، -٤ ، ١٦)$

③ $٣ \overrightarrow{و} - ٢ (\overrightarrow{حـ} + ٢ \overrightarrow{أ}) = ٣ (٠ ، ٠ ، ٠) - ٢ [(-٤ ، ٢ ، ٦) + ٢ (٣ ، -١ ، ٢)]$

$= -٢ [(-٤ ، ٢ ، ٦) + (٦ ، -٢ ، ٤)]$

$= -٢ (٥ ، -١ ، ١٢) = (-١٠ ، ٢ ، -٢٤)$

مثال ②

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٥ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٧ ، -٦ ، ٤)$

أوجد : $\|٢ \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\|$

الحل

$٢ \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = ٢ (٥ ، -١ ، ٢) - (٧ ، -٦ ، ٤)$

$= (١٠ ، -٢ ، ٤) - (٧ ، -٦ ، ٤) = (٣ ، ٤ ، ٠)$

$\therefore \|٢ \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٣^2 + ٤^2 + ٠^2} = ٥$ وحدة طول.

مثال ③

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، ٠ ، −٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٣ ، ك + ١)

وكان : ‖$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$‖ = ٧ وحدة طول أوجد : ك

الحل

$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (−١ ، ٠ ، −٦) + (٣ ، ٣ ، ك + ١) = (٢ ، ٣ ، ك − ٥)

، ∵ ‖$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$‖ = ٧   ∴ (٢)^{٢} + (٣)^{٢} + (ك − ٥)^{٢} = ٧^{٢}

∴ ٤ + ٩ + ك^{٢} − ١٠ ك + ٢٥ = ٤٩   ∴ ك^{٢} − ١٠ ك − ١١ = صفر

∴ (ك + ١) (ك − ١١) = صفر   ∴ ك = −١ أ، ك = ١١

ملاحظة

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى الفراغ ، م عدد حقيقى ≠ صفر

وكان : ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ‖م $\overrightarrow{أ}$‖   فإن : ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = | م | . ‖$\overrightarrow{أ}$‖

فمثلًا : إذا كان : • ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ‖−٣ $\overrightarrow{أ}$‖   فإن : ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ٣ ‖$\overrightarrow{أ}$‖

• ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ‖٥ $\overrightarrow{أ}$‖   فإن : ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ٥ ‖$\overrightarrow{أ}$‖

• **تساوى المتجهات فى الفراغ :**

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = ($ب_{س}$ ، $ب_{ص}$ ، $ب_{ع}$)

فإن : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ إذا و فقط إذا كان : $أ_{س}$ = $ب_{س}$ ، $أ_{ص}$ = $ب_{ص}$ ، $أ_{ع}$ = $ب_{ع}$

فمثلًا : إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، م ، ن + ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ل ، −٣ ، ٢ ن + ١)

وكان : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$

فإن : ل = ٢ ، م = −٣ ، ن + ٥ = ٢ ن + ١   ∴ ن = ٢

مثال ④

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −١ ، −٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{ح}$ = (−٨ ، −٢ ، −١٢)

عبر عن : $\overrightarrow{ح}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

الحل

نفرض أن $\overrightarrow{ح}$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ل $\overrightarrow{ب}$ حيث ك ، ل ∈ ح*

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ك (٢ ، −١ ، −٣) + ل (٤ ، ٠ ، ٢)

= (٢ ك ، −ك ، −٣ ك) + (٤ ل ، ٠ ، ٢ ل)

∴ (−٨ ، −٢ ، −١٢) = (٢ ك + ٤ ل ، −ك ، −٣ ك + ٢ ل)

∴ −٢ = −ك   ∴ ك = ٢   ، ٢ ك + ٤ ل = −٨

∴ ٢ (٢) + ٤ ل = −٨   ∴ ٤ ل = −١٢   ∴ ل = −٣

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ٢ $\overrightarrow{أ}$ − ٣ $\overrightarrow{ب}$

• **متجه الوحدة :**

هو المتجه الذى معياره وحدة الأطوال.

فمثلًا : $\overrightarrow{أ}$ = $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٢}{٥} ، \frac{٢\sqrt{٣}}{٥}\right)$ متجه وحدة.

لأن : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = $\sqrt{\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{-٢}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}\right)^{٢}}$ = ١

• **متجهات الوحدة الأساسية ($\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$) :**

هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل ومعيارها وحدة الأطوال واتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س ، ص ، ع على الترتيب أى أنه لدينا ثلاثة متجهات وحدة أساسية :

① **متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{س}$:**

هو متجه الموضع للنقطة (١ ، ٠ ، ٠) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور س

② **متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ص}$:**

هو متجه الموضع للنقطة (٠ ، ١ ، ٠) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور ص

③ **متجه الوحدة الأساسى $\overrightarrow{ع}$:**

هو متجه الموضع للنقطة (٠ ، ٠ ، ١) ومعياره الوحدة واتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور ع

* لاحظ أن : ‖$\overrightarrow{س}$‖ = ‖$\overrightarrow{ص}$‖ = ‖$\overrightarrow{ع}$‖ = ١

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية :

إذا كان $\vec{أ}$ متجهًا فى الفراغ ثلاثى الأبعاد $(\vec{أ} \in ح^3)$

حيث $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$

$\therefore \vec{أ} = (أ_س ، ٠ ، ٠) + (٠ ، أ_ص ، ٠) + (٠ ، ٠ ، أ_ع)$ (من تعريف الجمع)

$\therefore \vec{أ} = أ_س (١ ، ٠ ، ٠) + أ_ص (٠ ، ١ ، ٠) + أ_ع (٠ ، ٠ ، ١)$ (من تعريف الضرب فى عدد حقيقى)

$$\therefore \boxed{\vec{أ} = أ_س \overrightarrow{س} + أ_ص \overrightarrow{ص} + أ_ع \overrightarrow{ع}}$$

ويستخدم التكوين السابق للتعبير عن أى متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

فمثلًا : $\vec{ب} = (-٥ ، ٧ ، \sqrt{٣}) = -٥ \overrightarrow{س} + ٧ \overrightarrow{ص} + \sqrt{٣} \overrightarrow{ع}$

مثال ٥

إذا كان : $\vec{أ} = (-٨ ، ٥ ، ٩)$ ، $\vec{ب} = (١ ، -٢ ، ٣)$

عبر عن : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

ثم أوجد : $\vec{ح} = \vec{أ} - ٢ \vec{ب}$ وأوجد معياره.

الحل

$\vec{أ} = -٨ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص} + ٩ \overrightarrow{ع}$ ، $\vec{ب} = \overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص} + ٣ \overrightarrow{ع}$

، $\vec{ح} = \vec{أ} - ٢ \vec{ب}$

$= (-٨ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص} + ٩ \overrightarrow{ع}) - ٢ (\overrightarrow{س} - ٢ \overrightarrow{ص} + ٣ \overrightarrow{ع})$

$= (-٨ - ٢) \overrightarrow{س} + (٥ + ٦) \overrightarrow{ص} + (٩ - ٩) \overrightarrow{ع}$

$= -١٠ \overrightarrow{س} + ١١ \overrightarrow{ص}$

$\therefore \| \vec{ح} \| = \sqrt{(-١٠)^2 + (١١)^2 + (صفر)^2} = \sqrt{٢٢١}$ وحدة طول.

مثال ٦

إذا كان : $\vec{أ} = -\overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص} + ك \overrightarrow{ع}$ وكان $\vec{ب} = \frac{١}{٣} \vec{أ}$ هو متجه وحدة أوجد : ك

الحل

$\because \vec{ب} = \frac{١}{٣} \vec{أ}$ $\therefore \vec{ب} = \frac{-١}{٣} \overrightarrow{س} + \frac{٢}{٣} \overrightarrow{ص} + \frac{ك}{٣} \overrightarrow{ع}$

$\because \vec{ب}$ هو متجه وحدة. $\therefore \| \vec{ب} \| = ١$

$\therefore \left(\frac{-١}{٣}\right)^2 + \left(\frac{٢}{٣}\right)^2 + \left(\frac{ك}{٣}\right)^2 = ١$ $\therefore \frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + \frac{ك^2}{٩} = ١$

$\therefore \frac{ك^2}{٩} = ١ - \frac{٥}{٩} = \frac{٤}{٩}$ $\therefore ك^2 = ٤$

$\therefore ك = \pm ٢$

- **التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها :**

بفرض أن $أ (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $ب (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$

نقطتان فى الفراغ متجها موضعيهما $\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ على الترتيب :

فإن المتجه الممثل للقطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب هو

$\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{و ب} - \overrightarrow{و أ}$

أى أن : $\boxed{\overrightarrow{أ ب} = \vec{ب} - \vec{أ}}$

فمثلًا : إذا كان : $\vec{أ} = (-٣ ، ٤ ، ٢)$ ، $\vec{ب} = (٥ ، ٠ ، ٧)$

فإن : $\overrightarrow{أ ب} = \vec{ب} - \vec{أ} = (٥ ، ٠ ، ٧) - (-٣ ، ٤ ، ٢) = (٨ ، -٤ ، ٥)$

، $\overrightarrow{ب أ} = \vec{أ} - \vec{ب} = (-٣ ، ٤ ، ٢) - (٥ ، ٠ ، ٧) = (-٨ ، ٤ ، -٥)$

أى أن : $\boxed{\overrightarrow{أ ب} = - \overrightarrow{ب أ}}$

- **متجه الوحدة فى اتجاه معلوم :**

إذا كان المتجه $\vec{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع) \in ح^3$

فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{أ}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ى_أ}$ يعطى بالعلاقة : $\boxed{\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\vec{أ}}{\| \vec{أ} \|}}$

فمثلًا : إذا كان : $\vec{أ} = (-٢ ، ٢ ، -١)$ فإن : $\| \vec{أ} \| = \sqrt{(-٢)^2 + (٢)^2 + (-١)^2} = ٣$

$\therefore$ متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{أ} = \overrightarrow{ى_أ} = \frac{\vec{أ}}{\| \vec{أ} \|} = \frac{(-٢ ، ٢ ، -١)}{٣} = \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣}\right)$

تذكر أن :

سبق لك دراسة الصورة القطبية لمتجه فى المستوى الإحداثى $ح^2$ وهى $\overrightarrow{أ} = (\|\overrightarrow{أ}\| ، \theta)$

حيث θ هى قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ مع الاتجاه الموجب للمحور س

ومنها فإن : $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حتا } \theta \, \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حا } \theta \, \overrightarrow{ص}$

وإذا كانت : $\theta_{س}$ هى الزاوية التى يصنعها المتجه مع المحور س

، $\theta_{ص}$ هى الزاوية التى يصنعها المتجه مع المحور ص

فإن : حا $\theta_{س}$ = حتا $\theta_{ص}$

ومنها فإن الصورة الكارتيزية للمتجه : $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حتا } \theta_{س} \, \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حتا } \theta_{ص} \, \overrightarrow{ص}$

- **زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ :**

*** زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى الفراغ :**

هى قياسات الزوايا $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ التى يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة للمحاور س ، ص ، ع على الترتيب

حيث كل من $\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع} \in [\cdot ، \pi]$

*** جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى الفراغ :**

هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ أى (حتا $\theta_{س}$ ، حتا $\theta_{ص}$ ، حتا $\theta_{ع}$)

$\therefore \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حتا } \theta_{س} \, \overrightarrow{س} + \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حتا } \theta_{ص} \, \overrightarrow{ص} + \|\overrightarrow{أ}\| \text{ حتا } \theta_{ع} \, \overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\| (\text{حتا } \theta_{س} \, \overrightarrow{س} + \text{حتا } \theta_{ص} \, \overrightarrow{ص} + \text{حتا } \theta_{ع} \, \overrightarrow{ع})$

$\therefore \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \text{حتا } \theta_{س} \, \overrightarrow{س} + \text{حتا } \theta_{ص} \, \overrightarrow{ص} + \text{حتا } \theta_{ع} \, \overrightarrow{ع}$

، $\because \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ هو متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$\therefore$ حتا $\theta_{س} \, \overrightarrow{س}$ + حتا $\theta_{ص} \, \overrightarrow{ص}$ + حتا $\theta_{ع} \, \overrightarrow{ع}$ هو متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$\therefore \text{حتا}^2 \theta_{س} + \text{حتا}^2 \theta_{ص} + \text{حتا}^2 \theta_{ع} = 1$

ملاحظات

- زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أب}$ (لا يمر بنقطة الأصل) فى الفراغ هى قياسات الزوايا التى يصنعها متجه يمر بنقطة الأصل موازيًا للمتجه $\overrightarrow{أب}$
- جيوب تمام الاتجاه لأى متجه هى مركبات متجه الوحدة فى اتجاهه
  أى هى : $\left(\frac{أ_{س}}{\|\overrightarrow{أ}\|} ، \frac{أ_{ص}}{\|\overrightarrow{أ}\|} ، \frac{أ_{ع}}{\|\overrightarrow{أ}\|} \right)$
- جيوب تمام الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع أو أى متجه فى اتجاه أى منهم هى (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١) على الترتيب.
- زوايا اتجاه المحاور س ، ص ، ع الموجبة أو أى متجه فى اتجاه أى منهم هى (٠° ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٩٠° ، ٠°) على الترتيب.
- إذا كانت : $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$
  فإن : $(\pi - \theta_{س} ، \pi - \theta_{ص} ، \pi - \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $-\overrightarrow{أ}$
  تعميم : إذا كانت $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن
  ① $(\theta_{س} ، \theta_{ص} ، \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه ك $\overrightarrow{أ}$ حيث ك > صفر
  ② $(\pi - \theta_{س} ، \pi - \theta_{ص} ، \pi - \theta_{ع})$ هى زوايا الاتجاه للمتجه ك $\overrightarrow{أ}$ حيث ك < صفر
- إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات الموجبة
  أى أن : $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$ فإن : حتا $\theta_{س}$ = حتا $\theta_{ص}$ = حتا $\theta_{ع}$ = حتا θ
  ، $\because \text{حتا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta + \text{حتا}^2 \theta = 1$ $\therefore 3 \text{ حتا}^2 \theta = 1$ $\therefore \text{حتا}^2 \theta = \frac{1}{3}$
  $\therefore \text{حتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها $\theta \simeq 54° \, 44' \, 8''$
  أ، حتا $\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها $\theta \simeq 125° \, 15' \, 52''$
- مجموع قياس أى زاويتين من زوايا الاتجاه أكبر من أو يساوى ٩٠°
- إذا كان مجموع قياسى زاويتى اتجاه ٩٠° فإن قياس الزاوية الثالثة ٩٠°.

مثال ٧

أوجد جيوب تمام الاتجاه وزوايا الاتجاه للمتجه : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})$

الحل

$\because \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٢)^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٤$ ، $\therefore \overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{(٢ ، -٢ ، ٢\sqrt{٢})}{٤}$

$\therefore$ جتا $\theta_{س} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، جتا $\theta_{ص} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$ ، جتا $\theta_{ع} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٤} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$\therefore$ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$

، زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(٦٠° ، ١٢٠° ، ٤٥°)$

مثال ٨

إذا كانت : $(١٣٥° ، ٦٠° ، \theta)$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

أوجد : θ ، وإذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ أوجد : $\overrightarrow{أ}$

الحل

$\because (١٣٥° ، ٦٠° ، \theta)$ هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

$\therefore$ جتا^٢ $١٣٥°$ + جتا^٢ $٦٠°$ + جتا^٢ $\theta = ١$ $\qquad \therefore \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} +$ جتا^٢ $\theta = ١$

$\therefore$ جتا^٢ $\theta = \frac{١}{٤}$

$\therefore$ جتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ومنها $\theta = ٦٠°$ $\qquad$ أ، جتا $\theta = -\frac{١}{٢}$ ومنها $\theta = ١٢٠°$

$\therefore$ زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(١٣٥° ، ٦٠° ، ٦٠°)$ أ، $(١٣٥° ، ٦٠° ، ١٢٠°)$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ٦$ جتا $١٣٥° \overrightarrow{س} + ٦$ جتا $٦٠° \overrightarrow{ص} + ٦$ جتا $٦٠° \overrightarrow{ع}$

$= -٣\sqrt{٢} \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص} + ٣ \overrightarrow{ع}$

أ، $\overrightarrow{أ} = ٦$ جتا $١٣٥° \overrightarrow{س} + ٦$ جتا $٦٠° \overrightarrow{ص} + ٦$ جتا $١٢٠° \overrightarrow{ع}$

$= -٣\sqrt{٢} \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص} - ٣ \overrightarrow{ع}$

مثال ٩

فى الشكل المقابل :

متجه $\overrightarrow{أ}$ معياره ١٠ وحدات

① عبر عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

② أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

الحل

① نحلل $\overrightarrow{أ}$ إلى مركبتين : الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{وع}$

ومقدارها $أ_{ع} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا $\theta_{ع} = ١٠$ جتا $٤٠° \simeq ٧,٦٦$

والثانية تقع فى المستوى الإحداثى س ص

$أ_{س ص} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جا $\theta_{ع} = ١٠$ جا $٤٠° \simeq ٦,٤٢٨$

الآن نحلل المركبة $أ_{س ص}$ إلى مركبتين : الأولى فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$

ومقدارها $أ_{س} = أ_{س ص}$ جتا $٧٠° = ٦,٤٢٨$ جتا $٧٠° \simeq ٢,٢$

والثانية فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ ومقدارها $أ_{ص} = أ_{س ص}$ جا $٧٠° = ٦,٤٢٨$ جا $٧٠° \simeq ٦,٠٤$

وبذلك تكون الصورة الكارتيزية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى :

$\overrightarrow{أ} = أ_{س} \overrightarrow{س} + أ_{ص} \overrightarrow{ص} + أ_{ع} \overrightarrow{ع} = ٢,٢ \overrightarrow{س} + ٦,٠٤ \overrightarrow{ص} + ٧,٦٦ \overrightarrow{ع}$

② ولإيجاد زوايا الاتجاه نوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{ى_أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = \frac{١}{١٠}(٢,٢ \overrightarrow{س} + ٦,٠٤ \overrightarrow{ص} + ٧,٦٦ \overrightarrow{ع})$

$= ٠,٢٢ \overrightarrow{س} + ٠,٦٠٤ \overrightarrow{ص} + ٠,٧٦٦ \overrightarrow{ع}$

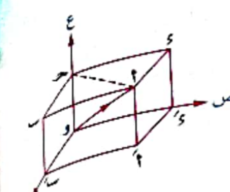
$\therefore$ جتا $\theta_{س} = ٠,٢٢$ $\qquad$ ومنها $\qquad \theta_{س} =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٢٢) \simeq ٧٧,٣°$

، جتا $\theta_{ص} = ٠,٦٠٤$ $\qquad$ ومنها $\qquad \theta_{ص} =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٦٠٤) \simeq ٥٢,٨٤°$

، جتا $\theta_{ع} = ٠,٧٦٦$ $\qquad$ ومنها $\qquad \theta_{ع} =$ جتا$^{-١}$ $(٠,٧٦٦) \simeq ٤٠°$

مثال ١٠

الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات أبعاده (ءحـ = ٨ وحدات طول ، بحـ = ٦ وحدات طول ، وحـ = ٥ وحدات طول) قوة $\vec{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن تعمل فى اتجاه القطر و$\vec{أ}$



(١) عبر عن القوة $\vec{ق}$ بالصورة الجبرية

(٢) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\vec{ق}$

الحل

$\because \vec{أ} = ٦\,\vec{س} + ٨\,\vec{ص} + ٥\,\vec{ع}$

$\therefore \|\vec{أ}\| = \sqrt{٣٦ + ٦٤ + ٢٥} = ٥\sqrt{٥}$ وحدة طول.

$\therefore$ متجه الوحدة فى اتجاه $\vec{أ} = \dfrac{\vec{أ}}{\|\vec{أ}\|} = \dfrac{٦}{٥\sqrt{٥}}\,\vec{س} + \dfrac{٨}{٥\sqrt{٥}}\,\vec{ص} + \dfrac{١}{\sqrt{٥}}\,\vec{ع}$

$\therefore$ يمكن التعبير عن القوة $\vec{ق}$ بالصورة الجبرية كما يلى :

$\vec{ق} = ٢٠٠$ (متجه وحدة فى اتجاه $\vec{أ}$)

$= ٢٠٠ \left(\dfrac{٦}{٥\sqrt{٥}}\,\vec{س} + \dfrac{٨}{٥\sqrt{٥}}\,\vec{ص} + \dfrac{١}{\sqrt{٥}}\,\vec{ع} \right)$

$= ٤٨\sqrt{٥}\,\vec{س} + ٦٤\sqrt{٥}\,\vec{ص} + ٤٠\sqrt{٥}\,\vec{ع}$

$\because$ جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\vec{أ} = \left(\dfrac{٦}{٥\sqrt{٥}} ، \dfrac{٨}{٥\sqrt{٥}} ، \dfrac{١}{\sqrt{٥}} \right)$

$\therefore$ قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\vec{ق}$ = (٣٧ ٣٢ ٥٧° ، ٤٥ ١٨ ٤٤° ، ٦ ٢٦ ٦٣°)

تمارين 2 على المتجهات فى الفراغ

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسى

١ عبر عن المتجهات (−١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، −١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، −١) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

٢ أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

(١) $\vec{أ} = (٢ ، −١ ، ٠)$ (٢) $\vec{أ} = (١ ، ٢ ، −٢)$

(٣) $\vec{ب} = ٥\,\vec{س} - ٤\,\vec{ص} + ٢\sqrt{٢}\,\vec{ع}$ (٤) $\vec{حـ} = \vec{ع}$

(٥) $\vec{ب} = ٣\,\vec{س} + ٤\,\vec{ص}$

$\sqrt{٥}$ ، ٣ ، ٧ ، ١ ، ٥

٣ إذا كان : $\vec{أ} = -٣\,\vec{س} - ٥\,\vec{ص} + \vec{ع}$ ، $\vec{ب} = ٤\,\vec{ص} + ٨\,\vec{ع}$ أوجد :

(١) $\vec{أ} - \frac{١}{٢}\,\vec{ب}$ (٢) $٣\,\vec{ب} - ٢\,\vec{أ}$

(٣) $\vec{أ} - ٣\,\vec{ب}$ (٤) $٢\,\vec{أ} + ٣\,\vec{ب}$

٤ إذا كان $\vec{أ} = (٢ ، −٣ ، ١)$ ، $\vec{ب} = (٤ ، −٢ ، ٠)$ ، $\vec{حـ} = (−٦ ، ٠ ، ٣)$

أوجد كلًا من المتجهات الآتية :

(١) $\vec{أ} + \vec{ب}$ (٢) $٣\,\vec{أ} - \frac{١}{٣}\,\vec{حـ}$ (٣) $\frac{٣}{٢}\,\vec{ب} + \frac{٢}{٣}\,\vec{حـ}$

٥ إذا كان : $\vec{حـ} = (٢ ، −٣ ، ١)$ ، $\vec{ء} = (٠ ، ٢ ، −٢)$

(١) أوجد : $٥\,\vec{حـ} - ٢\,\vec{ء}$

(٢) إذا كان : $٣\,\vec{أ} - ٤\,\vec{ء} = \vec{حـ}$ فأوجد : $\vec{أ}$

٦ إذا كان : $\vec{حـ} = (٤ ، −١ ، ٢)$ ، $\vec{ء} = (−٣ ، ٤ ، ٥)$ ، $\vec{هـ} = (−٥ ، ١ ، ٣)$

أوجد المتجه $\vec{أ}$ الذى يحقق المعادلة : $٢\,\vec{أ} = ٢\,\vec{حـ} - ٣\,\vec{ء} + ٢\,\vec{هـ}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : أ = (−٣ ، ٧ ، ٨) فإن : ‖ أ ‖ = ...

(أ) ١٢ (ب) √٢٢٢ (جـ) √١٢٢ (د) ١٠

② (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان : أ = (٣ ، −٢ ، م) وكان : ‖ أ ‖ = √٢٢

فإن : م = ...

(أ) ٢١ (ب) ±٩ (جـ) ±٣ (د) ١٧

③ إذا كان : أ = (−٢ ، ك ، ١) وكان : ‖ أ ‖ = ٣ وحدات فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ±٢ (د) √١٤

④ إذا كان : أ = (٢ ، −٣ ، ٥) ، ب = (−٢ ، ٠ ، ٤)

فإن : ٢ أ − ٢ ب = ...

(أ) (١٠ ، −٩ ، ٧) (ب) (٤ ، −٩ ، ١٩)

(جـ) (١٥ ، ١١ ، ٨) (د) (١١ ، ١٢ ، ٤)

⑤ إذا كان : أ = (−١ ، ٥ ، −٢) ، ب = (٣ ، ١ ، ١) وكان : أ + ب + جـ = س

فإن : جـ = ...

(أ) س + ٦ ص − ع (ب) − س − ٦ ص + ع

(جـ) س + ٤ ص − ٣ ع (د) س + ٤ ص − ع

⑥ إذا كان : أ = (١ ، −١ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٢ ، −٣) ، جـ = (−٢ ، ١ ، ٠)

فإن : ‖ ٣ أ − ب + جـ ‖ = ...

(أ) ٨√٣ (ب) ١١ (جـ) ١٢ (د) ٧√٢

⑦ إذا كان : أ (−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب (٤ ، ٢ ، −٥) فإن : أ ب = ...

(أ) (−٦ ، −٢ ، ٨) (ب) (٢ ، ٢ ، −٢)

(جـ) (٦ ، ٢ ، −٨) (د) (١ ، ١ ، −١)

⑧ إذا كان : أ = (٢ ، ٣√٣ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٢√٣ ، √٦)

فإن : ‖ أ ب ‖ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) √١٣ (د) ٥

⑨ (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : أ ب = −٣ س + ٢ ص + ٧ ع ، ب جـ = ص + ٥ ع

فإن : ‖ أ جـ ‖ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

⑩ (دور أول ٢٠١٨) إذا كان : أ = (−٢ ، ٤ ، ٦) ، ب = (ك ، ٠ ، ٣)

حيث ك ∈ ص⁺ وكان : ‖ أ ب ‖ = ٧ فإن قيمة : ك = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

⑪ إذا كان : ‖ ك (٣ ، −٣√٣ ، ٠) ‖ = ١ فإن : ك = ...

(أ) ١/٦ (ب) ± ١/٦ (جـ) ٦ (د) ±٦

⑫ إذا كان : أ = (−٩ ، ١ ، ٨) ، ب = (−٦ ، −٣ ، −٤)

فإن متجه الوحدة فى اتجاه أ ب = ...

(أ) (٣/١٣ ، ٤/١٣ ، ١٢/١٣) (ب) (٣/١٣ ، −٤/١٣ ، −١٢/١٣)

(جـ) (−٣/١٣ ، ٤/١٣ ، ١٢/١٣) (د) (−٣/١٣ ، −٤/١٣ ، −١٢/١٣)

⑬ المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات الآتية هو ....

(أ) (−٣ ، ٢ ، ٢) (ب) (١/٢ ، ١/٣ ، ١/٤)

(جـ) (٣/٥ ، −٤/٥ ، ٠) (د) (−١/١٢ ، −٣/١٢ ، ٢/١٢)

⑭ (دور ثان ٢٠١٧) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ = (−٢ ، ١ ، ٢) هى ....

(أ) (−٢ ، ١ ، ٢) (ب) (−٢/٣ ، ١/٣ ، ٢/٣)

(جـ) (٥/−٢ ، ٥ ، ٥/٢) (د) (−١ ، ١ ، ١)

(١٥) (دور ثان ٢٠١٧) متجه زوايا الاتجاه له $(45°, 45°, \theta)$ فإن : θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ٠° (د) ٦٠°

(١٦) إذا كان : $(30°, 70°, \theta)$ هى زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٢٦٠° (د) ٦٨,٦°

(١٧) إذا كان : $\|4\overrightarrow{أ}\| = \|2ك\overrightarrow{أ}\|$ فإن : ك = ...

(أ) ± 1 (ب) $\pm \frac{3}{4}$ (جـ) $\pm \frac{4}{3}$ (د) $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

(١٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (1, 2, -4)$ ، $\overrightarrow{ب} = (1, 1, ك - 1)$

وكان $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = 7$ وحدة طولية فإن : ك = ...

(أ) ± 6 (ب) ٢ أو -11 (جـ) ١١ أو -1 (د) ± 7

(١٩) إذا كان : $\overrightarrow{أب} = (2, 5, -1)$ ، $\overrightarrow{أ} = (2, 3, 1)$ فإن : $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) $(4, 8, 0)$ (ب) $(4, 0, 8)$ (جـ) $(0, 4, 8)$ (د) $\overrightarrow{و}$

(٢٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}, ك)$ متجه وحدة فإن : قيمة ك = ...

أو ....

(أ) ± 3 (ب) $\pm \sqrt{3}$ (جـ) $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$

(٢١) المتجه $\overrightarrow{أ} = 3\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - 2\overrightarrow{ع}$ يصنع زاوية قياسها .... (لأقرب درجة)

مع الاتجاه الموجب لمحور س

(أ) ٧٤° (ب) ٧٨° (جـ) ١٤٣° (د) ٣٧°

(٢٢) المتجه $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{س} + 2\overrightarrow{ص}$ يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور ع

(أ) صفر (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٣) إذا كان قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{أ} = (2, 4, ك)$ مع الاتجاه الموجب للمحور ص يساوى ٤٥° فإن : ك = ...

(أ) ± 5 (ب) ± 2 (جـ) $\pm 2\sqrt{3}$ (د) $\pm \sqrt{3}$

(٢٤) إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى $(30°, 120°, 90°)$

فإن المتجه $\overrightarrow{أ}$ يقع فى ....

(أ) المستوى س ع (ب) المستوى ص ع

(جـ) المستوى س ص (د) أتجاه $\overrightarrow{وس}$

(٢٥) قياسات زوايا الاتجاه الموجب للمحور ص هى ....

(أ) $(90°, 90°, 0°)$ (ب) $(0°, 90°, 90°)$

(جـ) $(0°, 90°, 0°)$ (د) $(90°, 0°, 90°)$

(٢٦) جيوب التمام الاتجاهية للاتجاه السالب للمحور ع هى ....

(أ) $(0, 0, 1)$ (ب) $(0, 1, 0)$ (جـ) $(0, 0, -1)$ (د) $(0, -1, 0)$

(٢٧) المتجه الذى معياره ٦ وحدات طولية وجيوب التمام الاتجاهيه له $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ هو ....

(أ) $(-3, 0, 3\sqrt{3})$ (ب) $(-3, 3, 3\sqrt{3})$

(جـ) $(\frac{-3}{2}, 0, 2\sqrt{3})$ (د) $(-1, 0, \sqrt{3})$

(٢٨) إذا كانت : $(60°, \theta_{ص}, 45°)$ هى قياسات زوايا الاتجاه لمتجه ما

فإن : $\theta_{ص}$ = ...

(أ) ٣٠° أو ٦٠° (ب) ٦٠° أو ١٥٠° (جـ) ٦٠° أو ١٢٠° (د) ٣٠° أو ١٥٠°

(٢٩) إذا كانت جيوب تمام الاتجاه للمتجه هى $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ فإن زوايا الاتجاه له هى ....

(أ) $(60°, 120°, 135°)$ (ب) $(60°, 120°, 45°)$

(جـ) $(30°, 150°, 45°)$ (د) $(120°, 60°, 45°)$

(٣٠) إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى (٤٥° ، ١٣٥° ، ٩٠°)
فإن متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) $(\sqrt{٢} ، -\sqrt{٢} ، ٠)$ (ب) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}} ، ١)$
(ج) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢}} ، ٠)$ (د) $(١ ، -١ ، ٠)$

(٣١) إذا كانت قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى (٤٥° ، ١٢٠° ، ٦٠°)
، $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٢\sqrt{٢}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = ...

(أ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$ (ب) $(١٢ ، -٦\sqrt{٢} ، ٦\sqrt{٢})$
(ج) $(١٢ ، ٦\sqrt{٢} ، -٦\sqrt{٢})$ (د) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢})$

(٣٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢\sqrt{٢} ، ٢ ، -٢)$ فإن المتجه الذى له نفس الزوايا الاتجاهيه هو ....

(أ) $(٨ ، ٠ ، -٤\sqrt{٣})$ (ب) $(٤\sqrt{٢} ، -٤ ، -٤)$
(ج) $(٣\sqrt{٢} ، ٣ ، -٣)$ (د) $(٤ ، ٢ ، \sqrt{٣})$

(٣٣) متجه الوحدة لمتجه يوازى المستوى ص ع يمكن أن يكون ....

(أ) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠)$ (ب) $(٠ ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$
(ج) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠ ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$ (د) $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠ ، ٠)$

(٣٤) إذا كان المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ٤ ، حـ) يوازى المستوى الإحداثى ص ع ، وكان $\|\overrightarrow{ن}\| = ٥$
فإن : $حـ^{٢}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) ١٢ (د) ٢٠

(٣٥) المتجه الذى يصنع زوايا متساوية فى القياس مع الاتجاهات الموجبة للمحاور الإحداثية مما يأتى هو ....

(أ) $(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}})$ (ب) $(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}} ، -\frac{١}{\sqrt{٣}})$
(ج) $(-\sqrt{٣} ، -\sqrt{٣} ، \sqrt{٣})$ (د) $(-١ ، ١ ، -١)$

(٣٦) إذا كانت : حـ منتصف $\overline{أب}$ وكان $\overrightarrow{أحـ} = (٣ ، -٢ ، ٥)$
فإن : $\overrightarrow{حـب}$ = ...

(أ) $(-٣ ، ٢ ، -٥)$ (ب) $(٣ ، -٢ ، ٥)$
(ج) $(\frac{-٣}{٢} ، ١ ، \frac{-٥}{٢})$ (د) $(\frac{٣}{٢} ، -١ ، \frac{٥}{٢})$

(٣٧) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى ، $\overrightarrow{حـ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ فإن أى من العبارات الآتية صحيحة دائمًا ؟

(أ) $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{حـ}\|$ (ب) $\|\overrightarrow{أ}\| > \|\overrightarrow{حـ}\|$
(ج) $\|\overrightarrow{أ}\| < \|\overrightarrow{حـ}\|$ (د) $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{حـ}$

(٣٨) إذا كانت : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات
فإن : $\left\|\frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}\right\| + ٢\left\|\frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}\right\| + ٣\left\|\frac{\overrightarrow{حـ}}{\|\overrightarrow{حـ}\|}\right\|$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨

(٣٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٤ ، ٠ ، ٣)$ فإن ظل الزاوية التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (ج) $\frac{٤}{\sqrt{٧}}$ (د) $\frac{٤}{٧}$

(٤٠) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان جيب تمام الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ١٢ ، ٤) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى $\frac{٣}{١٣}$ فإن : ك = ...
، حيث ك ∈ ح

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٣}$ (ج) $-\sqrt{٣}$ (د) ٣

(٤١) متجه الموضع الذى يقع فى المستوى الإحداثى الموجب س ع ويصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب للمحور س فإن جيوب تمام الاتجاه له هى ....

(أ) $(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠)$ (ب) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢})$
(ج) $(-\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠)$ (د) $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، -\frac{١}{٢})$

(٤٢) متجه الموضع الذى يقع فى المستوى الإحداثى س ص ويصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور ص تكون جيوب تمام الاتجاه له هى ....

(أ) (٠ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) (ب) ($\frac{١}{٢}$ ، $\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ٠)

(جـ) ($\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٠) (د) ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\pm \frac{١}{٢}$ ، ٠)

(٤٣) إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٣$ ، $-١ \le ك \le ٢$ فإن : $\|ك\overrightarrow{أ}\| \in$ ....

(أ) [−٣ ، ٦] (ب) [٠ ، ٦] (جـ) [٣ ، ٦] (د) [١ ، ٦]

(٤٤) المتجه الذى زوايا الاتجاه له (٠ ، ٩٠° ، ٩٠°) ....

(أ) يعمل فى الاتجاه الموجب للمحور ص

(ب) يعمل فى الاتجاه الموجب للمحور س

(جـ) يعمل فى الاتجاه الموجب للمحور ع

(د) يقع فى المستوى الإحداثى ص ع

(٤٥) أى مما يأتى يعبر عن زوايا اتجاه لمتجه فى الفراغ الثلاثى ؟

(أ) (٦٠° ، ٣٠° ، ٣٠°) (ب) (٩٠° ، ٩٠° ، ٦٠°)

(جـ) (١٢٠° ، ١٥٠° ، ٩٠°) (د) (٦٠° ، ٣٠° ، ٠)

(٤٦) كل المتجهات الآتية هى متجهات وحدة ماعدا ....

(أ) ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$) (ب) ($-\frac{٦}{١٠}$ ، $\frac{٢\sqrt{٧}}{١٠}$ ، ٠,٦)

(جـ) (١ ، ١ ، ١) (د) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ، ٠)

(٤٧) إذا كان ل ، هـ ، و هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن : ....

(أ) ل + هـ + و = ١ (ب) ل = هـ = و

(جـ) ل^٢ + هـ^٢ + و^٢ = ١ (د) ل + هـ + و = $\|\overrightarrow{أ}\|$

(٤٨) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ و أَ بَ حَ وَ متوازى مستطيلات وكان :

أ(٤ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٩ ، ٠) ، وَ (٠ ، ٠ ، ٧)

فإن : $\|\overrightarrow{أحَ}\|$ = ...

(أ) $\sqrt{١٣٧}$ (ب) $\sqrt{١٤١}$ (جـ) $\sqrt{١٤٦}$ (د) $\sqrt{١٤٧}$

(٤٩) الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات :

أ(٦ ، ٨ ، ٢٤) فإن :

زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{وأ}$ هى ....

(أ) (٦٠° ، ١٢٠° ، ٤٥°)

(ب) (٥٣° ٨َ ، ٣٦° ٥٢َ ، ٩٠°)

(جـ) (٥٣° ٨َ ، ٩٠° ، ٣٦° ٥٢َ)

(د) (٣٦° ٥٢َ ، ٤٥° ، ٩٠°)

(٥٠) إذا كان (٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°) هى زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه ٢ $\overrightarrow{أ}$ هى ....

(أ) (٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°) (ب) (٦٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠°)

(جـ) (−٣٠° ، −٦٠° ، −٩٠°) (د) (٦٠° ، ١٢٠° ، ٩٠°)

(٥١) إذا كان : (٦٠° ، ١٣٥° ، ٦٠°) هى زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فإن زوايا الاتجاه للمتجه −٢ $\overrightarrow{أ}$ هى ....

(أ) (٦٠° ، ١٣٥° ، ٦٠°) (ب) (١٢٠° ، ٢٧٠° ، ١٢٠°)

(جـ) (٣٠° ، ٤٥° ، ٣٠°) (د) (١٢٠° ، ٤٥° ، ١٢٠°)

(٥٢) أى المتجهات الآتية تمثل متجه وحدة عمودى على المستوى الإحداثى س ص ؟

(أ) $\overleftarrow{س}$ (ب) $\overleftarrow{ص}$ (جـ) $\overrightarrow{ع}$ (د) (٠ ، ٠ ، ٢)

٥٣ إذا كانت: ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هى زوايا اتجاه متجه بحيث $\theta_{س} + \theta_{ص} = ٩٠°$
فأى مما يأتى غير صحيح ؟

(أ) $\theta_{ع} = ٩٠°$

(ب) المتجه يقع فى مستوى الإحداثيات س ص

(جـ) $جا^2 \theta_{س} + جا^2 \theta_{ص} = ١$

(د) المتجه يصنع زوايا متساوية مع محاور الاحداثيات.

٥٤ إذا كانت: ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هى زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ فى الفراغ ثلاثى الأبعاد
فأى مما يأتى خطأ ؟

(١) $\theta_{س} + \theta_{ص} \geq ٩٠°$

(٢) $جا^2\left(\frac{\pi}{٢} - \theta_{س}\right) + جا^2\left(\frac{\pi}{٢} - \theta_{ص}\right) + جا^2\left(\frac{\pi}{٢} - \theta_{ع}\right) = ١$

(٣) ($-\theta_{س}$ ، $-\theta_{ص}$ ، $-\theta_{ع}$) هى زوايا الاتجاه للمتجه $-\vec{أ}$

(٤) $\theta_{س} = \pm جا^{-1}\left(\frac{أ_{س}}{\|\vec{أ}\|}\right)$

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) (٣) ، (٤) فقط.

٨ إذا كان: (٣ل + ٢ ، ٩ ، م − ٤) = (−٤ ، $ن^2$ ، ١٤) فما قيمة: ل ، م ، ن ؟

«−٢ ، ١٨ ، ±٣»

٩ أوجد قيمة: ل ، م ، ن التى تجعل المتجهين $\vec{أ}$ = (ل − ٤ ، $م^2$ − ٣ ، ١)
، $\vec{ب}$ = (٥ ، ١ ، $ن^2$) متساويين.

«٩ ، ±٢ ، ±١»

١٠ إذا كان: (٢س + ١ ، ٥ ، ك + ٤) = (−١ ، $ص^2$ − ٤ ، س + ١)
فما قيمة: س ، ص ، ك ؟

«−١ ، ±٣ ، −٤»

١١ أوجد قيم: ل ، م ، ن فى كل مما يأتى:

(١) ٢(٣ ، م ، ل) + ٣(ن ، −٢ ، ٤) = (٣ ، ٢ ، ٤)

(٢) ل(−٦ ، م ، ٢ن) = ١٢ $\vec{س}$ + ١٠ $\vec{ص}$ − ٤ $\vec{ع}$

(٣) ل(−٢ ، ٣ ، ١) + م(−٣ ، ١ ، ٢) + ن $\vec{ع}$ = (−٨ ، ٥ ، ٨)

١٢ إذا كان: $\vec{أ}$ = (٤ ، ٣ ، ٢) ، $\vec{ب}$ = (−٢ ، ٥ ، −١) ، $\vec{جـ}$ = (٨ ، ١٩ ، ٤)

أوجد: (١) بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كلاً من: $\vec{ب} - \vec{جـ}$ ، ٢($\vec{ب} + \vec{جـ}$)

(٢) $\vec{جـ}$ بدلالة $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

١٣ إذا كان: $\vec{أ}$ = (−٣ ، ٢ ، ١) ، $\vec{ب}$ = (٢ ، ٣ ، ٠) أوجد: $\|\vec{أ}\|$ ، $\|\vec{أ} + \vec{ب}\|$

«$\sqrt{١٤}$ ، $٣\sqrt{٢}$»

١٤ إذا كان: $\vec{أ}$ = (٤ ، −٦ ، ٢) ، ٣($\vec{أ} - \vec{ب}$) = ٧$\vec{ب}$ − ٢$\vec{أ}$ أوجد: $\|\vec{ب}\|$

«$\sqrt{١٤}$»

١٥ إذا كان: أ(−١ ، ٤ ، ٦) ، ب(٢ ، ٥ ، −١) أوجد: $\|\overrightarrow{أب}\|$

«$\sqrt{٥٩}$»

١٦ إذا كان: ك $\|٤\vec{أ}\| = \|-٣\vec{أ}\|$

أوجد قيمة: ك حيث $\vec{أ}$ متجه غير صفرى فى الفراغ الثلاثى.

«$\frac{٣}{٤}$»

١٧ إذا كان: $\|-٨\vec{أ}\|$ = ٥ $\|ك\vec{أ}\|$

أوجد قيمة: ك حيث $\vec{أ}$ متجه غير صفرى فى الفراغ الثلاثى

«$\pm\frac{٨}{٥}$»

١٨ إذا كان: $\vec{أ}$ = (ك ، ٠ ، ٠) ، $\vec{س}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

أثبت أن: $\|\vec{أ}\|$ = |ك| $\|\vec{س}\|$ حيث ك ∈ ح*

١٩ إذا كان: $\vec{أ}$ = (٣ ، −٢ ، ٤) ، $\vec{ب}$ = (−٢ ، ٤ ، ٢) ، $\vec{جـ}$ = (٧ ، ١ ، −٣)
أوجد:

(١) $\|\vec{أ} + ٢\vec{جـ}\|$ (٢) $\|٥\vec{ب} + ٣\vec{أ}\|$ (٣) $\|\vec{أ} + \frac{١}{٢}\vec{ب}\|$

(٤) $\|\vec{أ} + \vec{ب} - ٢\vec{جـ}\|$ (٥) $\|٢\vec{أ} + ٣\vec{ب} - ٤\vec{جـ}\|$

«$\sqrt{٢٩٣}$ ، $\sqrt{٦٨١}$ ، $\sqrt{٢٩}$ ، $\sqrt{٣١٢}$ ، $٦\sqrt{٤١}$»

٢٠ إذا كان : أ = ٢ س − ٢ ص + ع ، ب = − س − ٢ ص أوجد :

(١) ٢ أ − ٣ ب
(٢) ‖ أ + ب ‖ ، ‖ أ ‖ + ‖ ب ‖ ماذا تستنتج ؟

٢١ إذا كان : أ ، ب متجهين فى ح³ هل ‖ أ + ب ‖ = ‖ أ ‖ + ‖ ب ‖ ؟
إذا كان الطرفان غير متساويين أى الطرفين هو الأكبر ؟

٢٢ أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من المتجهات الآتية :

(١) أ = (٨ ، −٤ ، −٨)
(٢) ب = س − ٢ ص − ع
(٣) ح = ٣ س − ٤ ع
(٤) ء = (٢ ، −١ ، ٣)
(٥) هـ = ١٢ س + ٥ ص
(٦) م = (٢ ، ٢ ، −١)

٢٣ إذا كان : أ = (−١ ، ٣ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٢ ، −١) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه :

(١) أ
(٢) ب
(٣) أ ب
(٤) ب أ

٢٤ إذا كان : ح = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ هو متجه وحده فى اتجاه كل من أ ، ب
وكان : ‖ ٣ أ ‖ = ‖ −٥ ب ‖ = ١٥ أوجد كلًّا من : أ ، ب

٢٥ إذا كان : أ متجه وحدة حيث أ = $\left(ك ، \frac{2}{3} ، \frac{2}{3}\right)$ أوجد : ك

«$\pm\frac{1}{3}$»

٢٦ إذا كان المتجهان : ب = $\left(ل ، ٤ م ، \frac{1}{5}\right)$ ، ح = $\frac{-2\sqrt{2}}{5}$ س + $\frac{4}{5}$ ص + $\frac{ن}{5}$ ع
هما متجها وحدة فى اتجاه المتجه أ

(١) أوجد : ل ، م ، ن
(٢) إذا كان : ‖ أ ‖ = ١٥ أوجد : أ

٢٧ أوجد جيوب تمام الاتجاه لكل من المتجهات الآتية :

(١) أ = ٥ س − ٢ ص + $\sqrt{7}$ ع
(٢) ب = (−٢ ، ٢ $\sqrt{2}$ ، ٢)
(٣) ح = ٤ س − ٣ ع
(٤) ء = −٥ ص + ١٢ ع
(٥) هـ = س + ص + ع
(٦) م = ٣ س + ١٢ ص + ٤ ع

١٨ أوجد قياسات زوايا الاتجاه لكل من المتجهات الآتية :

(١) أ = (٨ ، ٦ ، −١٠)
(٢) ح = −٢ س + ٢ ص − ٦ ع
(٣) ء = ٥ س − ٥ ص + ٥ ع
(٤) هـ = ع
(٥) م = س + ص

١٩ أوجد قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه ح = ٣ س − ٤ ص + ٥ ع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

٢٠ إذا كان المتجه أ يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة س ، ص ، ع زوايا قياساتها ٦٠° ، ٨٠° ، θ° حيث θ زاوية حادة.

(١) أوجد قيمة : θ
(٢) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه أ إذا علمت أن : ‖ أ ‖ = ١٢

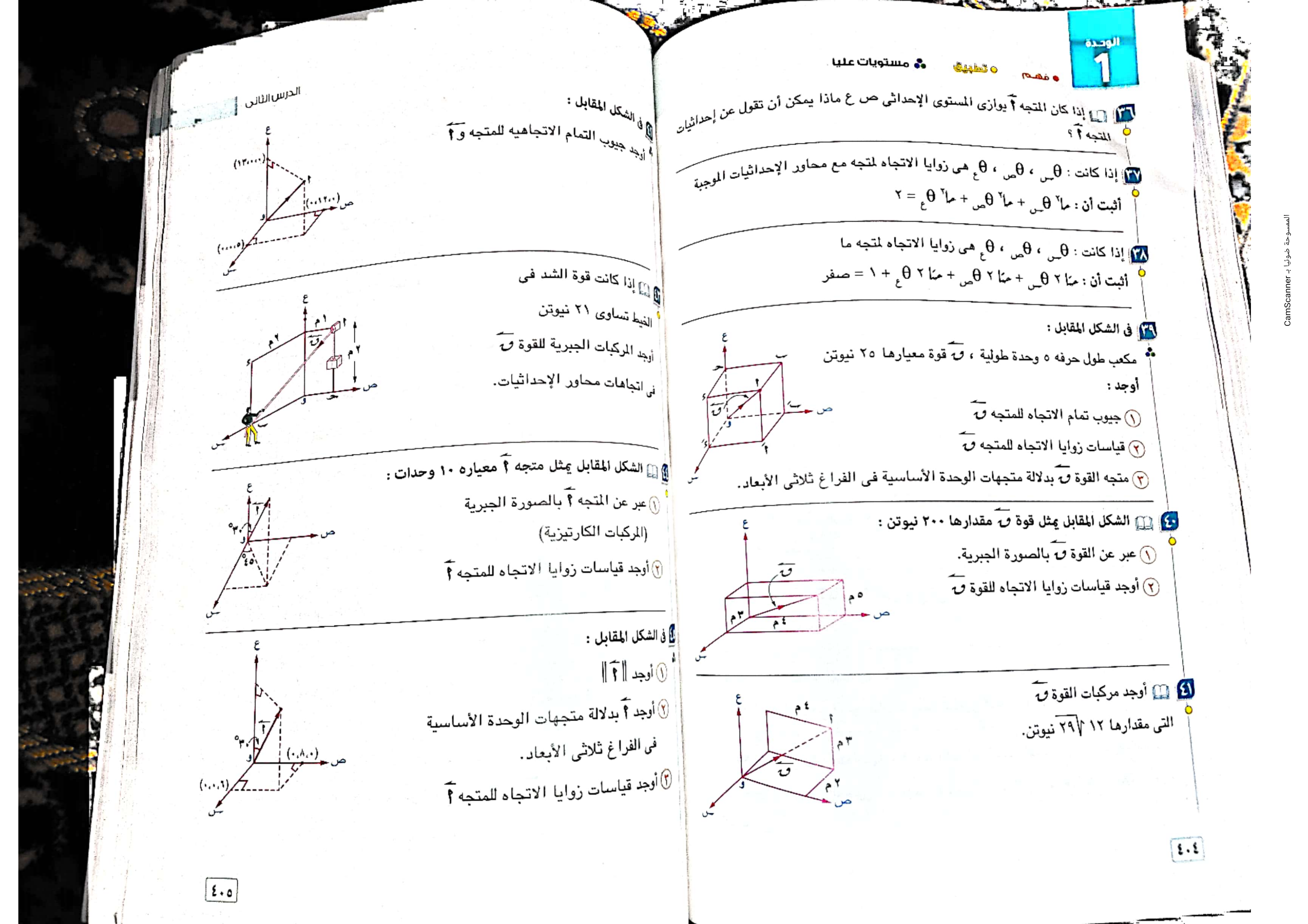
٢١ اذكر زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لكل محور من محاور الإحداثيات الأساسية فى الفراغ ثلاثى الأبعاد.

٢٢ أوجد زوايا الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لمتجه يصنع مع محاور الإحداثيات الموجبة زوايا متساوية فى القياس.

٢٣ أوجد زوايا الاتجاه للمتجه أ الذى يقع فى المستوى الإحداثى ص ع ويصنع زاوية قياسها ١٠° مع المحور ص

٢٤ (دور أول ٢٠١٧) أوجد الصورة الإحداثية للمتجه أ الذى معياره ٢١ $\sqrt{3}$ ويصنع زوايا متساوية القياس مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

٢٥ المتجه أ يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب للمحور س ، أخرى قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب للمحور ص أوجد قياس الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب للمحور ع



٣٦ إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يوازى المستوى الإحداثى ص ع ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه $\overrightarrow{أ}$ ؟

٣٧ إذا كانت : $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ هى زوايا الاتجاه لمتجه مع محاور الإحداثيات الموجبة

أثبت أن : $جا^2 \theta_س + جا^2 \theta_ص + جا^2 \theta_ع = ٢$

٣٨ إذا كانت : $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ هى زوايا الاتجاه لمتجه ما

أثبت أن : $جتا ٢\theta_س + جتا ٢\theta_ص + جتا ٢\theta_ع + ١ =$ صفر

٣٩ فى الشكل المقابل :

مكعب طول حرفه ٥ وحدة طولية ، $\overrightarrow{ق}$ قوة معيارها ٢٥ نيوتن

أوجد :

(١) جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ق}$

(٢) قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{ق}$

(٣) متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ ثلاثى الأبعاد.

٤٠ الشكل المقابل يمثل قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن :

(١) عبر عن القوة $\overrightarrow{ق}$ بالصورة الجبرية.

(٢) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overrightarrow{ق}$

٤١ أوجد مركبات القوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها $١٢ \sqrt{٢٩}$ نيوتن.

فى الشكل المقابل :

أوجد جيوب التمام الاتجاهيه للمتجه $\overrightarrow{وأ}$

إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢١ نيوتن

أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاهات محاور الإحداثيات.

الشكل المقابل يمثل متجه $\overrightarrow{أ}$ معياره ١٠ وحدات :

(١) عبر عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بالصورة الجبرية (المركبات الكارتيزية)

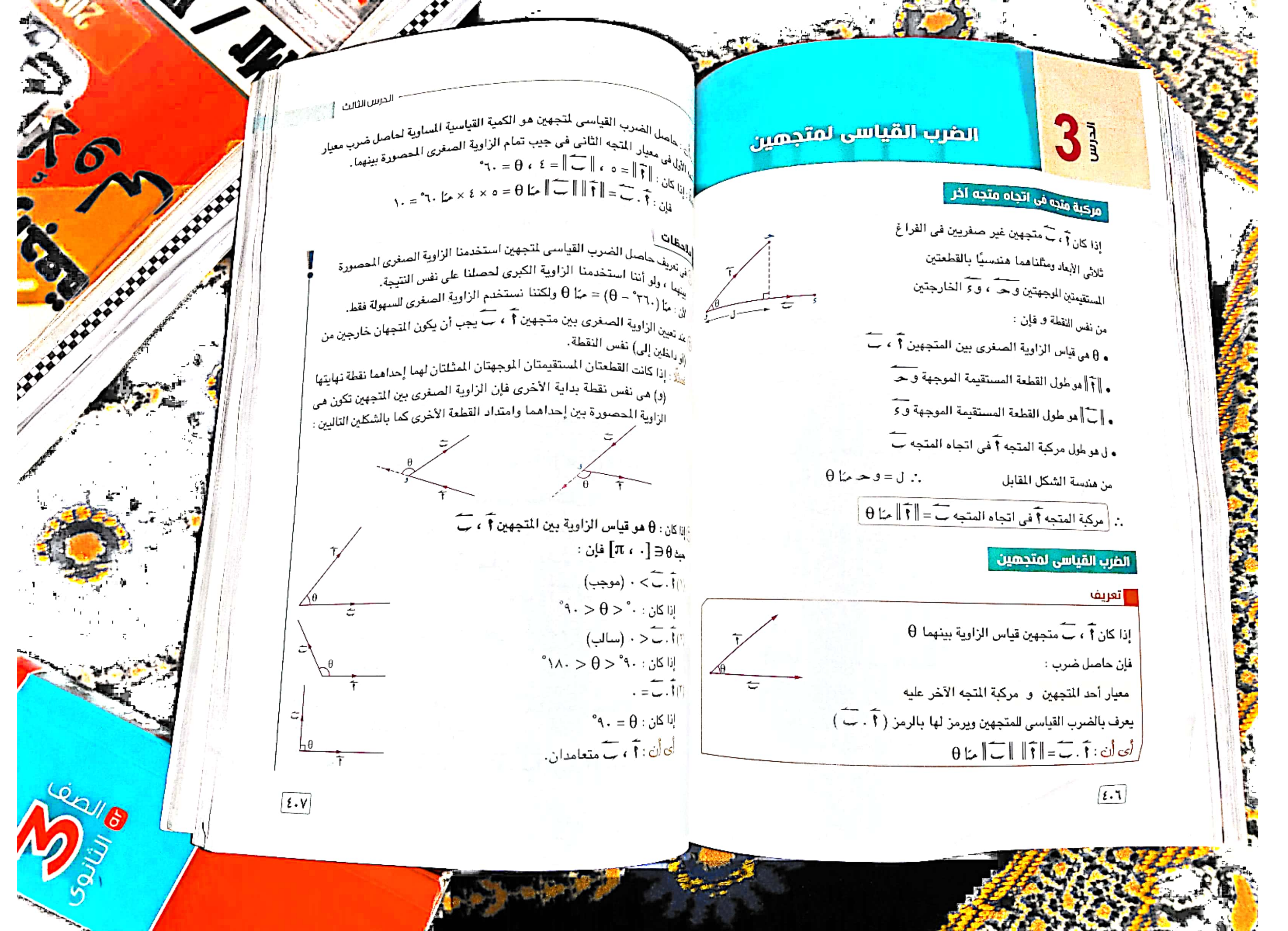
(٢) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

فى الشكل المقابل :

(١) أوجد $\| \overrightarrow{أ} \|$

(٢) أوجد $\overrightarrow{أ}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية فى الفراغ ثلاثى الأبعاد.

(٣) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$



الدرس 3

الضرب القياسى لمتجهين

مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد ومثلناهما هندسيًا بالقطعتين المستقيمتين الموجهتين $\overline{وحـ}$ ، $\overline{وء}$ الخارجتين من نفس النقطة و فإن :

- θ هى قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$
- $\|\overrightarrow{أ}\|$ هو طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overline{وحـ}$
- $\|\overrightarrow{ب}\|$ هو طول القطعة المستقيمة الموجهة $\overline{وء}$
- ل هو طول مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$

من هندسة الشكل المقابل $\therefore$ ل = وحـ جتا θ

$\therefore$ مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ جتا θ

الضرب القياسى لمتجهين

تعريف

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ

فإن حاصل ضرب :

معيار أحد المتجهين و مركبة المتجه الآخر عليه

يعرف بالضرب القياسى للمتجهين ويرمز لها بالرمز ($\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب}$)

أى أن : $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ

أى : حاصل الضرب القياسى لمتجهين هو الكمية القياسية المساوية لحاصل ضرب معيار المتجه الأول فى معيار المتجه الثانى فى جيب تمام الزاوية الصغرى المحصورة بينهما.

مثال : إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٤$ ، $\theta = ٦٠°$

فإن : $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا $\theta = ٥ \times ٤ \times$ جتا $٦٠° = ١٠$

ملاحظات

١ فى تعريف حاصل الضرب القياسى لمتجهين استخدمنا الزاوية الصغرى المحصورة بينهما ، ولو أننا استخدمنا الزاوية الكبرى لحصلنا على نفس النتيجة.

لأن : جتا $(٣٦٠° - \theta)$ = جتا θ ولكننا نستخدم الزاوية الصغرى للسهولة فقط.

٢ عند تعيين الزاوية الصغرى بين متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يجب أن يكون المتجهان خارجين من (أو داخلين إلى) نفس النقطة.

فمثلاً : إذا كانت القطعتان المستقيمتان الموجهتان المثلثان لهما إحداهما نقطة نهايتها (و) هى نفس نقطة بداية الأخرى فإن الزاوية الصغرى بين المتجهين تكون هى الزاوية المحصورة بين إحداهما وامتداد القطعة الأخرى كما بالشكلين التاليين :

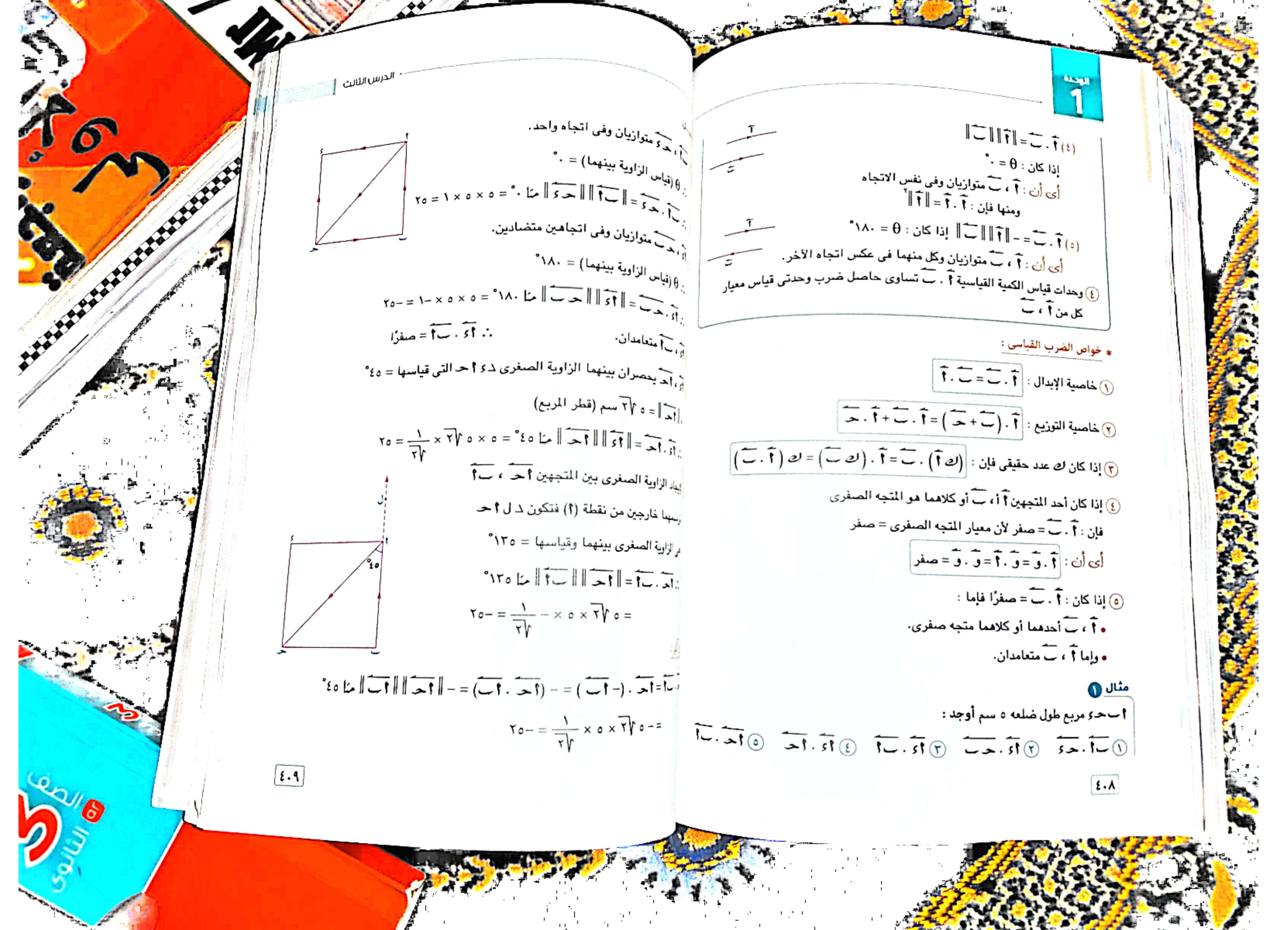
٣ إذا كان : θ هو قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حيث $\theta \in [٠ ، \pi]$ فإن :

(١) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} > ٠$ (موجب) إذا كان : $٠° < \theta < ٩٠°$

(٢) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} < ٠$ (سالب) إذا كان : $٩٠° < \theta < ١٨٠°$

(٣) $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ب} = ٠$ إذا كان : $\theta = ٩٠°$

أى أن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.



(٤) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$

إذا كان : $\theta = ٠°$

أى أن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وفى نفس الاتجاه

ومنها فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢}$

(٥) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = -\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ إذا كان : $\theta = ١٨٠°$

أى أن : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر.

(٤) وحدات قياس الكمية القياسية $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ تساوى حاصل ضرب وحدتى قياس معيار كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

* خواص الضرب القياسى :

(١) خاصية الإبدال : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$

(٢) خاصية التوزيع : $\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ح}) = \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ح}$

(٣) إذا كان ك عدد حقيقى فإن : $(ك\overrightarrow{أ}) \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \cdot (ك\overrightarrow{ب}) = ك(\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب})$

(٤) إذا كان أحد المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ أو كلاهما هو المتجه الصفرى

فإن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر لأن معيار المتجه الصفرى = صفر

أى أن : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{و} \cdot \overrightarrow{و}$ = صفر

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفرًا فإما :

- $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ أحدهما أو كلاهما متجه صفرى.
- وإما $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان.

مثال ①

أ ب ح ء مربع طول ضلعه ٥ سم أوجد :

(١) $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{ءح}$ (٢) $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{بح}$ (٣) $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{بأ}$ (٤) $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{أح}$ (٥) $\overrightarrow{أح} \cdot \overrightarrow{بأ}$

… ، $\overrightarrow{ءح}$ متوازيان وفى اتجاه واحد.

… θ (قياس الزاوية بينهما) = ٠°

… $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{ءح} = \|\overrightarrow{أب}\| \, \|\overrightarrow{ءح}\|$ جتا ٠° $= ٥ \times ٥ \times ١ = ٢٥$

… ، $\overrightarrow{بح}$ متوازيان وفى اتجاهين متضادين.

… θ (قياس الزاوية بينهما) = ١٨٠°

… $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{بح} = \|\overrightarrow{أء}\| \, \|\overrightarrow{بح}\|$ جتا ١٨٠° $= ٥ \times ٥ \times -١ = -٢٥$

… ، $\overrightarrow{بأ}$ متعامدان. $\therefore \overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{بأ}$ = صفرًا

… ، $\overrightarrow{أح}$ يحصران بينهما الزاوية الصغرى ء أ ح التى قياسها = ٤٥°

… $\|\overrightarrow{أح}\| = ٥\sqrt{٢}$ سم (قطر المربع)

… $\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{أح} = \|\overrightarrow{أء}\| \, \|\overrightarrow{أح}\|$ جتا ٤٥° $= ٥ \times ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٢٥$

… إيجاد الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أح}$ ، $\overrightarrow{بأ}$

… رسمهما خارجين من نقطة (أ) فتكون $\angle$ ل أ ح

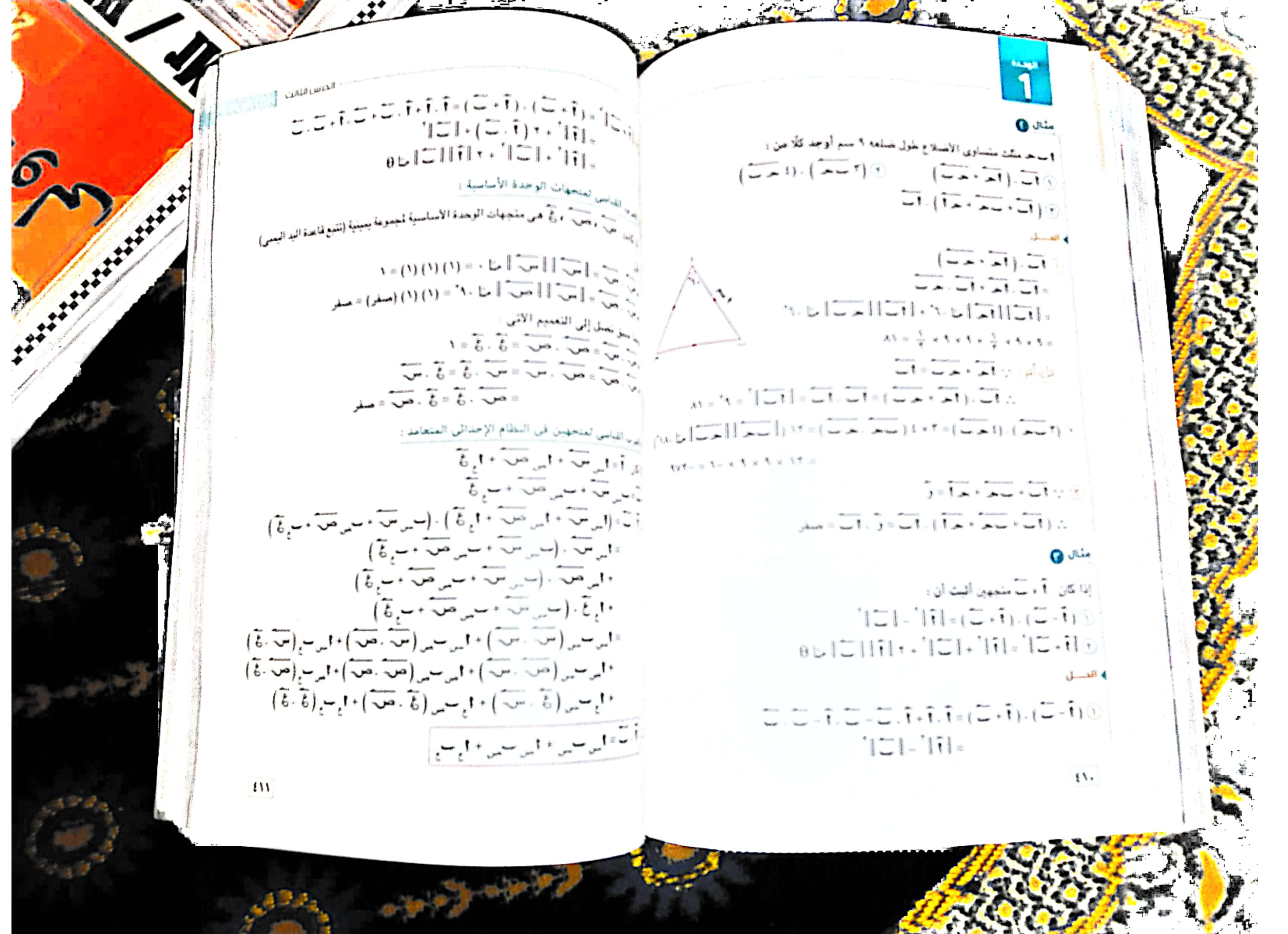
… الزاوية الصغرى بينهما وقياسها = ١٣٥°

… $\overrightarrow{أح} \cdot \overrightarrow{بأ} = \|\overrightarrow{أح}\| \, \|\overrightarrow{بأ}\|$ جتا ١٣٥°

$= ٥\sqrt{٢} \times ٥ \times -\frac{١}{\sqrt{٢}} = -٢٥$

… $\overrightarrow{أح} \cdot (-\overrightarrow{أب}) = -(\overrightarrow{أح} \cdot \overrightarrow{أب}) = -\|\overrightarrow{أح}\| \, \|\overrightarrow{أب}\|$ جتا ٤٥°

$= -٥\sqrt{٢} \times ٥ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -٢٥$



الوحدة 1

مثال 1

أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٩ سم أوجد كلاً من :

(١) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot (\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـب}})$　　(٢) $(٣\,\overrightarrow{\text{بجـ}}) \cdot (٤\,\overrightarrow{\text{جـب}})$

(٣) $(\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـأ}}) \cdot \overrightarrow{\text{أب}}$

الحل

(١) $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot (\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـب}})$

$= \overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـب}}$

$= |\overrightarrow{\text{أب}}||\overrightarrow{\text{أجـ}}| \text{ جتا } ٦٠° + |\overrightarrow{\text{أب}}||\overrightarrow{\text{جـب}}| \text{ جتا } ٦٠°$

$= ٩ \times ٩ \times \frac{١}{٢} + ٩ \times ٩ \times \frac{١}{٢} = ٨١$

حل آخر : $\because \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \cdot (\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{جـب}}) = \overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}} = |\overrightarrow{\text{أب}}|^٢ = ٩^٢ = ٨١$

(٢) $(٣\,\overrightarrow{\text{بجـ}}) \cdot (٤\,\overrightarrow{\text{جـب}}) = ٣ \times ٤ (\overrightarrow{\text{بجـ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـب}}) = ١٢ (|\overrightarrow{\text{بجـ}}||\overrightarrow{\text{جـب}}| \text{ جتا } ١٨٠°)$

$= ١٢ \times ٩ \times ٩ \times -١ = -٩٧٢$

(٣) $\because \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـأ}} = \vec{0}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{جـأ}}) \cdot \overrightarrow{\text{أب}} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{\text{أب}} = \text{صفر}$

مثال 2

إذا كان $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ متجهين أثبت أن :

(١) $(\vec{\text{أ}} - \vec{\text{ب}}) \cdot (\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}) = |\vec{\text{أ}}|^٢ - |\vec{\text{ب}}|^٢$

(٢) $|\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}|^٢ = |\vec{\text{أ}}|^٢ + |\vec{\text{ب}}|^٢ + ٢|\vec{\text{أ}}||\vec{\text{ب}}| \text{ جتا } \theta$

الحل

(١) $(\vec{\text{أ}} - \vec{\text{ب}}) \cdot (\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}) = \vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{أ}} + \vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} - \vec{\text{ب}} \cdot \vec{\text{أ}} - \vec{\text{ب}} \cdot \vec{\text{ب}}$

$= |\vec{\text{أ}}|^٢ - |\vec{\text{ب}}|^٢$

(٢) $|\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}|^٢ = (\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}) \cdot (\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}) = \vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{أ}} + ٢\,\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} + \vec{\text{ب}} \cdot \vec{\text{ب}}$

$= |\vec{\text{أ}}|^٢ + ٢(\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}}) + |\vec{\text{ب}}|^٢$

$= |\vec{\text{أ}}|^٢ + |\vec{\text{ب}}|^٢ + ٢|\vec{\text{أ}}||\vec{\text{ب}}| \text{ جتا } \theta$

الضرب القياسي لمتجهات الوحدة الأساسية :

إذا كانت $\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ع}}$ هي متجهات الوحدة الأساسية لمجموعة يمينية (تتبع قاعدة اليد اليمنى)

$\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{س}} = |\vec{\text{س}}||\vec{\text{س}}| \text{ جتا } ٠ = (١)(١)(١) = ١$

$\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{ص}} = |\vec{\text{س}}||\vec{\text{ص}}| \text{ جتا } ٩٠° = (١)(١)(\text{صفر}) = \text{صفر}$

وبالمثل نصل إلى التعميم الآتي :

$\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \cdot \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}} \cdot \vec{\text{ع}} = ١$

$\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ص}} \cdot \vec{\text{س}} = \vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{ع}} = \vec{\text{ع}} \cdot \vec{\text{س}}$

$= \vec{\text{ص}} \cdot \vec{\text{ع}} = \vec{\text{ع}} \cdot \vec{\text{ص}} = \text{صفر}$

الضرب القياسي لمتجهين في النظام الإحداثي المتعامد :

إذا كان $\vec{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}}$

$\vec{\text{ب}} = \text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}}$

$\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}}) \cdot (\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$

$= \text{أ}_{\text{س}}\vec{\text{س}} \cdot (\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$

$+ \text{أ}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} \cdot (\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$

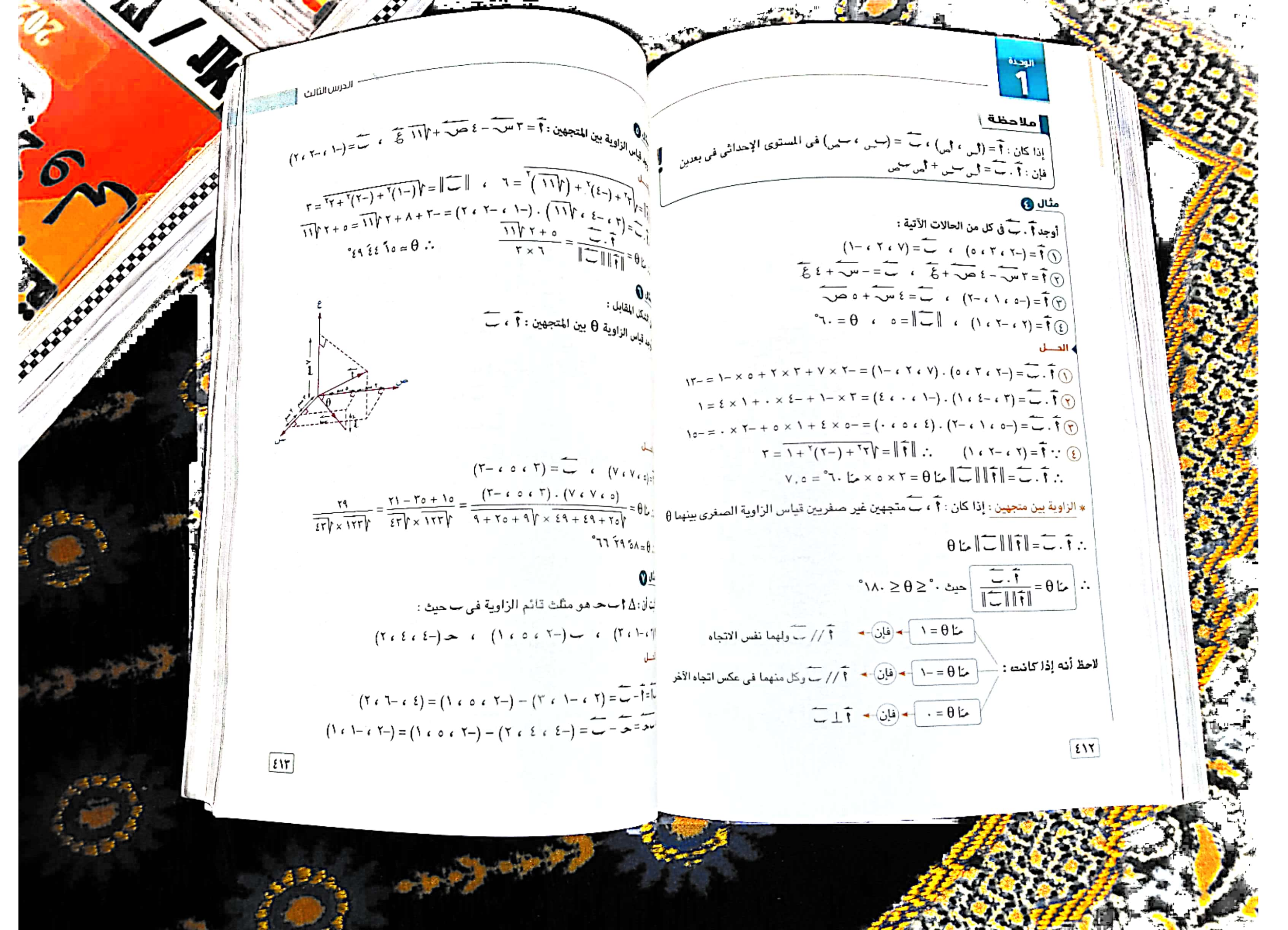
$+ \text{أ}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}} \cdot (\text{ب}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}})$

$= \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}}(\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{س}}) + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ص}}(\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{ص}}) + \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{ع}}(\vec{\text{س}} \cdot \vec{\text{ع}})$

$+ \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{س}}(\vec{\text{ص}} \cdot \vec{\text{س}}) + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}}(\vec{\text{ص}} \cdot \vec{\text{ص}}) + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ع}}(\vec{\text{ص}} \cdot \vec{\text{ع}})$

$+ \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{س}}(\vec{\text{ع}} \cdot \vec{\text{س}}) + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ص}}(\vec{\text{ع}} \cdot \vec{\text{ص}}) + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}(\vec{\text{ع}} \cdot \vec{\text{ع}})$

$\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\text{ب}_{\text{ع}}$



الوحدة 1

ملاحظة

إذا كان: أ = (أس ، أص) ، ب = (بس ، بص) فى المستوى الإحداثى فى بعدين

فإن: أ . ب = أس بس + أص بص

مثال ٤

أوجد أ . ب فى كل من الحالات الآتية:

١) أ = (-٢ ، ٣ ، ٥) ، ب = (٧ ، ٢ ، -١)

٢) أ = ٣س - ٤ص + ع ، ب = -س + ٤ع

٣) أ = (-٥ ، ١ ، -٢) ، ب = ٤س + ٥ص

٤) أ = (٢ ، -٢ ، ١) ، ||ب|| = ٥ ، θ = ٦٠°

الحل

١) أ . ب = (-٢ ، ٣ ، ٥) . (٧ ، ٢ ، -١) = -٢ × ٧ + ٣ × ٢ + ٥ × -١ = -١٣

٢) أ . ب = (٣ ، -٤ ، ١) . (-١ ، ٠ ، ٤) = ٣ × -١ + -٤ × ٠ + ١ × ٤ = ١

٣) أ . ب = (-٥ ، ١ ، -٢) . (٤ ، ٥ ، ٠) = -٥ × ٤ + ١ × ٥ + -٢ × ٠ = -١٥

٤) ∵ أ = (٢ ، -٢ ، ١) ∴ ||أ|| = √(٢² + (-٢)² + ١) = ٣

∴ أ . ب = ||أ|| ||ب|| جتا θ = ٣ × ٥ × جتا ٦٠° = ٧,٥

* **الزاوية بين متجهين:** إذا كان: أ ، ب متجهين غير صفريين قياس الزاوية الصغرى بينهما θ

∴ أ . ب = ||أ|| ||ب|| جتا θ

∴ جتا θ = (أ . ب) / (||أ|| ||ب||) حيث ٠° ≤ θ ≤ ١٨٠°

لاحظ أنه إذا كانت:

- جتا θ = ١ ← فإن ← أ // ب ولهما نفس الاتجاه
- جتا θ = -١ ← فإن ← أ // ب وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر
- جتا θ = ٠ ← فإن ← أ ⊥ ب

مثال ٥: أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: أ = ٣س - ٤ص + √١١ ع ، ب = (-١ ، -٢ ، ٢)

الحل

||أ|| = √(٣² + (-٤)² + (√١١)²) = ٦ ، ||ب|| = √((-١)² + (-٢)² + ٢²) = ٣

أ . ب = (٣ ، -٤ ، √١١) . (-١ ، -٢ ، ٢) = -٣ + ٨ + ٢√١١ = ٥ + ٢√١١

جتا θ = (أ . ب) / (||أ|| ||ب||) = (٥ + ٢√١١) / (٦ × ٣) ∴ θ ≈ ٤٩° ٤٤َ ١٥ً

مثال ٦

فى الشكل المقابل:

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين: أ ، ب

الحل

أ = (٥ ، ٧ ، ٧) ، ب = (٣ ، ٥ ، -٣)

جتا θ = (٥ ، ٧ ، ٧) . (٣ ، ٥ ، -٣) / (√(٢٥ + ٤٩ + ٤٩) × √(٩ + ٢٥ + ٩)) = (١٥ + ٣٥ - ٢١) / (√١٢٣ × √٤٣) = ٢٩ / (√١٢٣ × √٤٣)

∴ θ ≈ ٦٦° ٢٩َ ٥٨ً

مثال ٧

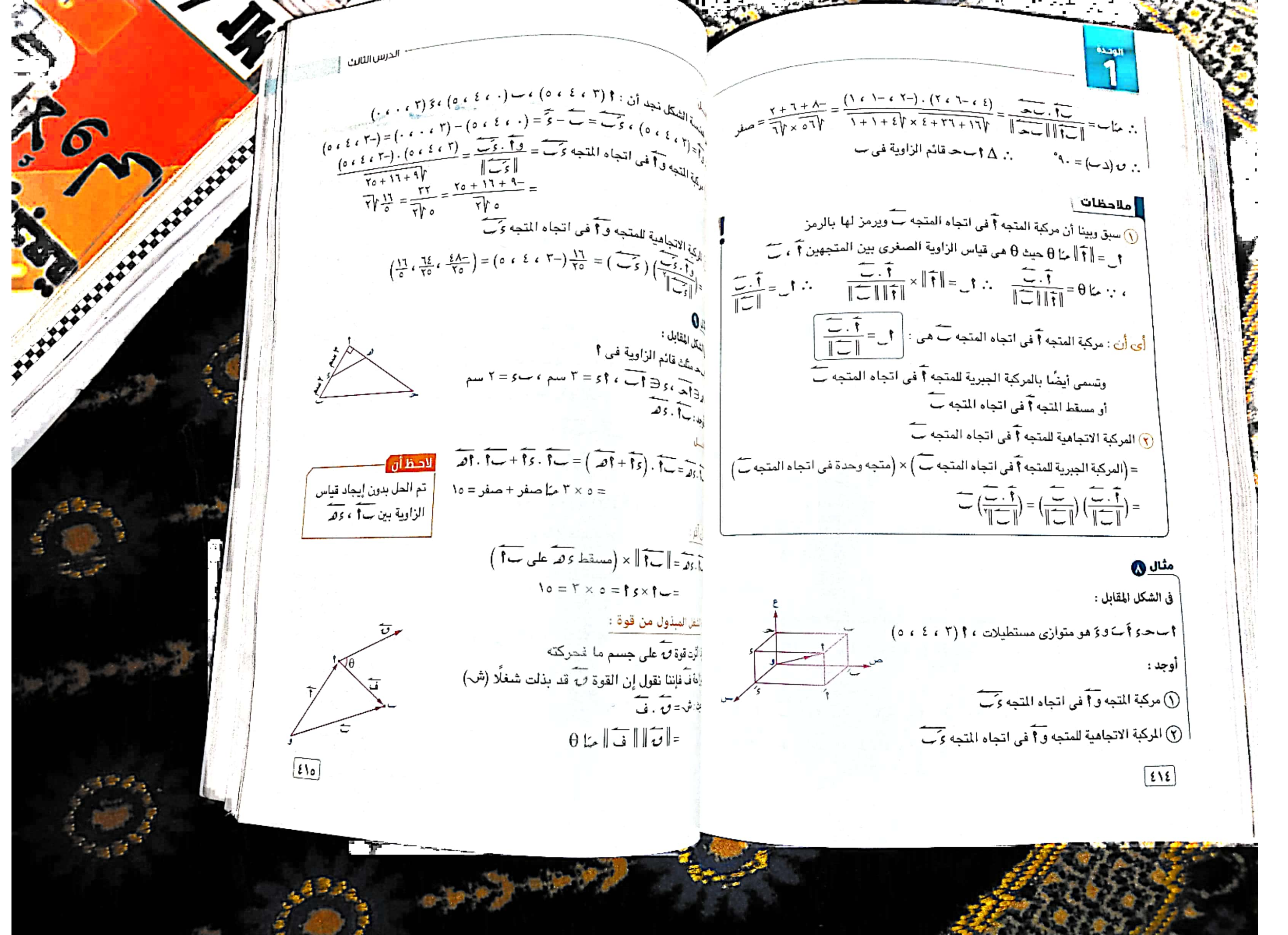
أثبت أن: Δ أ ب حـ هو مثلث قائم الزاوية فى ب حيث:

أ (٢ ، -١ ، ٢) ، ب (-٢ ، ٥ ، ١) ، حـ (-٤ ، ٤ ، ٢)

الحل

أ ب = ب - أ = (-٢ ، ٥ ، ١) - (٢ ، -١ ، ٣) = (-٤ ، ٦ ، -٢)

ب حـ = حـ - ب = (-٤ ، ٤ ، ٢) - (-٢ ، ٥ ، ١) = (-٢ ، -١ ، ١)



∴ جتا ب = $\frac{\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{ب حـ}}{\|\overrightarrow{ب أ}\| \|\overrightarrow{ب حـ}\|} = \frac{(٤ ، -٦ ، ٢) \cdot (-٢ ، -١ ، ١)}{\sqrt{١٦ + ٣٦ + ٤} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{-٨ + ٦ + ٢}{\sqrt{٥٦} \times \sqrt{٦}}$ = صفر

∴ ق(∠ب) = ٩٠° ∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

ملاحظات

(١) سبق وبينا أن مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ ويرمز لها بالرمز $أ_{ب} = \|\overrightarrow{أ}\|$ جتا θ حيث θ هي قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

، ∵ جتا θ = $\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|}$ ∴ $أ_{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \times \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|}$ ∴ $أ_{ب} = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}$

أي أن: مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ هي: $أ_{ب} = \frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}$

وتسمى أيضًا بالمركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$

أو مسقط المتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$

(٢) المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$

= (المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$) × (متجه وحدة في اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$)

= $\left(\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}\right)\left(\frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}\right) = \left(\frac{\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|^2}\right) \overrightarrow{ب}$

مثال ٨

في الشكل المقابل:

أ ب حـ و أَ بَ وَ دَ هو متوازي مستطيلات ، أ(٣ ، ٤ ، ٥)

أوجد:

(١) مركبة المتجه $\overrightarrow{و أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{دَ ب}$

(٢) المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{و أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{دَ ب}$

...سة الشكل نجد أن: أ(٣ ، ٤ ، ٥) ، ب(٠ ، ٤ ، ٥) ، دَ(٣ ، ٠ ، ٠)

$\overrightarrow{و أ}$ = (٣ ، ٤ ، ٥) ، $\overrightarrow{دَ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{دَ}$ = (٠ ، ٤ ، ٥) − (٣ ، ٠ ، ٠) = (−٣ ، ٤ ، ٥)

...مركبة المتجه $\overrightarrow{و أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{دَ ب}$ = $\frac{\overrightarrow{و أ} \cdot \overrightarrow{دَ ب}}{\|\overrightarrow{دَ ب}\|} = \frac{(٣ ، ٤ ، ٥) \cdot (-٣ ، ٤ ، ٥)}{\sqrt{٩ + ١٦ + ٢٥}}$

$= \frac{-٩ + ١٦ + ٢٥}{٥\sqrt{٢}} = \frac{٣٢}{٥\sqrt{٢}} = \frac{١٦}{٥}\sqrt{٢}$

...المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{و أ}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{دَ ب}$

$= \left(\frac{\overrightarrow{و أ} \cdot \overrightarrow{دَ ب}}{\|\overrightarrow{دَ ب}\|^2}\right)(\overrightarrow{دَ ب}) = \frac{١٦}{٢٥}(-٣ ، ٤ ، ٥) = \left(\frac{-٤٨}{٢٥} ، \frac{٦٤}{٢٥} ، \frac{١٦}{٥}\right)$

مثال ٩

في الشكل المقابل:

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

... $\overline{أ د} \perp \overline{ب حـ}$ ، د ∈ $\overline{ب حـ}$ ، أ د = ٣ سم ، ب د = ٢ سم

أوجد: $\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{د هـ}$

الحل

$\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{د هـ} = \overrightarrow{ب أ} \cdot (\overrightarrow{د أ} + \overrightarrow{أ هـ}) = \overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{د أ} + \overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{أ هـ}$

= ٥ × ٣ جتا صفر + صفر = ١٥

لاحظ أن

تم الحل بدون إيجاد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ب أ}$ ، $\overrightarrow{د هـ}$

حل آخر:

$\overrightarrow{ب أ} \cdot \overrightarrow{د هـ} = \|\overrightarrow{ب أ}\|$ × (مسقط $\overrightarrow{د هـ}$ على $\overrightarrow{ب أ}$)

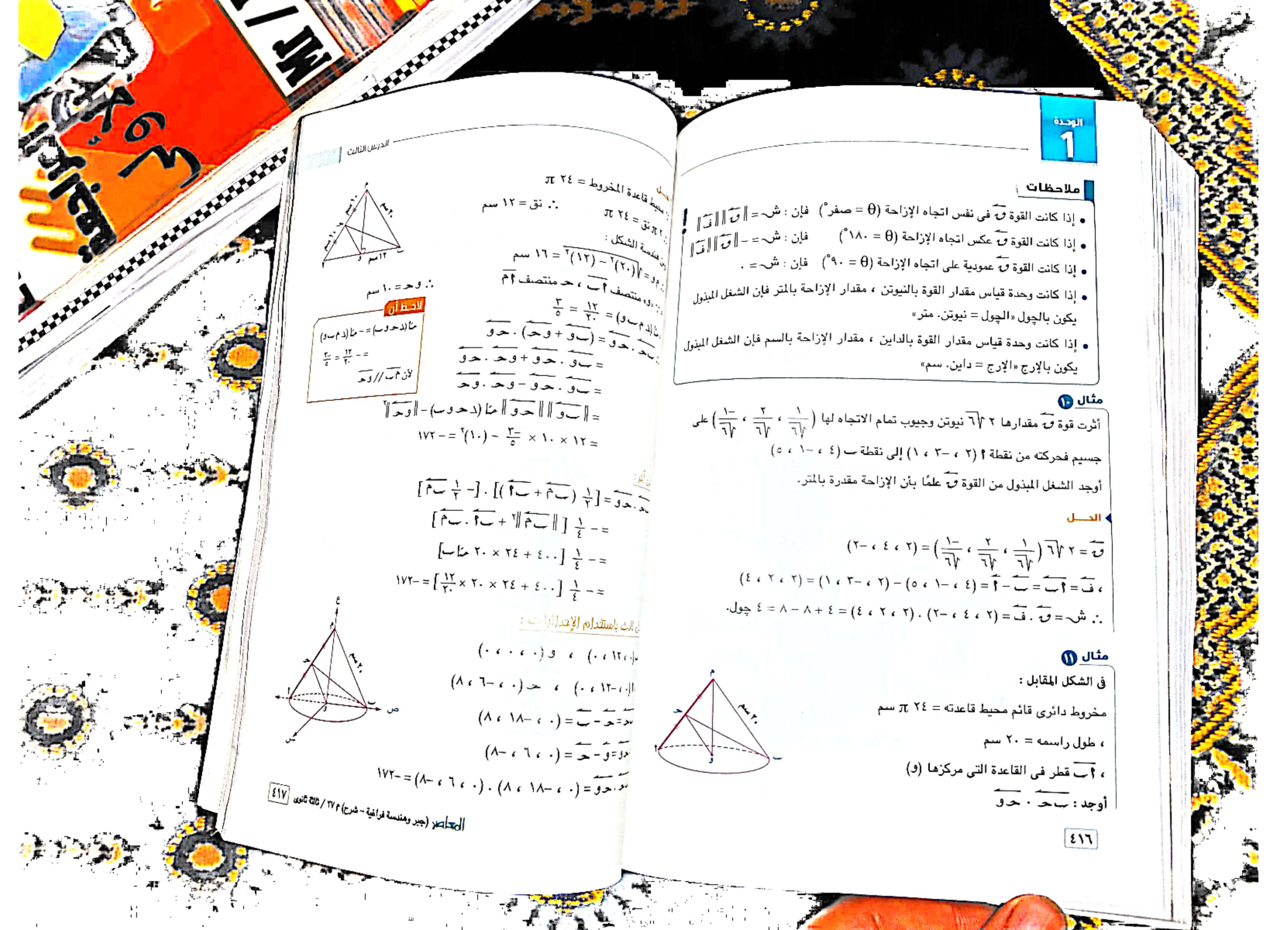
= ب أ × أ د = ٥ × ٣ = ١٥

الشغل المبذول من قوة:

إذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم ما فحركته ... إزاحة $\overrightarrow{ف}$ فإننا نقول إن القوة $\overrightarrow{ق}$ قد بذلت شغلاً (ش)

حيث: ش = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$

$= \|\overrightarrow{ق}\| \|\overrightarrow{ف}\|$ جتا θ



ملاحظات

- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ فى نفس اتجاه الإزاحة (θ = صفر°) فإن : شـ = $\|\overrightarrow{ق}\|\,\|\overrightarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ عكس اتجاه الإزاحة (θ = ١٨٠°) فإن : شـ = $-\|\overrightarrow{ق}\|\,\|\overrightarrow{ف}\|$
- إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الإزاحة (θ = ٩٠°) فإن : شـ = ٠.
- إذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالنيوتن ، مقدار الإزاحة بالمتر فإن الشغل المبذول يكون بالچول «الچول = نيوتن. متر»
- إذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالداين ، مقدار الإزاحة بالسم فإن الشغل المبذول يكون بالإرج «الإرج = داين. سم»

مثال ١٠

أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢ $\sqrt{٦}$ نيوتن وجيوب تمام الاتجاه لها $\left(\frac{١}{\sqrt{٦}} ، \frac{٢}{\sqrt{٦}} ، \frac{-١}{\sqrt{٦}}\right)$ على جسيم فحركته من نقطة أ (٢ ، −٣ ، ١) إلى نقطة ب (٤ ، −١ ، ٥)

أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ علمًا بأن الإزاحة مقدرة بالمتر.

الحل

$\overrightarrow{ق} = ٢\sqrt{٦}\left(\frac{١}{\sqrt{٦}} ، \frac{٢}{\sqrt{٦}} ، \frac{-١}{\sqrt{٦}}\right) = (٢ ، ٤ ، −٢)$

، $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٤ ، −١ ، ٥) - (٢ ، −٣ ، ١) = (٢ ، ٢ ، ٤)$

∴ شـ = $\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف}$ = (٢ ، ٤ ، −٢) . (٢ ، ٢ ، ٤) = ٤ + ٨ − ٨ = ٤ چول.

مثال ١١

فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ٢٤ π سم

، طول راسمه = ٢٠ سم

، $\overline{أب}$ قطر فى القاعدة التى مركزها (و)

أوجد : $\overrightarrow{بحـ} \cdot \overrightarrow{حـو}$

الحل

∵ محيط قاعدة المخروط = ٢٤ π

∴ ٢ π نق = ٢٤ π ∴ نق = ١٢ سم

من هندسة الشكل :

م و = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (١٢)^٢}$ = ١٦ سم

∵ و منتصف $\overline{أب}$ ، حـ منتصف $\overline{أم}$ ∴ وحـ = ١٠ سم

∴ جتا (د م ب و) = $\frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$

$\overrightarrow{بحـ} \cdot \overrightarrow{حـو} = (\overrightarrow{بو} + \overrightarrow{وحـ}) \cdot \overrightarrow{حـو}$

$= \overrightarrow{بو} \cdot \overrightarrow{حـو} + \overrightarrow{وحـ} \cdot \overrightarrow{حـو}$

$= \overrightarrow{بو} \cdot \overrightarrow{حـو} - \overrightarrow{وحـ} \cdot \overrightarrow{وحـ}$

$= \|\overrightarrow{بو}\|\,\|\overrightarrow{حـو}\|$ جتا (د حـ و ب) $- \|\overrightarrow{وحـ}\|^٢$

$= ١٢ \times ١٠ \times \frac{-٣}{٥} - (١٠)^٢ = -١٧٢$

لاحظ أن

جتا (د حـ و ب) = − جتا (د م ب و)

$= -\frac{١٢}{٢٠} = \frac{-٣}{٥}$

لأن $\overline{مب} // \overline{وحـ}$

[illegible] :

$\overrightarrow{بحـ} \cdot \overrightarrow{حـو} = [\frac{١}{٢}(\overrightarrow{بم} + \overrightarrow{بأ})] \cdot [-\frac{١}{٢} \overrightarrow{بم}]$

$= -\frac{١}{٤} [\|\overrightarrow{بم}\|^٢ + \overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{بم}]$

$= -\frac{١}{٤} [٤٠٠ + ٢٤ \times ٢٠$ جتا ب$]$

$= -\frac{١}{٤} [٤٠٠ + ٢٤ \times ٢٠ \times \frac{١٢}{٢٠}] = -١٧٢$

[illegible] باستخدام الإحداثيات :

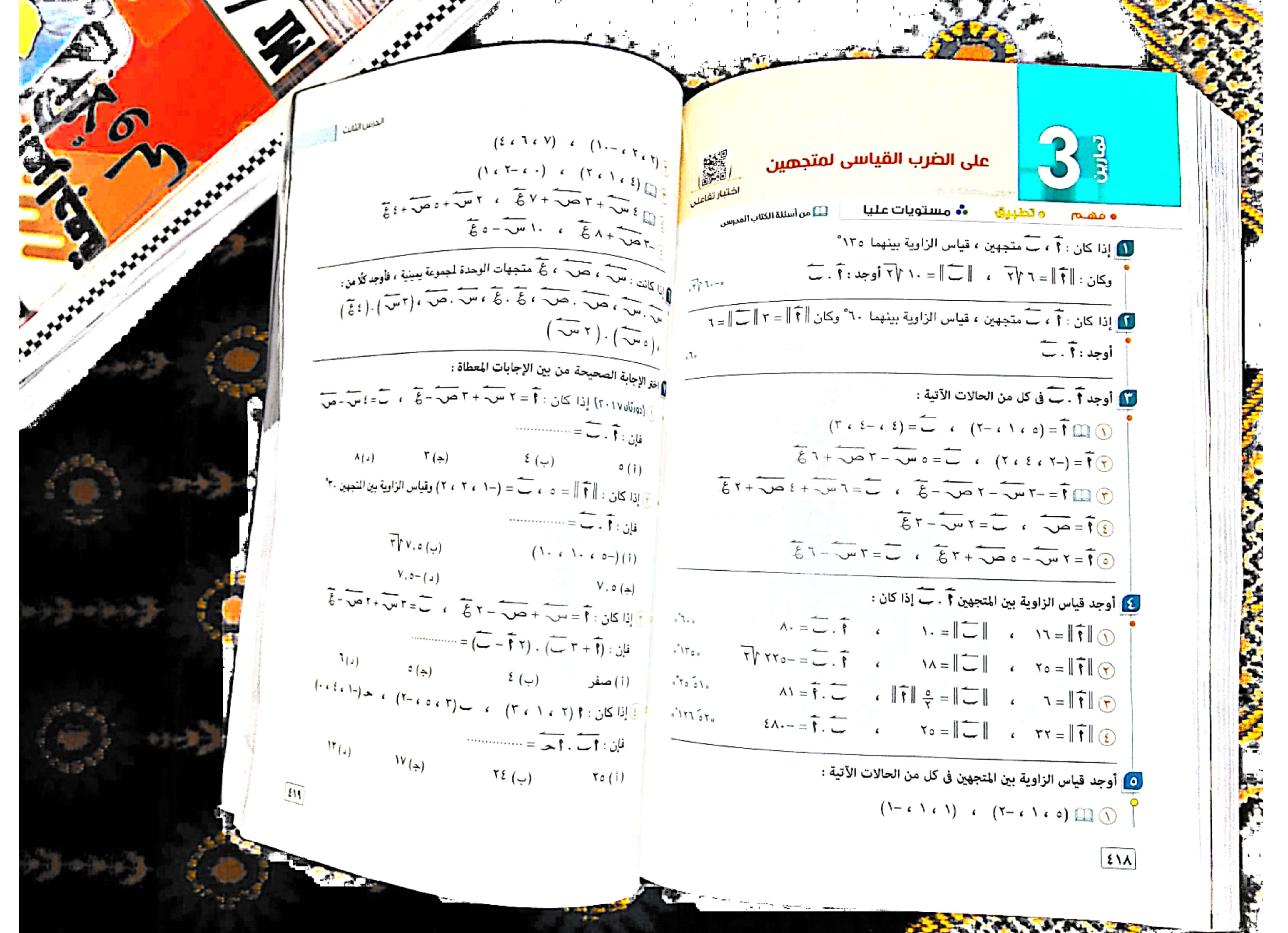
[illegible] (٠ ، ١٢ ، ٠) ، و (٠ ، ٠ ، ٠)

[illegible] (٠ ، −١٢ ، ٠) ، حـ (٠ ، −٦ ، ٨)

$\overrightarrow{بحـ}$ = حـ − ب = (٠ ، −١٨ ، ٨)

$\overrightarrow{حـو}$ = و − حـ = (٠ ، ٦ ، −٨)

$\overrightarrow{بحـ} \cdot \overrightarrow{حـو}$ = (٠ ، −١٨ ، ٨) . (٠ ، ٦ ، −٨) = −١٧٢



تمارين 3 على الضرب القياسي لمتجهين

• فهم • تطبيق • مستويات عليا — من أسئلة الكتاب المدرسي — اختبار تفاعلي

١ إذا كان : أ ، ب متجهين ، قياس الزاوية بينهما ١٣٥° وكان : ||أ|| = ٦√٢ ، ||ب|| = ١٠√٢ أوجد : أ . ب (−٦٠√٢)

٢ إذا كان : أ ، ب متجهين ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° وكان ||أ|| = ٢ ، ||ب|| = ٦ أوجد : أ . ب (٦)

٣ أوجد أ . ب في كل من الحالات الآتية :

(١) أ = (٥ ، ١ ، −٢) ، ب = (٤ ، −٤ ، ٣)

(٢) أ = (−٢ ، ٤ ، ٢) ، ب = ٥س − ٣ص + ٦ع

(٣) أ = −٣س − ٢ص − ع ، ب = ٦س + ٤ص + ٢ع

(٤) أ = ص ، ب = ٢س − ٣ع

(٥) أ = ٢س − ٥ص + ٣ع ، ب = ٢س − ٦ع

٤ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب إذا كان :

(١) ||أ|| = ١٦ ، ||ب|| = ١٠ ، أ . ب = ٨٠ (٦٠°)

(٢) ||أ|| = ٢٥ ، ||ب|| = ١٨ ، أ . ب = −٢٢٥√٢ (١٣٥°)

(٣) ||أ|| = ٦ ، ||ب|| = ٥/٢ ||أ|| ، ب . أ = ٨١ (٢٥° ٥١َ)

(٤) ||أ|| = ٣٢ ، ||ب|| = ٢٥ ، ب . أ = −٤٨٠ (١٢٦° ٥٢َ)

٥ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين في كل من الحالات الآتية :

(١) (٥ ، ١ ، −٢) ، (١ ، ١ ، −١)

(٢) (٢ ، ٢ ، −١٠) ، (٧ ، ٦ ، ٤)

(٣) (٤ ، ١ ، ٢) ، (٠ ، −٢ ، ١)

(٤) ٤س + ٣ص + ٧ع ، ٢س + ٥ص + ٤ع

(٥) −٢ص + ٨ع ، ١٠س − ٥ع

٦ إذا كانت : س ، ص ، ع متجهات الوحدة لمجموعة يمينية ، فأوجد كلاً من :

س . س ، ص . ص ، ع . ع ، س . ص ، (٣س) . (٤ع) ، (٥س) . (٢س)

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) (دور ثان ٢٠١٧) إذا كان : أ = ٢س + ٣ص − ع ، ب = ٤س − ص

فإن : أ . ب = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٣ (د) ٨

(٢) إذا كان : ||أ|| = ٥ ، ب = (−١ ، ٢ ، ٢) وقياس الزاوية بين المتجهين ٣٠°

فإن : أ . ب = ...

(أ) (−٥ ، ١٠ ، ١٠) (ب) ٧,٥√٣ (ج) ٧,٥ (د) −٧,٥

(٣) إذا كان : أ = س + ص − ٢ع ، ب = ٢س + ٢ص − ع

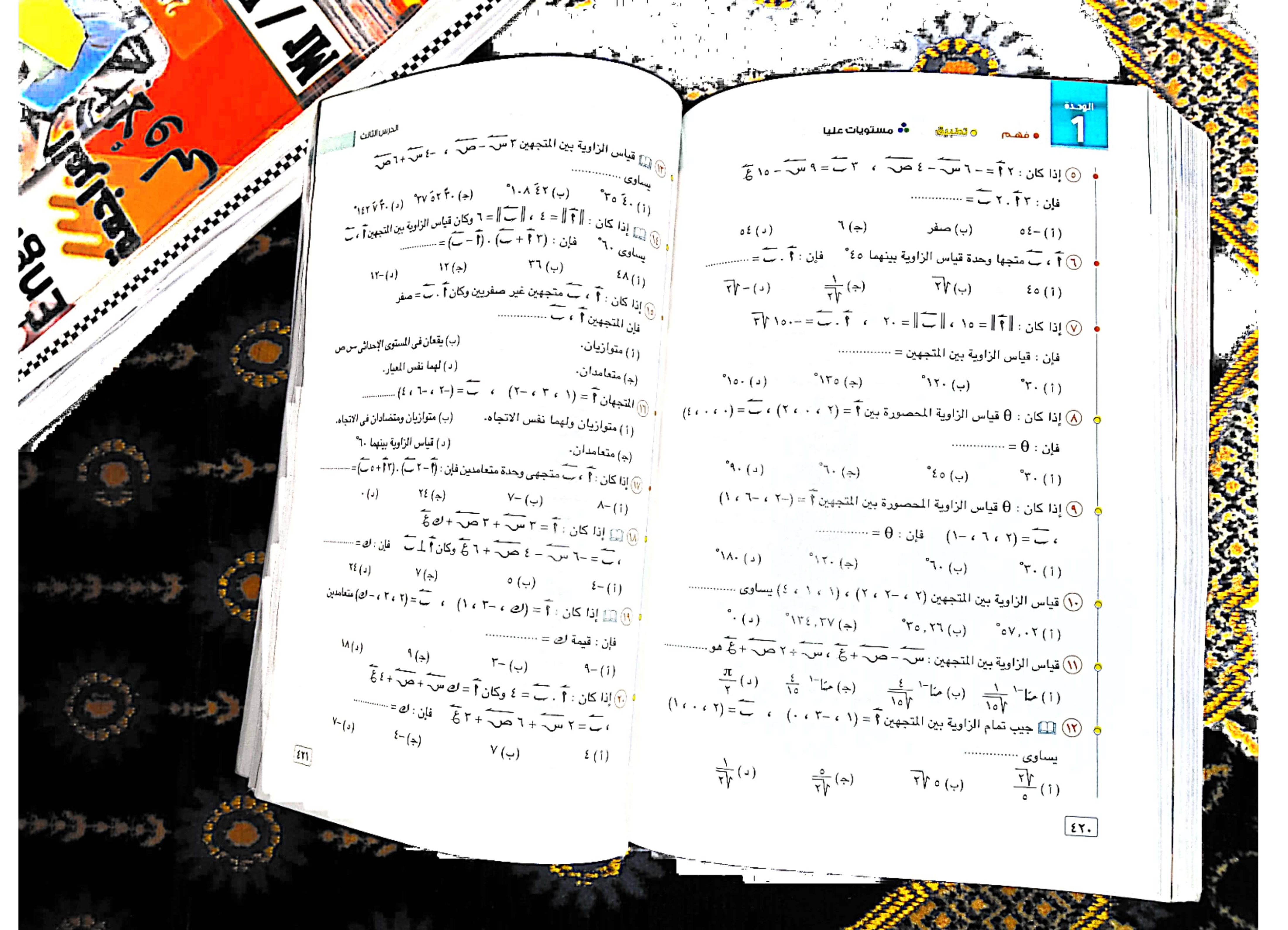
فإن : (أ + ٣ب) . (٢أ − ب) = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(٤) إذا كان : أ(٢ ، ١ ، ٣) ، ب(٣ ، ٥ ، −٢) ، جـ(−١ ، ٤ ، ٠)

فإن : أب . أجـ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (ج) ١٧ (د) ١٢



● فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

⑤ إذا كان : ٢ أ = −٦ س − ٤ ص ، ٣ ب = ٩ س − ١٥ ع

فإن : ٣ أ . ٢ ب = ...

(أ) −٥٤ (ب) صفر (جـ) ٦ (د) ٥٤

⑥ أ ، ب متجها وحدة قياس الزاوية بينهما ٤٥° فإن : أ . ب = ...

(أ) ٤٥ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (د) −$\sqrt{٢}$

⑦ إذا كان : ‖أ‖ = ١٥ ، ‖ب‖ = ٢٠ ، أ . ب = −١٥٠ $\sqrt{٢}$

فإن : قياس الزاوية بين المتجهين = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

⑧ إذا كان : θ قياس الزاوية المحصورة بين أ = (٢ ، ٠ ، ٢) ، ب = (٠ ، ٠ ، ٤)

فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

⑨ إذا كان : θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين أ = (−٢ ، −٦ ، ١)

، ب = (٢ ، ٦ ، −١) فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

⑩ قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، −٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوى ....

(أ) ٥٧,٠٢° (ب) ٣٥,٢٦° (جـ) ١٣٤,٣٧° (د) ٠°

⑪ قياس الزاوية بين المتجهين : س − ص + ع ، س + ٢ ص + ع هو ....

(أ) حتا$^{-١}$ $\frac{١}{\sqrt{١٥}}$ (ب) حتا$^{-١}$ $\frac{٤}{\sqrt{١٥}}$ (جـ) حتا$^{-١}$ $\frac{٤}{١٥}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

⑫ 📖 جيب تمام الزاوية بين المتجهين أ = (١ ، −٣ ، ٠) ، ب = (٢ ، ٠ ، ١)

يساوى ....

(أ) $\frac{\sqrt{٢}}{٥}$ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{٥}{\sqrt{٢}}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

⑬ 📖 قياس الزاوية بين المتجهين ٣ س − ص ، −٤ س + ٦ ص

يساوى ....

(أ) ٤٠ ٣٥َ ° (ب) ١٠٨ ٤٢َ ° (جـ) ٢ ٣٧ ٤٠َ ° (د) ١٤٢ ٧ ٤٠َ °

⑭ 📖 إذا كان : ‖أ‖ = ٤ ، ‖ب‖ = ٦ وكان قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب يساوى ٦٠° فإن : (٣ أ + ب) . (أ − ب) = ...

(أ) ٤٨ (ب) ٣٦ (جـ) ١٢ (د) −١٢

⑮ إذا كان : أ ، ب متجهين غير صفريين وكان أ . ب = صفر

فإن المتجهين أ ، ب ....

(أ) متوازيان. (ب) يقعان فى المستوى الإحداثى س ص

(جـ) متعامدان. (د) لهما نفس المعيار.

⑯ المتجهان أ = (١ ، ٣ ، −٢) ، ب = (−٢ ، −٦ ، ٤) ....

(أ) متوازيان ولهما نفس الاتجاه. (ب) متوازيان ومتضادان فى الاتجاه.

(جـ) متعامدان. (د) قياس الزاوية بينهما ٦٠°

⑰ إذا كان : أ ، ب متجهى وحدة متعامدين فإن : (أ − ٢ ب) . (٣ أ + ٥ ب) = ...

(أ) −٨ (ب) −٧ (جـ) ٢٤ (د) ٠

⑱ 📖 إذا كان : أ = ٣ س + ٣ ص + ك ع

، ب = −٦ س − ٤ ص + ٦ ع وكان أ ⊥ ب فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٢٤

⑲ 📖 إذا كان : أ = (ك ، −٣ ، ١) ، ب = (٢ ، ٢ ، −ك) متعامدين

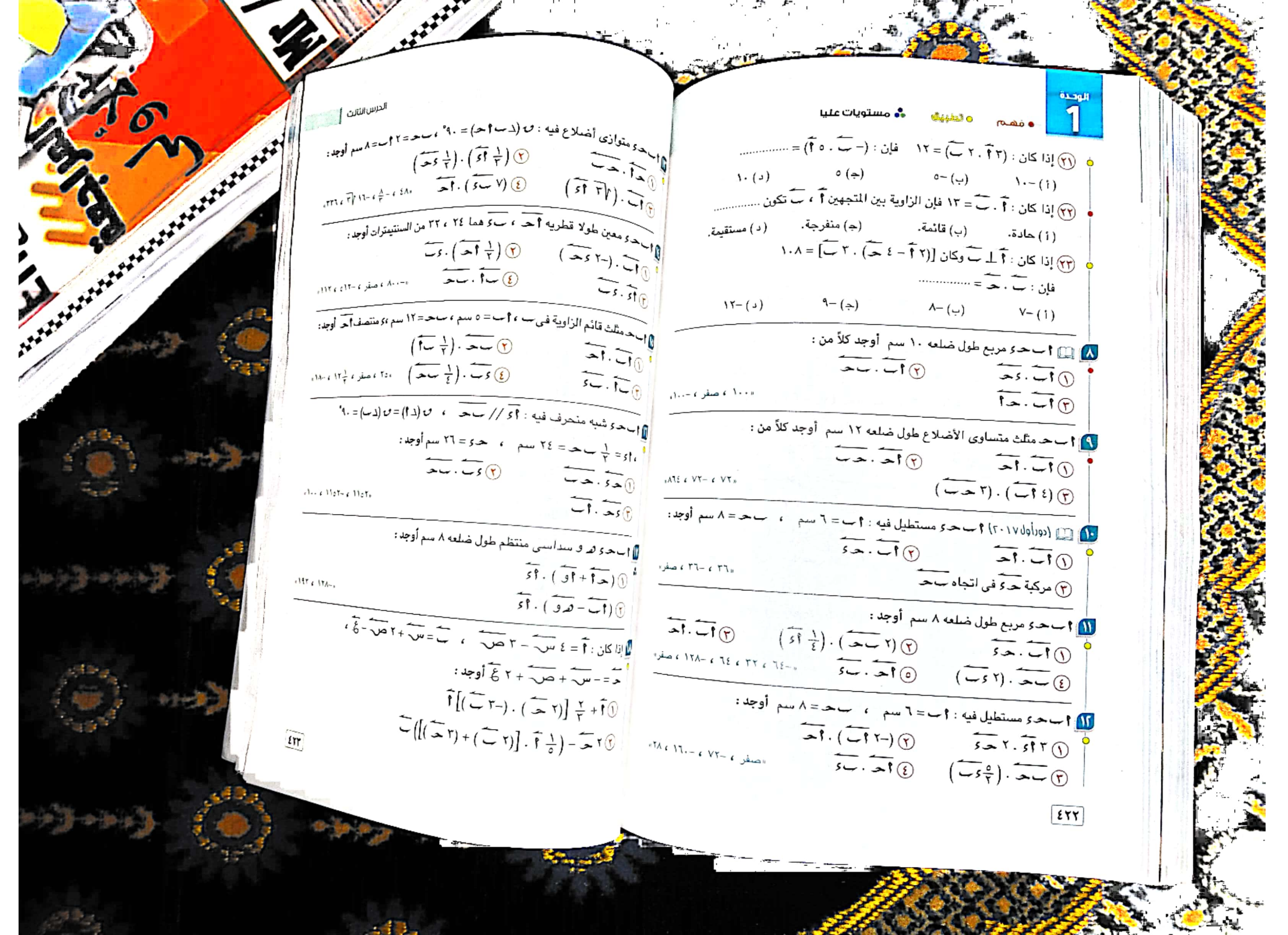
فإن : قيمة ك = ...

(أ) −٩ (ب) −٣ (جـ) ٩ (د) ١٨

⑳ إذا كان : أ . ب = ٤ وكان أ = ك س + ص + ٤ ع

، ب = ٢ س + ٦ ص + ٢ ع فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) −٤ (د) −٧



الوحدة 1

● فهم ○ تطبيق ✤ مستويات عليا

(٢١) إذا كان : (٣ أ . ٢ ب) = ١٢ فإن : (- ب . ٥ أ) = ...

(أ) -١٠ (ب) -٥ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢٢) إذا كان : أ . ب = ١٣ فإن الزاوية بين المتجهين أ ، ب تكون ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (جـ) منفرجة. (د) مستقيمة.

(٢٣) إذا كان : أ ⊥ ب وكان [(٢ أ - ٤ حـ) . ٣ ب] = ١٠٨

فإن : ب . حـ = ...

(أ) -٧ (ب) -٨ (جـ) -٩ (د) -١٢

٨ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم أوجد كلاً من :

(١) أب . ءحـ (٢) أب . بحـ

(٣) أب . حـأ

«١٠٠ ، صفر ، -١٠٠»

٩ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم أوجد كلاً من :

(١) أب . أحـ (٢) أحـ . حـب

(٣) (٤ أب) . (٣ حـب)

«٧٢ ، -٧٢ ، -٨٦٤»

١٠ (دور أول ٢٠١٧) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد :

(١) أب . أحـ (٢) أب . حـء

(٣) مركبة حـء فى اتجاه بحـ

«٣٦ ، -٣٦ ، صفر»

١١ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨ سم أوجد :

(١) أب . حـء (٢) (٢ بحـ) . (١/٤ أء) (٣) أب . أحـ

(٤) بحـ . (٢ ءب) (٥) أحـ . بء

«-٦٤ ، ٣٢ ، ٦٤ ، -١٢٨ ، صفر»

١٢ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد :

(١) ٣ أء . ٢ حـء (٢) (-٢ أب) . أحـ

(٣) بحـ . (٥/٢ ءب) (٤) أحـ . بء

«صفر ، -٧٢ ، -١٦٠ ، ٢٨»

١٣ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق(∠ب أحـ) = ٩٠° ، ب حـ = ٢ أب = ٨ سم أوجد :

(١) حـأ . حـب (٢) (١/٢ أء) . (١/٢ ءحـ)

(٣) أب . (√٣ أء) (٤) (٧ بء) . أحـ

«٤٨ ، -٨/٣ ، -١٦ √٣ ، ٣٣٦»

١٤ أ ب حـ ء معين طولا قطريه أحـ ، ب ء هما ٢٤ ، ٣٢ من السنتيمترات أوجد :

(١) أب . (-٢ ءحـ) (٢) (١/٢ أحـ) . ءب

(٣) أء . ءب (٤) بأ . بحـ

«-٨٠٠ ، صفر ، -١٢ ، ١١٢»

١٥ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، ء منتصف أحـ أوجد :

(١) أب . أحـ (٢) بحـ . (١/٢ بأ)

(٣) بأ . بء (٤) ءب . (١/٤ بحـ)

«٢٥ ، صفر ، ١٢ ١/٢ ، -١٨»

١٦ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب حـ ، ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٩٠°

، أء = ١/٢ ب حـ = ٢٤ سم ، حـء = ٢٦ سم أوجد :

(١) حـء . حـب (٢) ءب . بحـ

(٣) ءحـ . أب

«١١٥٢ ، -١١٥٢ ، ١٠٠»

١٧ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم طول ضلعه ٨ سم أوجد :

(١) (حـأ + أو) . أء

(٢) (أب - هـو) . أء

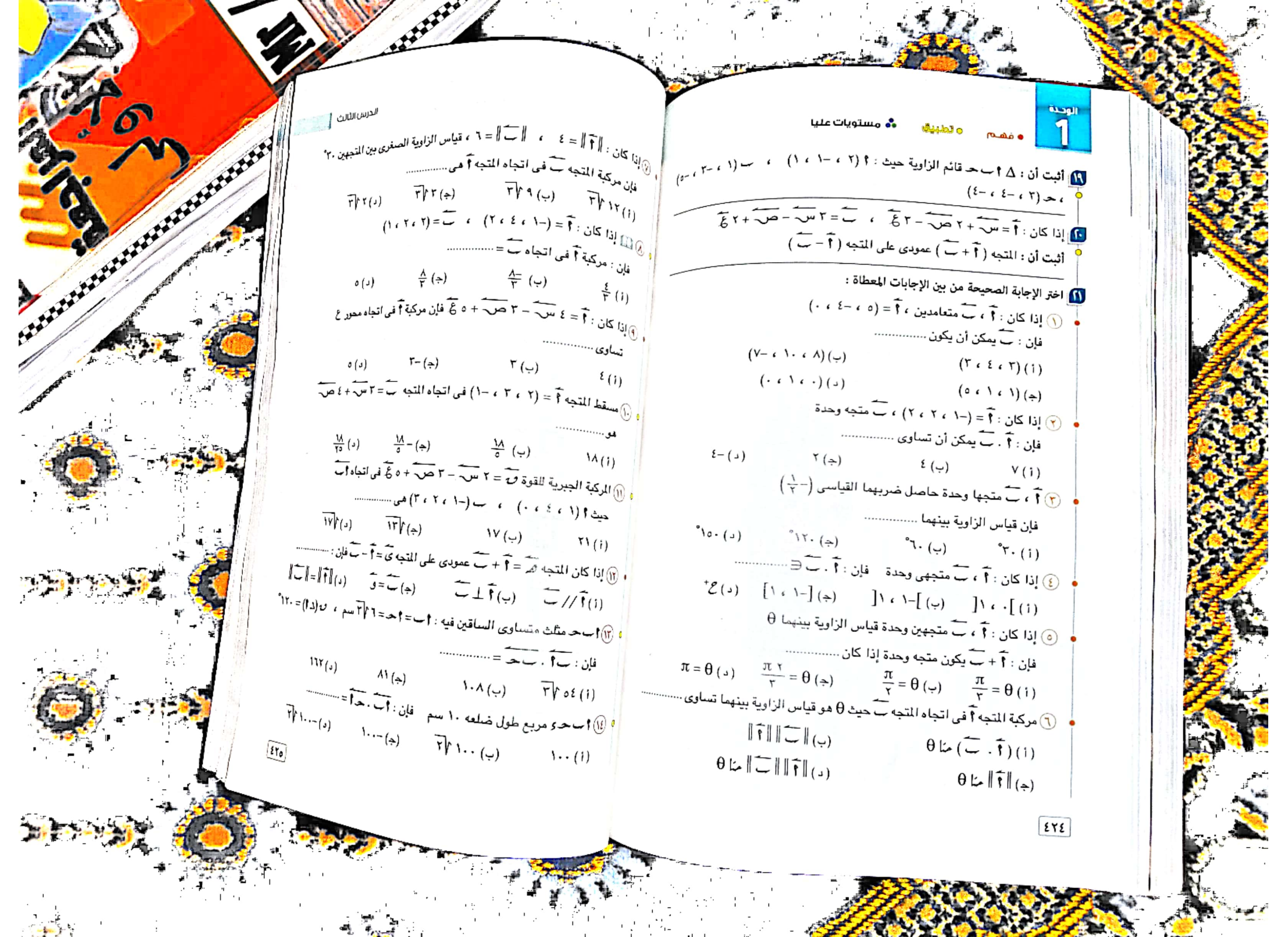
«-١٢٨ ، ١٩٢»

١٨ إذا كان : أ = ٤ س - ٣ ص ، ب = س + ٢ ص - ع ،

حـ = - س + ص + ٢ ع أوجد :

(١) أ + ٢/٣ [(٢ حـ) . (-٣ ب)] أ

(٢) ٢ حـ - (١/٥ أ . [(٢ ب) + (٣ حـ)]) ب



● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

١٩ أثبت أن : Δ أ ب حـ قائم الزاوية حيث : أ (٢ ، −١ ، ١) ، ب (١ ، −٣ ، −٥) ، حـ (٣ ، −٤ ، −٤)

٢٠ إذا كان : أ = س + ٢ ص − ٣ ع ، ب = ٣ س − ص + ٢ ع

أثبت أن : المتجه (أ + ب) عمودى على المتجه (أ − ب)

٢١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : أ ، ب متعامدين ، أ = (٥ ، −٤ ، ٠)

فإن : ب يمكن أن يكون ....

(أ) (٣ ، ٤ ، ٣) (ب) (٨ ، ١٠ ، −٧)
(جـ) (١ ، ١ ، ٥) (د) (٠ ، ١ ، ٠)

② إذا كان : أ = (−١ ، ٢ ، ٢) ، ب متجه وحدة

فإن : أ . ب يمكن أن تساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −٤

③ أ ، ب متجها وحدة حاصل ضربهما القياسى $(-\frac{1}{2})$

فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) °٣٠ (ب) °٦٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٥٠

④ إذا كان : أ ، ب متجهى وحدة فإن : أ . ب ∈ ....

(أ)]٠ ، ١[(ب)]−١ ، ١[(جـ) [−١ ، ١] (د) $ح^+$

⑤ إذا كان : أ ، ب متجهين وحدة قياس الزاوية بينهما θ

فإن : أ + ب يكون متجه وحدة إذا كان ....

(أ) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ب) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (جـ) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (د) $\theta = \pi$

⑥ مركبة المتجه أ فى اتجاه المتجه ب حيث θ هو قياس الزاوية بينهما تساوى ....

(أ) (أ . ب) جتا θ (ب) ‖ب‖ ‖أ‖
(جـ) ‖أ‖ جتا θ (د) ‖أ‖ ‖ب‖ جتا θ

⑦ إذا كان : ‖أ‖ = ٤ ، ‖ب‖ = ٦ ، قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين °٣٠

فإن مركبة المتجه ب فى اتجاه المتجه أ هى ....

(أ) ١٢ $\sqrt{3}$ (ب) ٩ $\sqrt{3}$ (جـ) ٣ $\sqrt{3}$ (د) ٢ $\sqrt{3}$

⑧ إذا كان : أ = (−١ ، ٤ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٢ ، ١)

فإن : مركبة أ فى اتجاه ب = ...

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{-8}{3}$ (جـ) $\frac{8}{3}$ (د) ٥

⑨ إذا كان : أ = ٤ س − ٣ ص + ٥ ع فإن مركبة أ فى اتجاه محور ع

تساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) ٥

⑩ مسقط المتجه أ = (٢ ، ٣ ، −١) فى اتجاه المتجه ب = ٢ س + ٤ ص

هو ....

(أ) ١٨ (ب) $\frac{18}{5}$ (جـ) $-\frac{18}{5}$ (د) $\frac{18}{25}$

⑪ المركبة الجبرية للقوة ق = ٢ س − ٣ ص + ٥ ع فى اتجاه أ ب

حيث أ (١ ، ٤ ، ٠) ، ب (−١ ، ٢ ، ٣) هى ....

(أ) ٢١ (ب) ١٧ (جـ) $\sqrt{13}$ (د) $\sqrt{17}$

⑫ إذا كان المتجه هـ = أ + ب عمودى على المتجه ى = أ − ب فإن : ....

(أ) أ // ب (ب) أ ⊥ ب (جـ) ب = و (د) ‖أ‖ = ‖ب‖

⑬ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ٦ $\sqrt{3}$ سم ، ق(∠أ) = °١٢٠

فإن : ب أ . ب حـ = ...

(أ) ٥٤ $\sqrt{3}$ (ب) ١٠٨ (جـ) ٨١ (د) ١٦٢

⑭ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : أ ب . حـ أ = ...

(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٠ $\sqrt{2}$ (جـ) −١٠٠ (د) −١٠٠ $\sqrt{2}$



الوحدة 1

● مهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(١٥) إذا كان: أ = ٣ س − ٤ ص ، ب = ١٢ س + ٥ ص ، θ قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب فإن: طا θ = ...

(أ) ١٦/٦٥ (ب) ٦٣/٦٥ (ج) ٦٣/١٦ (د) ١٦/٦٣

(١٦) إذا كان: أ = (١ ، −٢ ، ١) ، ب = (−٢ ، ١ ، ٢)
فإن المركبة الاتجاهية للمتجه أ فى اتجاه ب = ...

(أ) (٤/٩ ، −٢/٩ ، −٤/٩) (ب) (٤/٩ ، ٢/٩ ، ٤/٩)
(ج) (−٤/٩ ، −٢/٩ ، −٢/٩) (د) (٤/٩ ، ٢/٩ ، −٤/٩)

(١٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه: أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ء منتصف أ جـ فإن مركبة المتجه ب ء فى اتجاه أ ب = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) ٤ (د) −٤

(١٨) الشغل المبذول من القوة ق = ٣ س + ٧ ع لتحريك جسيم من نقطة أ (١ ، ١ ، ٢) إلى نقطة ب (٧ ، ٣ ، ٥) يساوى ....

(أ) ٤٠ (ب) ٣٩ (ج) ٣٢ (د) ١٧

(١٩) أثرت القوة ق = ٥ س − ٤ ص + ع على جسيم ما فسببت له إزاحة: ف = ٢ س + ص − ٣ ع فإذا كانت القوة مقدرة بالنيوتن والإزاحة بالمتر فإن الشغل المبذول من القوة = ... جول.

(أ) −٣ (ب) ٣ (ج) ٧ (د) ١٠

(٢٠) قوة مقدارها ١٥ نيوتن أثرت على جسيم فحركته من أ (٢ ، ٣ ، −١) إلى ب (٣ ، ٥ ، ١) فى عكس اتجاه القوة فإن الشغل المبذول من القوة = ...

(أ) ٤٥ (ب) ٣٠ (ج) −٤٥ (د) ±١٥

(٢١) إذا كان: أ + ب + جـ = ٠ ، ‖أ‖ = ٢ فإن: أ . ب + أ . جـ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (ج) −٤ (د) −٨

٤٢٦

الدرس الثالث

(٢٢) إذا كان: أ ، ب متجهين غير صفريين وكان أ . ب = صفر فإن مركبة أ فى اتجاه ب تساوى ....

(أ) ‖أ‖ (ب) ‖ب‖ (ج) ١ (د) صفر

(٢٣) إذا كان: ‖أ‖ = ٦ ، ‖ب‖ = ٤ ومركبة أ فى اتجاه ب تساوى ٣ فإن مركبة ب فى اتجاه أ تساوى ....

(أ) −٢ (ب) ٢ (ج) −٨ (د) ٨

(٢٤) إذا كان: أ ، ب متجهين فى الفراغ فإن ....

(أ) أ . ب = ك حيث ك ∈ ح
(ب) أ . ب = جـ حيث ك متجه غير صفرى.
(ج) أ . ب = ٠ إذا كان: أ // ب
(د) جميع ما سبق صحيح.

(٢٥) إذا كان: (أ . (ب − جـ)) = صفر ، أ = ٢ ب ، |جـ| = ٢ |ب|
فإن قياس الزاوية بين المتجهين أ ، جـ يساوى ....

(أ) π/٦ (ب) π/٣ (ج) ٢π/٣ (د) ٥π/٦

(٢٦) إذا كان: ‖أ‖ = ٢ ، ‖ب‖ = ٣ ، جتا θ = ٢/٣ حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب فإن: ‖٢ أ − ٣ ب‖ = ...

(أ) ٨ (ب) ٧ (ج) ٦ (د) ٥

(٢٧) إذا كان: ‖أ‖ = ٢ ، ‖ب‖ = ٣ ، ‖أ − ب‖ = √١٩
فإن قياس الزاوية بين أ ، ب = ...

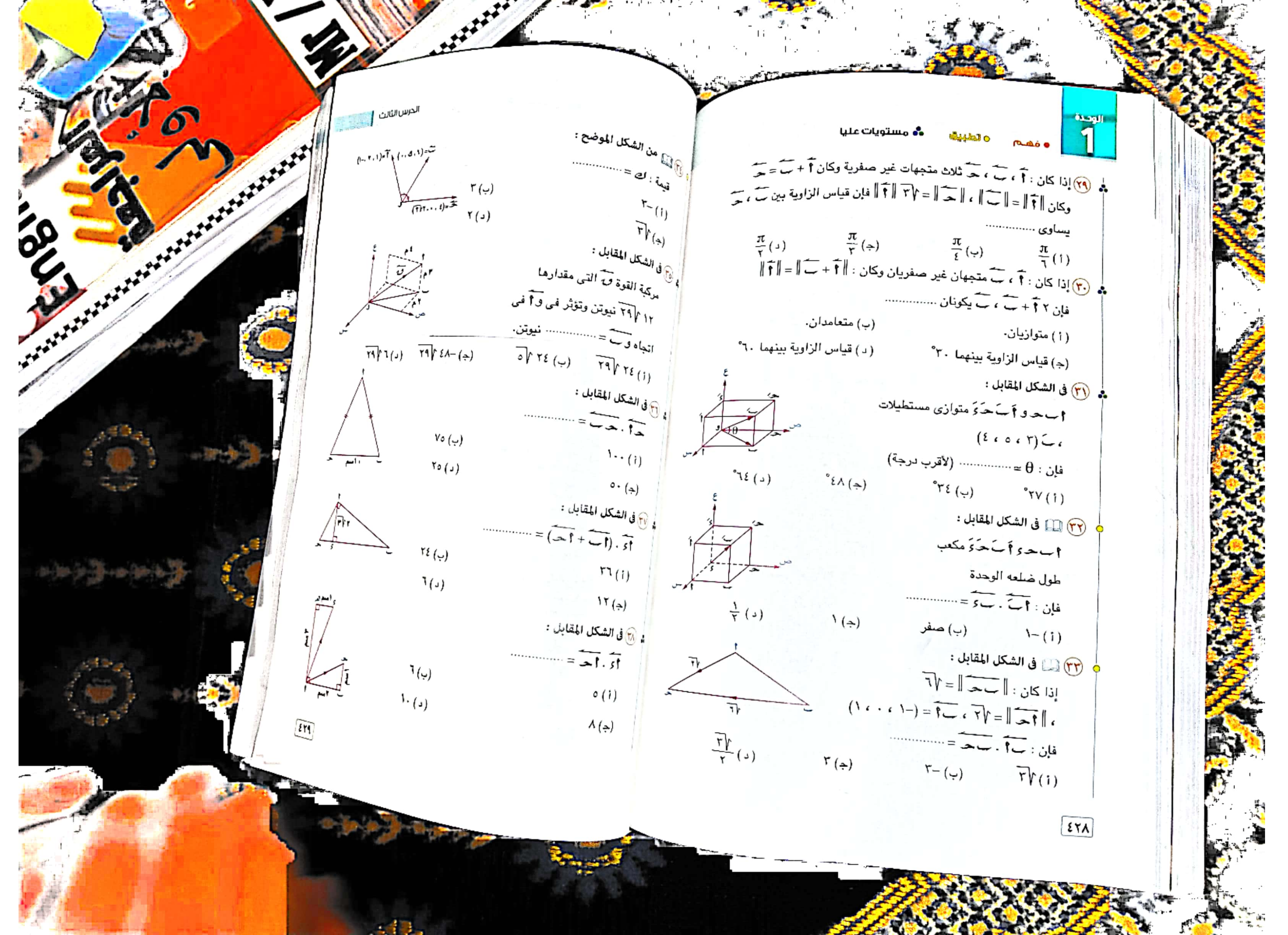
(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٢٨) إذا كان: أ ⊥ ب وكان ‖أ + ب‖ = ١٢ فإن: ‖أ − ب‖ = ...

(أ) ٦ (ب) ١٢ (ج) ١٢√٢ (د) ١٢√٣

٤٢٧

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner



الوحدة 1

● فهم ○ تطبيق ●●● مستويات عليا

(٢٩) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاث متجهات غير صفرية وكان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$
وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\|$ ، $\|\overrightarrow{حـ}\| = \sqrt{٣}\,\|\overrightarrow{أ}\|$ فإن قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$
يساوى ....
(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٣٠) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهان غير صفريان وكان : $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\|$
فإن $٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يكونان ....
(أ) متوازيان. (ب) متعامدان.
(جـ) قياس الزاوية بينهما ٣٠° (د) قياس الزاوية بينهما ٦٠°

(٣١) فى الشكل المقابل :
أ ب حـ و أَ بَ حـَ ءَ متوازى مستطيلات
، بَ (٣ ، ٥ ، ٤)
فإن : θ ≃ .... (لأقرب درجة)
(أ) ٢٧° (ب) ٣٤° (جـ) ٤٨° (د) ٦٤°

(٣٢) فى الشكل المقابل :
أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ مكعب
طول ضلعه الوحدة
فإن : $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{بء} =$ ....
(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :
إذا كان : $\|\overrightarrow{بحـ}\| = \sqrt{٦}$
، $\|\overrightarrow{أحـ}\| = \sqrt{٢}$ ، $\overrightarrow{بأ} = (−١ ، ٠ ، ١)$
فإن : $\overrightarrow{بأ} \cdot \overrightarrow{بحـ} =$ ....
(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

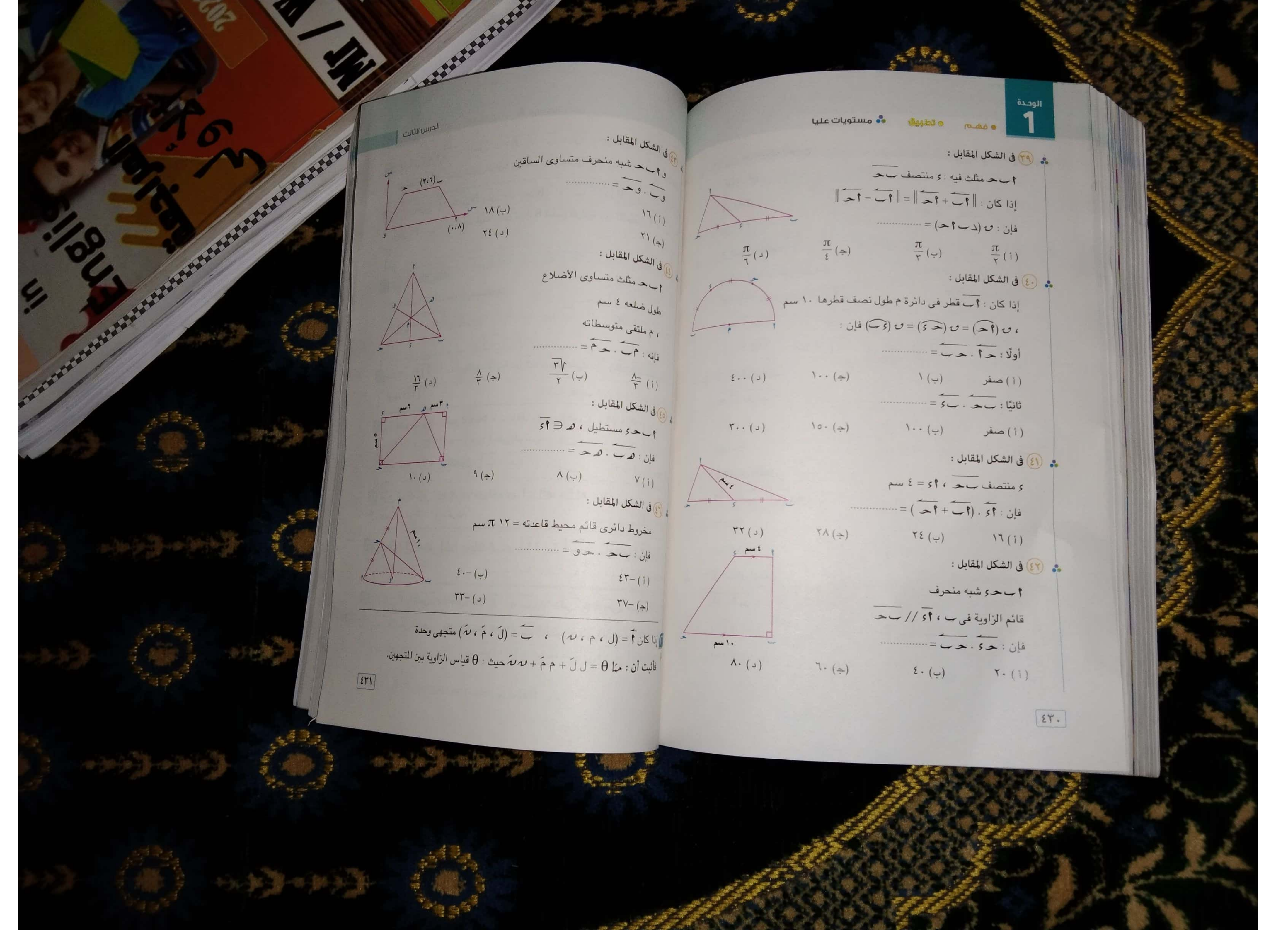
(٣٤) من الشكل الموضح :
قيمة : ك = ...
(أ) −٣ (ب) ٣
(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٢

(٣٥) فى الشكل المقابل :
مركبة القوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها
$١٢\sqrt{٢٩}$ نيوتن وتؤثر فى $\overrightarrow{وأ}$ فى
اتجاه $\overrightarrow{وب}$ = ... نيوتن.
(أ) $٢٤\sqrt{٢٩}$ (ب) $٢٤\sqrt{٥}$ (جـ) $−٤٨\sqrt{٢٩}$ (د) $٦\sqrt{٢٩}$

(٣٦) فى الشكل المقابل :
$\overrightarrow{حـأ} \cdot \overrightarrow{حـب} =$ ....
(أ) ١٠٠ (ب) ٧٥
(جـ) ٥٠ (د) ٢٥

(٣٧) فى الشكل المقابل :
$\overrightarrow{أء} \cdot (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أحـ}) =$ ....
(أ) ٣٦ (ب) ٢٤
(جـ) ١٢ (د) ٦

(٣٨) فى الشكل المقابل :
$\overrightarrow{أء} \cdot \overrightarrow{أحـ} =$ ....
(أ) ٥ (ب) ٦
(جـ) ٨ (د) ١٠



(٣٩) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب حـ}$

إذا كان : $\| \overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ حـ} \| = \| \overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{أ حـ} \|$

فإن : ق (∠ ب أ حـ) = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

(٤٠) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أ ب}$ قطر في دائرة م طول نصف قطرها ١٠ سم

، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ق ($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) فإن :

أولاً : $\overrightarrow{حـ أ} \cdot \overrightarrow{حـ ب}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ١٠٠ (د) ٤٠٠

ثانيًا : $\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{ب ء}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١٠٠ (جـ) ١٥٠ (د) ٣٠٠

(٤١) في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ، أ ء = ٤ سم

فإن : $\overrightarrow{أ ء} \cdot (\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ حـ})$ = ...

(أ) ١٦ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٨ (د) ٣٢

(٤٢) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شبه منحرف

قائم الزاوية في ب ، $\overline{أ ء} // \overline{ب حـ}$

فإن : $\overrightarrow{حـ ء} \cdot \overrightarrow{حـ ب}$ = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

(٤٣) في الشكل المقابل :

و أ ب حـ شبه منحرف متساوي الساقين

$\overrightarrow{و ب} \cdot \overrightarrow{و حـ}$ = ...

(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (د) ٢٤

(٤٤) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع

طول ضلعه ٤ سم

، م ملتقى متوسطاته

فإنه : $\overrightarrow{م ب} \cdot \overrightarrow{حـ م}$ = ...

(أ) $\frac{-8}{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (جـ) $\frac{8}{3}$ (د) $\frac{16}{3}$

(٤٥) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∈ $\overline{أ ء}$

فإن : $\overrightarrow{هـ ب} \cdot \overrightarrow{هـ حـ}$ = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٤٦) في الشكل المقابل :

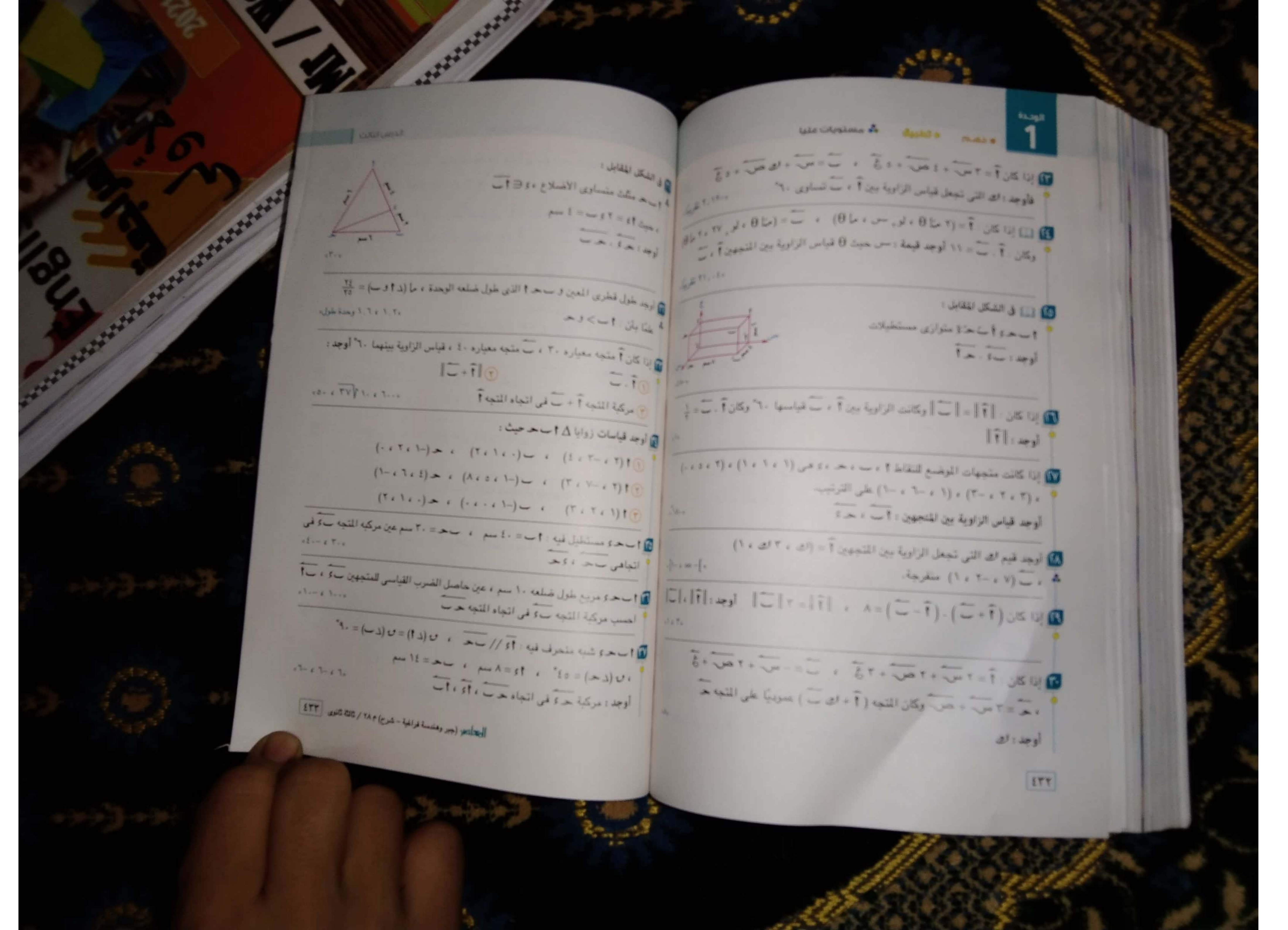
مخروط دائري قائم محيط قاعدته = ١٢ π سم

فإن : $\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{حـ و}$ = ...

(أ) −٤٣ (ب) −٤٠ (جـ) −٣٧ (د) −٣٣

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ل ، م ، ن) ، $\overrightarrow{ب}$ = (لَ ، مَ ، نَ) متجهي وحدة

فأثبت أن : جتا θ = ل لَ + م مَ + ن نَ حيث : θ قياس الزاوية بين المتجهين.



١٣ إذا كان $\overline{أ}$ = ٣ $\overline{س}$ + ٤ $\overline{ص}$ + ٥ $\overline{ع}$ ، $\overline{ب}$ = $\overline{س}$ + ك $\overline{ص}$ + ٥ $\overline{ع}$

فأوجد : ك التي تجعل قياس الزاوية بين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ تساوي ٦٠°

١٤ إذا كان $\overline{أ}$ = (٢ جتا θ ، لو٢ س ، جا θ) ، $\overline{ب}$ = (جا θ ، لو٢ ٢٧ ، ٢ جا θ)

وكان $\overline{أ}$. $\overline{ب}$ = ١١ أوجد قيمة : س حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$

١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ متوازي مستطيلات

أوجد : $\overline{بَ ء}$. $\overline{حـ أ}$

١٦ إذا كان : ‖$\overline{أ}$‖ = ‖$\overline{ب}$‖ وكانت الزاوية بين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ قياسها ٦٠° وكان $\overline{أ}$. $\overline{ب}$ = $\frac{1}{2}$

أوجد : ‖$\overline{أ}$‖

١٧ إذا كانت متجهات الموضع للنقاط أ ، ب ، حـ ، ء هي (١ ، ١ ، ١) ، (٢ ، ٤ ، ٠)

، (٣ ، ٢ ، −٣) ، (١ ، −٦ ، −١) على الترتيب

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين : $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$

١٨ أوجد قيم ك التي تجعل الزاوية بين المتجهين $\overline{أ}$ = (ك ، ٣ ك ، ١)

، $\overline{ب}$ (٧ ، −٢ ، ١) منفرجة.

١٩ إذا كان ($\overline{أ}$ + $\overline{ب}$) . ($\overline{أ}$ − $\overline{ب}$) = ٨ ، ‖$\overline{أ}$‖ = ٢ ‖$\overline{ب}$‖ أوجد : ‖$\overline{أ}$‖ ، ‖$\overline{ب}$‖

٢٠ إذا كان : $\overline{أ}$ = ٢ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ + ٣ $\overline{ع}$ ، $\overline{ب}$ = − $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ + $\overline{ع}$

، $\overline{حـ}$ = ٣ $\overline{س}$ + $\overline{ص}$ وكان المتجه ($\overline{أ}$ + ك $\overline{ب}$) عمودياً على المتجه $\overline{حـ}$

أوجد : ك

٢١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع ، ء ∈ $\overline{أ ب}$

، حيث أ ء = ٢ ء ب = ٤ سم

أوجد : $\overline{حـ ء}$. $\overline{حـ ب}$

٢٢ أوجد طول قطري المعين و ب حـ أ الذي طول ضلعه الوحدة ، جا (د أ و ب) = $\frac{24}{25}$

علماً بأن : أ ب > و حـ

٢٣ إذا كان $\overline{أ}$ متجه معياره ٣٠ ، $\overline{ب}$ متجه معياره ٤٠ ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° أوجد :

(١) $\overline{أ}$. $\overline{ب}$ (٢) ‖$\overline{أ}$ + $\overline{ب}$‖

(٣) مركبة المتجه $\overline{أ}$ + $\overline{ب}$ في اتجاه المتجه $\overline{أ}$

٢٤ أوجد قياسات زوايا Δ أ ب حـ حيث :

(١) أ(٢ ، −٣ ، ٤) ، ب(٠ ، ١ ، ٢) ، حـ(−١ ، ٢ ، ٠)

(٢) أ(٢ ، −٧ ، ٣) ، ب(−١ ، ٥ ، ٨) ، حـ(٤ ، ٦ ، −١)

(٣) أ(١ ، ٢ ، ٣) ، ب(−١ ، ٠ ، ٠) ، حـ(٠ ، ١ ، ٢)

٢٥ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٤٠ سم ، ب حـ = ٣٠ سم عين مركبة المتجه $\overline{ب ء}$ في

اتجاهي $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء حـ}$

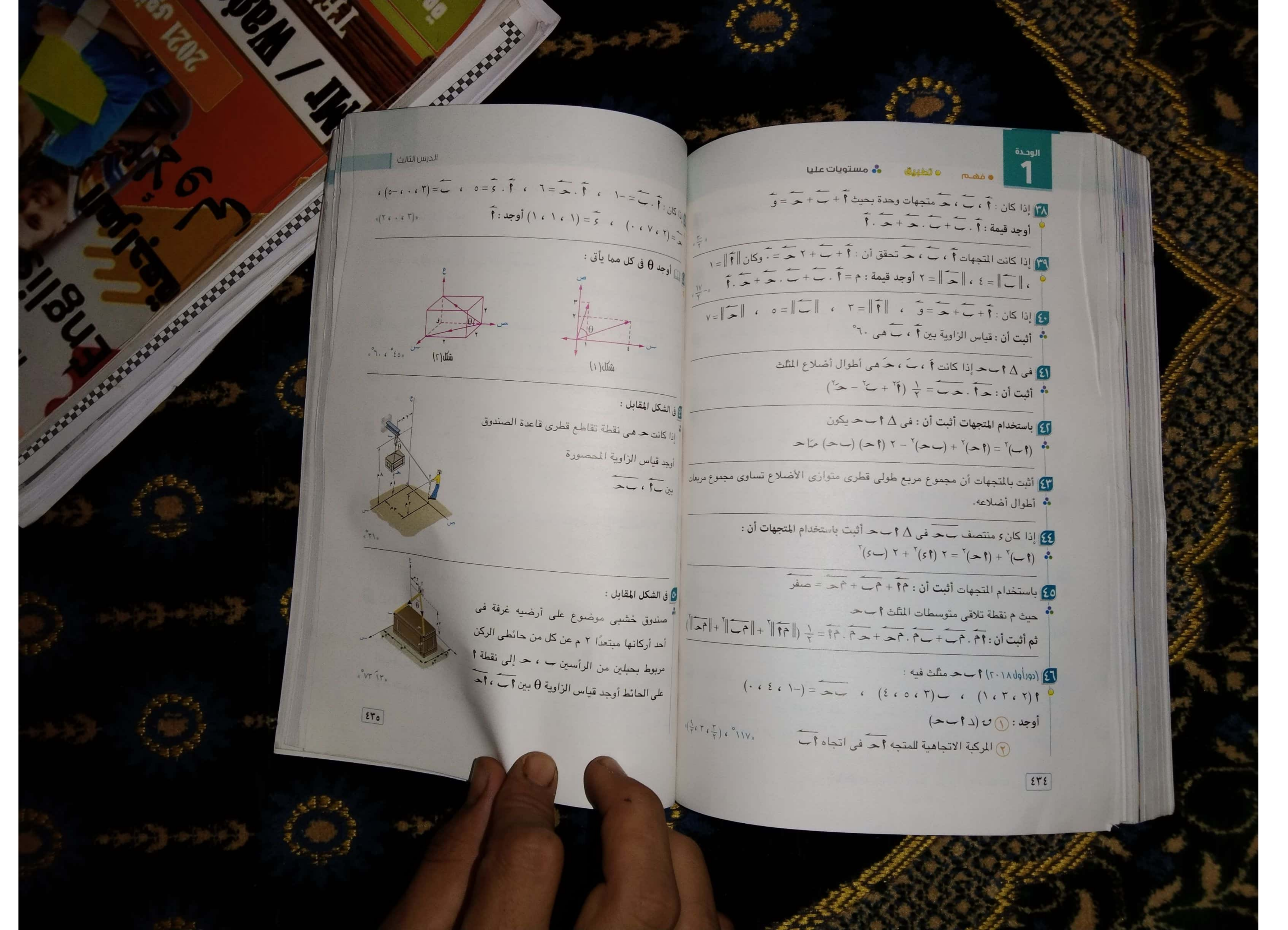
٢٦ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، عين حاصل الضرب القياسي للمتجهين $\overline{ب ء}$ ، $\overline{ب أ}$

احسب مركبة المتجه $\overline{ب ء}$ في اتجاه المتجه $\overline{حـ ب}$

٢٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق(د أ) = ق(د ب) = ٩٠°

، ق(د حـ) = ٤٥° ، أ ء = ٨ سم ، ب حـ = ١٤ سم

أوجد : مركبة $\overline{حـ ء}$ في اتجاه $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{أ ب}$



٣٨ إذا كان : أ ، ب ، ح متجهات وحدة بحيث أ + ب + ح = و
أوجد قيمة : أ . ب + ب . ح + ح . أ
«$-\frac{3}{2}$»

٣٩ إذا كانت المتجهات أ ، ب ، ح تحقق أن : أ + ب + ٢ ح = و وكان ‖أ‖ = ١ ، ‖ب‖ = ٤ ، ‖ح‖ = ٢ أوجد قيمة : م = أ . ب + ب . ح + ح . أ
«$-\frac{17}{2}$»

٤٠ إذا كان : أ + ب + ح = و ، ‖أ‖ = ٣ ، ‖ب‖ = ٥ ، ‖ح‖ = ٧
أثبت أن : قياس الزاوية بين أ ، ب هي ٦٠°

٤١ فى Δ أ ب ح إذا كانت أ ، ب ، ح هى أطوال أضلاع المثلث
أثبت أن : ح أ . ح ب = $\frac{1}{2}$ (أ^2 + ب^2 − ح^2)

٤٢ باستخدام المتجهات أثبت أن : فى Δ أ ب ح يكون
(أ ب)^2 = (أ ح)^2 + (ب ح)^2 − ٢ (أ ح) (ب ح) جتا ح

٤٣ أثبت بالمتجهات أن مجموع مربع طولى قطرى متوازى الأضلاع تساوى مجموع مربعات أطوال أضلاعه.

٤٤ إذا كان ء منتصف ب ح فى Δ أ ب ح أثبت باستخدام المتجهات أن :
(أ ب)^2 + (أ ح)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (ب ء)^2

٤٥ باستخدام المتجهات أثبت أن : م أ + م ب + م ح = صفر
حيث م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب ح
ثم أثبت أن : م أ . م ب + م ب . م ح + م ح . م أ = $\frac{1}{2}$ (‖م أ‖^2 + ‖م ب‖^2 + ‖م ح‖^2)

٤٦ (دور أول ٢٠١٨) أ ب ح مثلث فيه :
أ (٢ ، ٣ ، ١) ، ب (٣ ، ٥ ، ٤) ، ب ح = (−١ ، ٤ ، ٠)
أوجد : (١) ق (∠ أ ب ح)
(٢) المركبة الاتجاهية للمتجه أ ح فى اتجاه أ ب
«١١٧° ، ($\frac{4}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، ٢)»

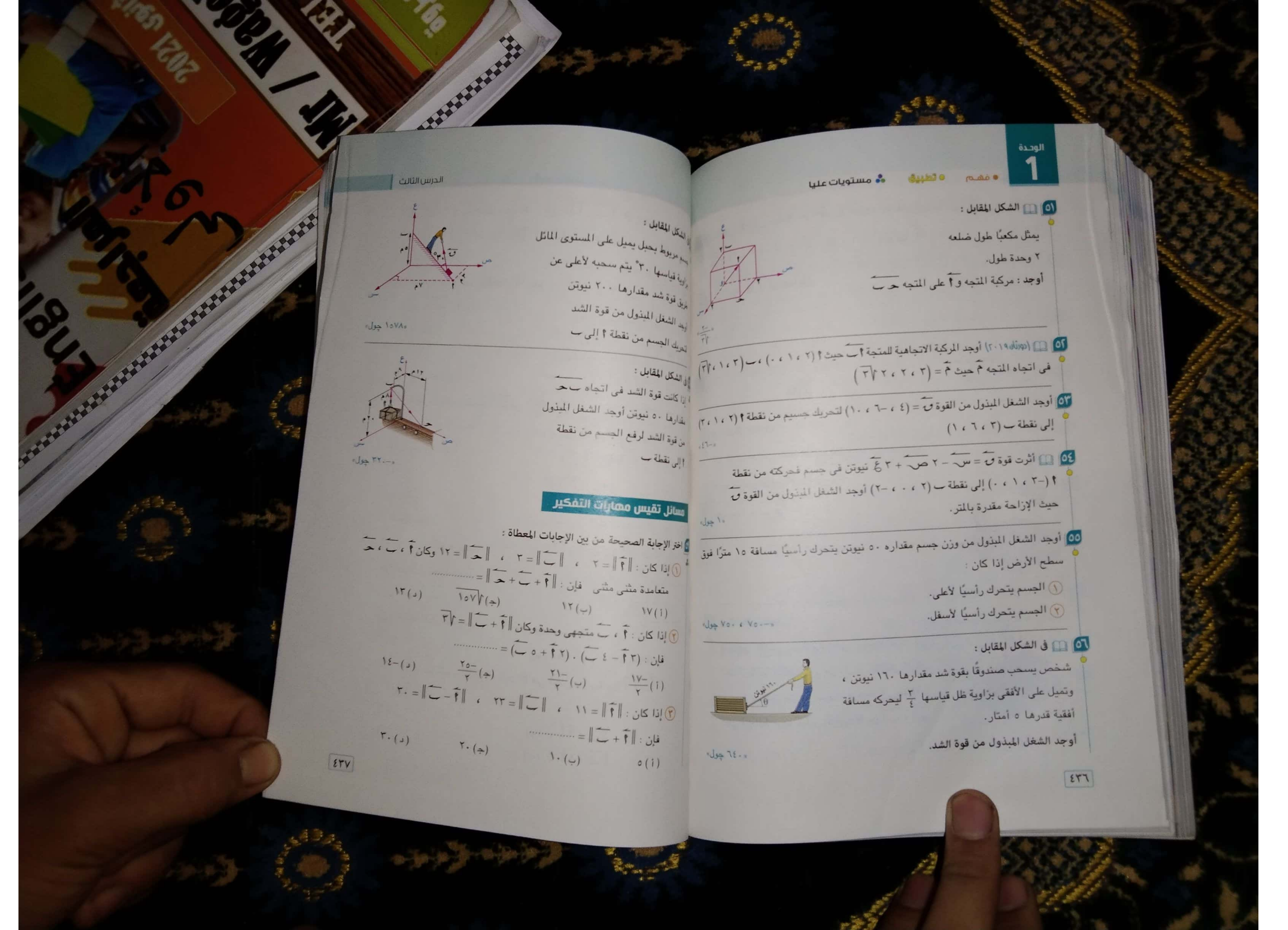
٣٧ إذا كان : أ . ب = −١ ، أ . ح = ٦ ، أ . ء = ٥ ، ب = (٣ ، ٠ ، −٥) ، ح = (٢ ، ٧ ، ٠) ، ء = (١ ، ١ ، ١) أوجد : أ
«(٣ ، ٠ ، ٢)»

أوجد θ فى كل مما يأتى :

«٤٥° ، ٦٠°»

فى الشكل المقابل :
إذا كانت ح هى نقطة تقاطع قطرى قاعدة الصندوق
أوجد قياس الزاوية المحصورة بين ب أ ، ب ح
«٣١°»

فى الشكل المقابل :
صندوق خشبى موضوع على أرضيه غرفة فى أحد أركانها مبتعدًا ٢ م عن كل من حائطى الركن مربوط بحبلين من الرأسين ب ، ح إلى نقطة أ على الحائط أوجد قياس الزاوية θ بين أ ب ، أ ح
«٧٣° ١٣'»



٥١ الشكل المقابل :

يمثل مكعبًا طول ضلعه

٢ وحدة طول.

أوجد : مركبة المتجه $\overrightarrow{و أ}$ على المتجه $\overrightarrow{حـ ب}$

$\frac{٢}{\sqrt{٢}}$

٥٢ (دور ثان ٢٠١٩) أوجد المركبة الاتجاهية للمتجة $\overrightarrow{أ ب}$ حيث أ (٢ ، ١ ، ٠) ، ب (٣ ، ١ ، $\sqrt{٢}$)

فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{م}$ حيث $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

٥٣ أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ = (٤ ، −٦ ، ١٠) لتحريك جسيم من نقطة أ (٢ ، ١ ، ٣)

إلى نقطة ب (٣ ، ٦ ، ١)

٤٦-

٥٤ أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ = $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$ نيوتن فى جسم فحركته من نقطة

أ (−٣ ، ١ ، ٠) إلى نقطة ب (٢ ، ٠ ، −٢) أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$

حيث الإزاحة مقدرة بالمتر.

١٠ جول

٥٥ أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٥٠ نيوتن يتحرك رأسيًا مسافة ١٥ مترًا فوق سطح الأرض إذا كان :

(١) الجسم يتحرك رأسيًا لأعلى.

(٢) الجسم يتحرك رأسيًا لأسفل.

−٧٥٠ ، ٧٥٠ جول

٥٦ فى الشكل المقابل :

شخص يسحب صندوقًا بقوة شد مقدارها ١٦٠ نيوتن ، وتميل على الأفقى بزاوية ظل قياسها $\frac{٣}{٤}$ ليحركه مسافة أفقية قدرها ٥ أمتار.

أوجد الشغل المبذول من قوة الشد.

٦٤٠ جول

الشكل المقابل :

جسم مربوط بحبل يميل على المستوى المائل بزاوية قياسها ٣٠° يتم سحبه لأعلى عن طريق قوة شد مقدارها ٢٠٠ نيوتن أوجد الشغل المبذول من قوة الشد لتحريك الجسم من نقطة أ إلى ب

١٥٧٨٠ جول

فى الشكل المقابل :

إذا كانت قوة الشد فى اتجاه $\overrightarrow{ب حـ}$ مقدارها ٥٠ نيوتن أوجد الشغل المبذول من قوة الشد لرفع الجسم من نقطة أ إلى نقطة ب

٣٢٠٠ جول

مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ٢ ، ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ٣ ، ‖$\overrightarrow{حـ}$‖ = ١٢ وكان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ متعامدة مثنى مثنى فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$‖ = ...

(أ) ١٧ (ب) ١٢ (جـ) $\sqrt{١٥٧}$ (د) ١٣

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة وكان ‖$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$‖ = $\sqrt{٣}$

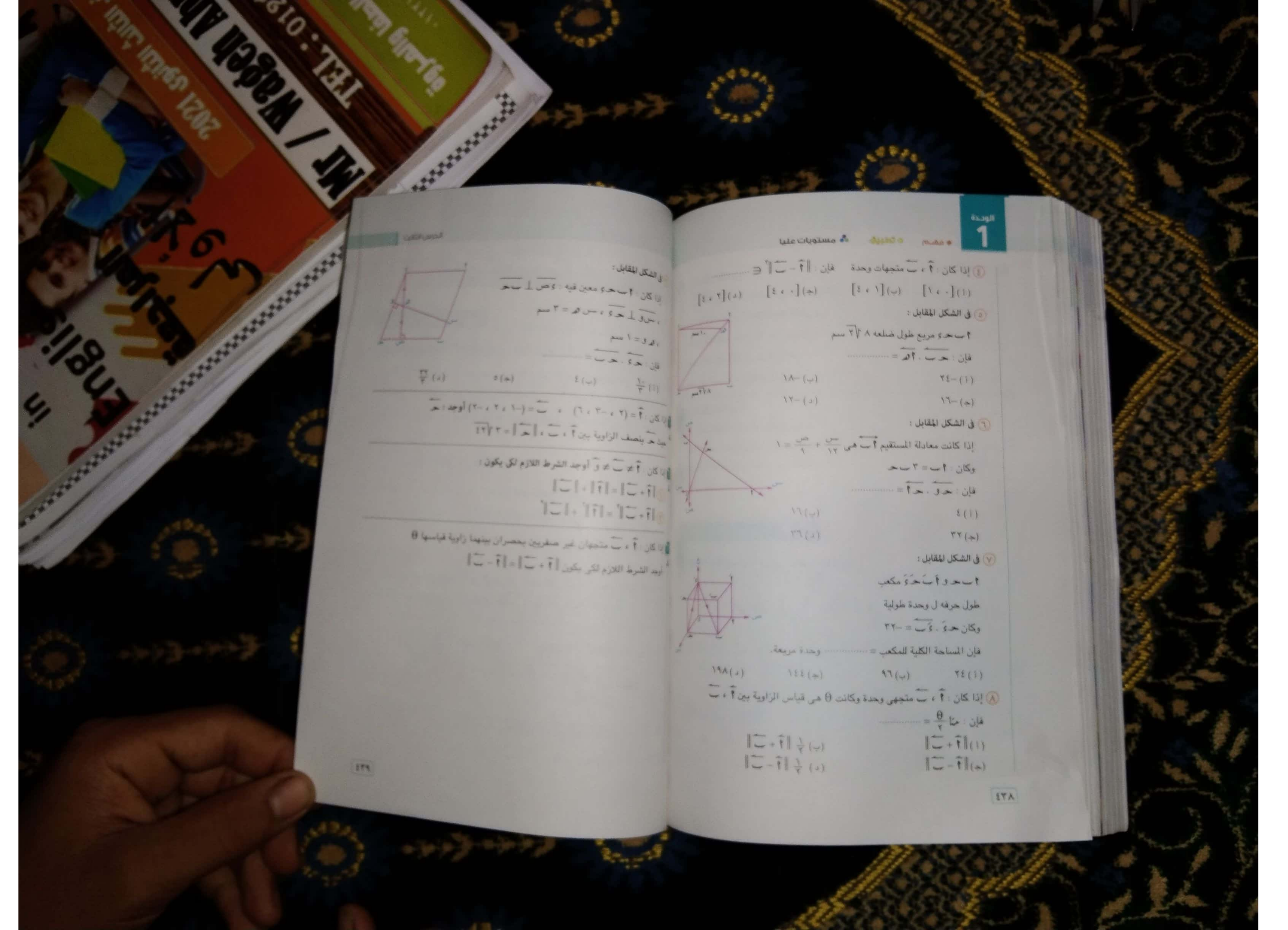
فإن : (٣ $\overrightarrow{أ}$ − ٤ $\overrightarrow{ب}$) . (٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٥ $\overrightarrow{ب}$) = ...

(أ) $\frac{-١٧}{٢}$ (ب) $\frac{-٢١}{٢}$ (جـ) $\frac{-٢٥}{٢}$ (د) −١٤

(٣) إذا كان : ‖$\overrightarrow{أ}$‖ = ١١ ، ‖$\overrightarrow{ب}$‖ = ٢٣ ، ‖$\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$‖ = ٣٠

فإن : ‖$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$‖ = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠



④ إذا كان : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهات وحدة فإن : $\|\vec{أ} - \vec{ب}\|^2 \in$ ....

(أ) $[٠ ، ١]$ (ب) $[١ ، ٤]$ (جـ) $[٠ ، ٤]$ (د) $[٢ ، ٤]$

⑤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٨ $\sqrt{٢}$ سم

فإن : $\overrightarrow{جـ ب} \cdot \overrightarrow{أ هـ}$ = ...

(أ) −٢٤ (ب) −١٨

(جـ) −١٦ (د) −١٢

⑥ في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ هي $\frac{س}{١٢} + \frac{ص}{٩} = ١$

وكان : أ ب = ٣ ب جـ

فإن : $\overrightarrow{جـ و} \cdot \overrightarrow{جـ أ}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ١٦

(جـ) ٣٢ (د) ٣٦

⑦ في الشكل المقابل :

أ ب جـ و أَ بَ جـَ دَ مكعب

طول حرفه ل وحدة طولية

وكان $\overrightarrow{جـ دَ} \cdot \overrightarrow{دَ ب}$ = −٣٢

فإن المساحة الكلية للمكعب = ... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٩٦ (جـ) ١٤٤ (د) ١٩٨

⑧ إذا كان : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهي وحدة وكانت θ هي قياس الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

فإن : جتا $\frac{\theta}{٢}$ = ...

(أ) $\|\vec{أ} + \vec{ب}\|$ (ب) $\frac{١}{٢} \|\vec{أ} + \vec{ب}\|$

(جـ) $\|\vec{أ} - \vec{ب}\|$ (د) $\frac{١}{٢} \|\vec{أ} - \vec{ب}\|$

في الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب جـ د معين فيه : $\overline{د ص} \perp \overline{ب جـ}$

، $\overline{س و} \perp \overline{جـ د}$ ، س هـ = ٣ سم

، هـ و = ١ سم

فإن : $\overrightarrow{جـ د} \cdot \overrightarrow{جـ ب}$ = ...

(أ) $\frac{١٠}{٣}$ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) $\frac{٣٢}{٣}$

إذا كان : $\vec{أ} = (٢ ، −٣ ، ٦)$ ، $\vec{ب} = (−١ ، ٢ ، −٢)$ أوجد : $\vec{جـ}$

حيث $\vec{جـ}$ ينصف الزاوية بين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\|\vec{جـ}\| = ٣\sqrt{٤٢}$

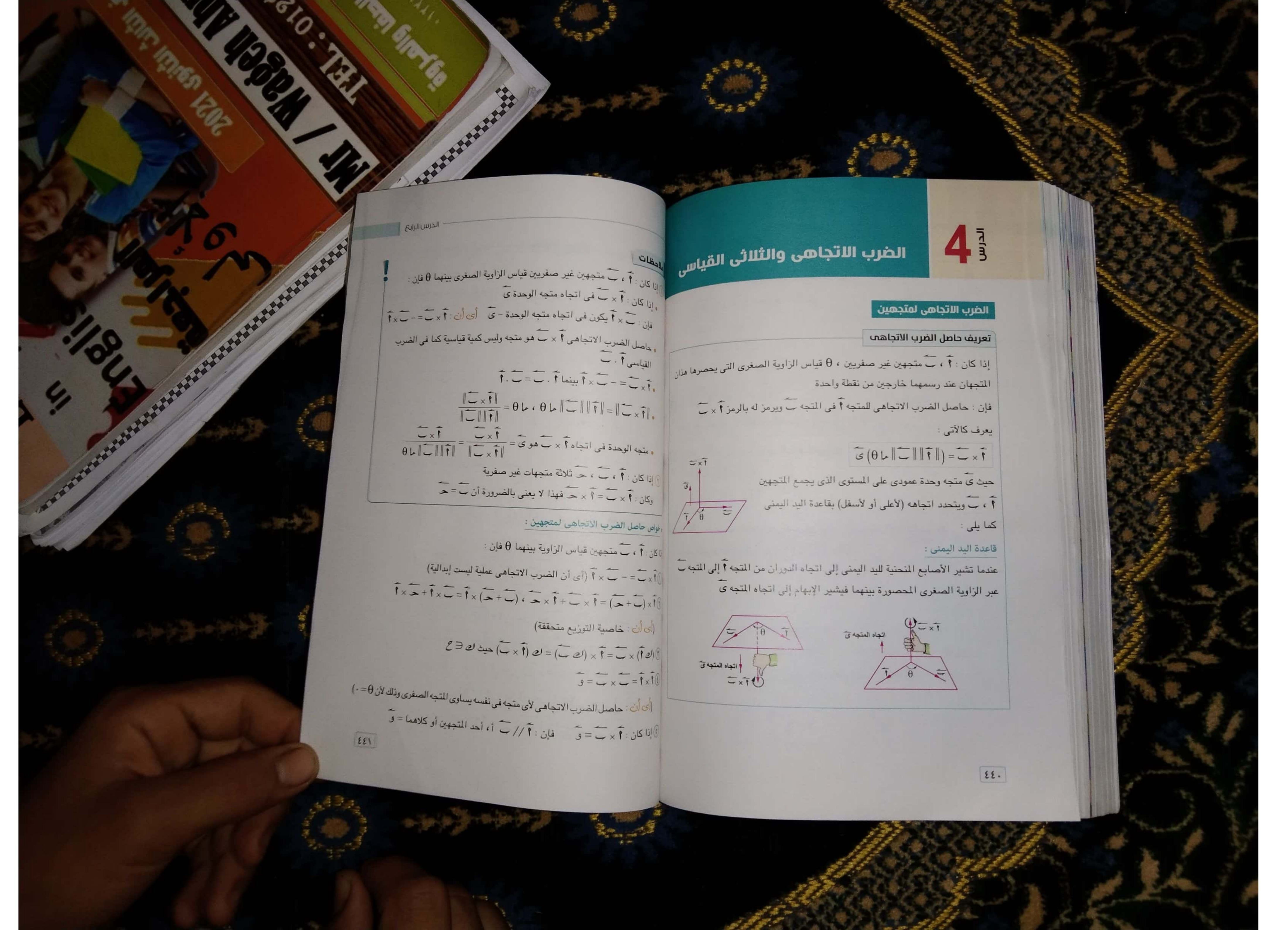
إذا كان : $\vec{أ} \neq \vec{ب} \neq \vec{و}$ أوجد الشرط اللازم لكي يكون :

$\|\vec{أ} + \vec{ب}\| = \|\vec{أ}\| + \|\vec{ب}\|$

$\|\vec{أ} + \vec{ب}\|^2 = \|\vec{أ}\|^2 + \|\vec{ب}\|^2$

إذا كان : $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهان غير صفريين يحصران بينهما زاوية قياسها θ

أوجد الشرط اللازم لكي يكون $\|\vec{أ} + \vec{ب}\| = \|\vec{أ} - \vec{ب}\|$



الدرس 4

الضرب الاتجاهي والثلاثي القياسي

الضرب الاتجاهي لمتجهين

تعريف حاصل الضرب الاتجاهي

إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين ، θ قياس الزاوية الصغرى التي يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة

فإن: حاصل الضرب الاتجاهي للمتجه $\overrightarrow{أ}$ في المتجه $\overrightarrow{ب}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

يعرف كالآتي:

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta) \, \overrightarrow{ى}$$

حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يجمع المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ويتحدد اتجاهه (لأعلى أو لأسفل) بقاعدة اليد اليمنى كما يلي:

قاعدة اليد اليمنى:

عندما تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى اتجاه الدوران من المتجه $\overrightarrow{أ}$ إلى المتجه $\overrightarrow{ب}$ عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ى}$

ملاحظات

- إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين قياس الزاوية الصغرى بينهما θ فإن:
  - إذا كان: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ في اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ فإن: $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ يكون في اتجاه متجه الوحدة $-\overrightarrow{ى}$ أي أن: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$
  - حاصل الضرب الاتجاهي $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ هو متجه وليس كمية قياسية كما في الضرب القياسي $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$
  - $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ بينما $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$
  - $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta$ ، $\text{جا } \theta = \dfrac{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|}$
  - متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ هو $\overrightarrow{ى} = \dfrac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|} = \dfrac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } \theta}$
- إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات غير صفرية وكان: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{حـ}$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{حـ}$

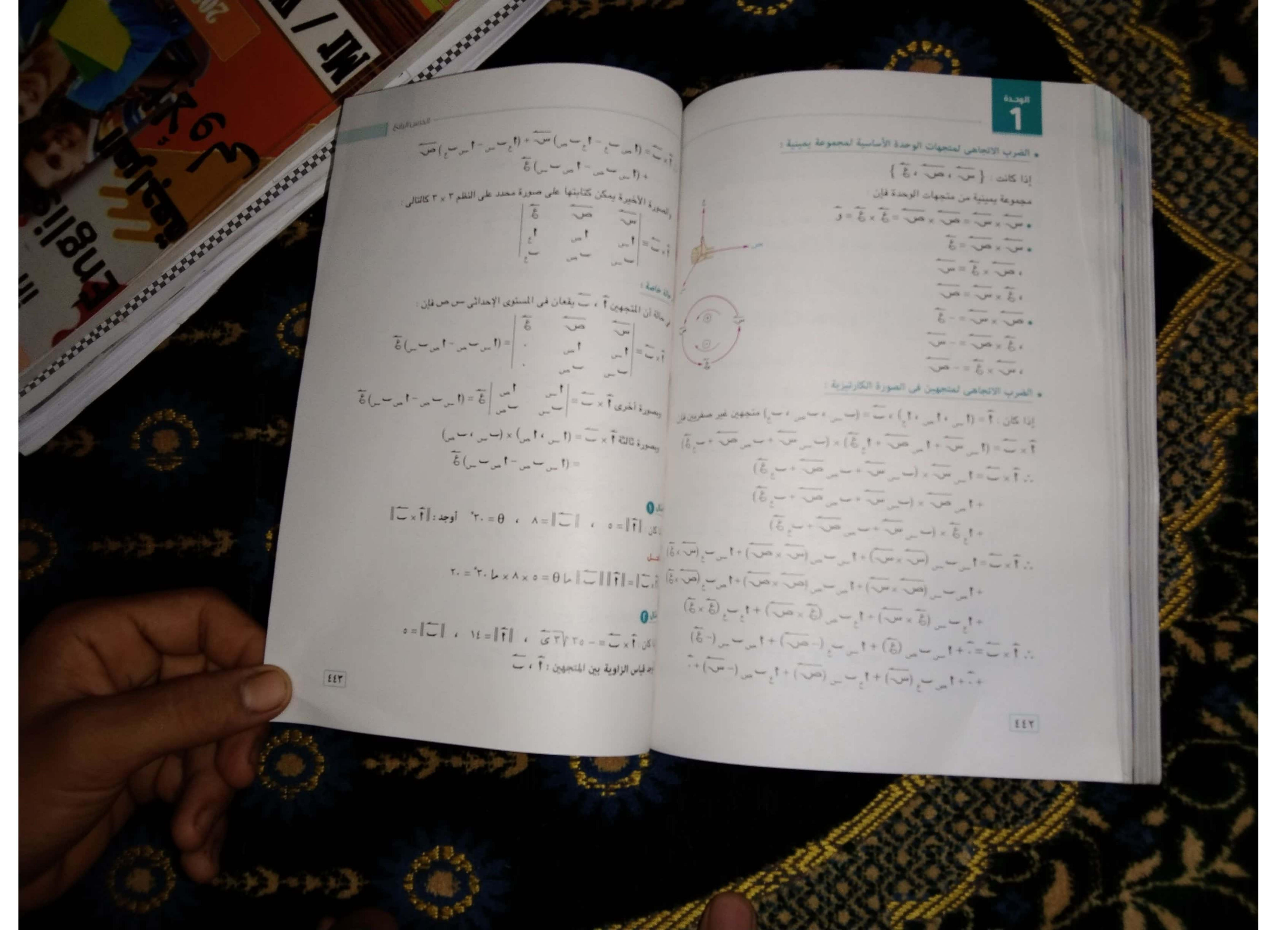
خواص حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين:

إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ فإن:

1. $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ (أي أن الضرب الاتجاهي عملية ليست إبدالية)
2. $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{حـ}$ ، $(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{حـ} \times \overrightarrow{أ}$

   (أي أن: خاصية التوزيع متحققة)
3. $(ك \overrightarrow{أ}) \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times (ك \overrightarrow{ب}) = ك (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$ حيث $ك \in ح$
4. $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

   (أي أن: حاصل الضرب الاتجاهي لأي متجه في نفسه يساوي المتجه الصفري وذلك لأن $\theta = ٠$)
5. إذا كان: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإن: $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أو أحد المتجهين أو كلاهما $= \overrightarrow{و}$



الوحدة 1

• الضرب الاتجاهي لمتجهات الوحدة الأساسية لمجموعة يمينية :

إذا كانت : $\{\overrightarrow{س}, \overrightarrow{ص}, \overrightarrow{ع}\}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة فإن :

• $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{0}$

• $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

• $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$

• الضرب الاتجاهي لمتجهين في الصورة الكارتيزية :

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_{س}, أ_{ص}, أ_{ع})$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س}, ب_{ص}, ب_{ع})$ متجهين غير صفريين فإن

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_{س}\overrightarrow{س} + أ_{ص}\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\overrightarrow{ع}) \times (ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع})$$

$$\therefore \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = أ_{س}\overrightarrow{س} \times (ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع})$$
$$+ أ_{ص}\overrightarrow{ص} \times (ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع})$$
$$+ أ_{ع}\overrightarrow{ع} \times (ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع})$$

$$\therefore \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = أ_{س}ب_{س}(\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س}) + أ_{س}ب_{ص}(\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص}) + أ_{س}ب_{ع}(\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع})$$
$$+ أ_{ص}ب_{س}(\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س}) + أ_{ص}ب_{ص}(\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص}) + أ_{ص}ب_{ع}(\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع})$$
$$+ أ_{ع}ب_{س}(\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س}) + أ_{ع}ب_{ص}(\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص}) + أ_{ع}ب_{ع}(\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع})$$

$$\therefore \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{0} + أ_{س}ب_{ص}(\overrightarrow{ع}) + أ_{س}ب_{ع}(-\overrightarrow{ص}) + أ_{ص}ب_{س}(-\overrightarrow{ع})$$
$$+ \overrightarrow{0} + أ_{ص}ب_{ع}(\overrightarrow{س}) + أ_{ع}ب_{س}(\overrightarrow{ص}) + أ_{ع}ب_{ص}(-\overrightarrow{س}) + \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_{ص}ب_{ع} - أ_{ع}ب_{ص})\overrightarrow{س} + (أ_{ع}ب_{س} - أ_{س}ب_{ع})\overrightarrow{ص} + (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س})\overrightarrow{ع}$$

والصورة الأخيرة يمكن كتابتها على صورة محدد على النظم ٣ × ٣ كالتالي :

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \end{vmatrix}$$

حالة خاصة :

في حالة أن المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ يقعان في المستوى الإحداثي س ص فإن :

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & 0 \\ ب_{س} & ب_{ص} & 0 \end{vmatrix} = (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س})\overrightarrow{ع}$$

وبصورة أخرى $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} \\ ب_{س} & ب_{ص} \end{vmatrix} \overrightarrow{ع} = (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س})\overrightarrow{ع}$

وبصورة ثالثة $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_{س}, أ_{ص}) \times (ب_{س}, ب_{ص})$
$= (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س})\overrightarrow{ع}$

مثال 1

إذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = 5$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = 8$ ، $\theta = 30°$ أوجد : $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$

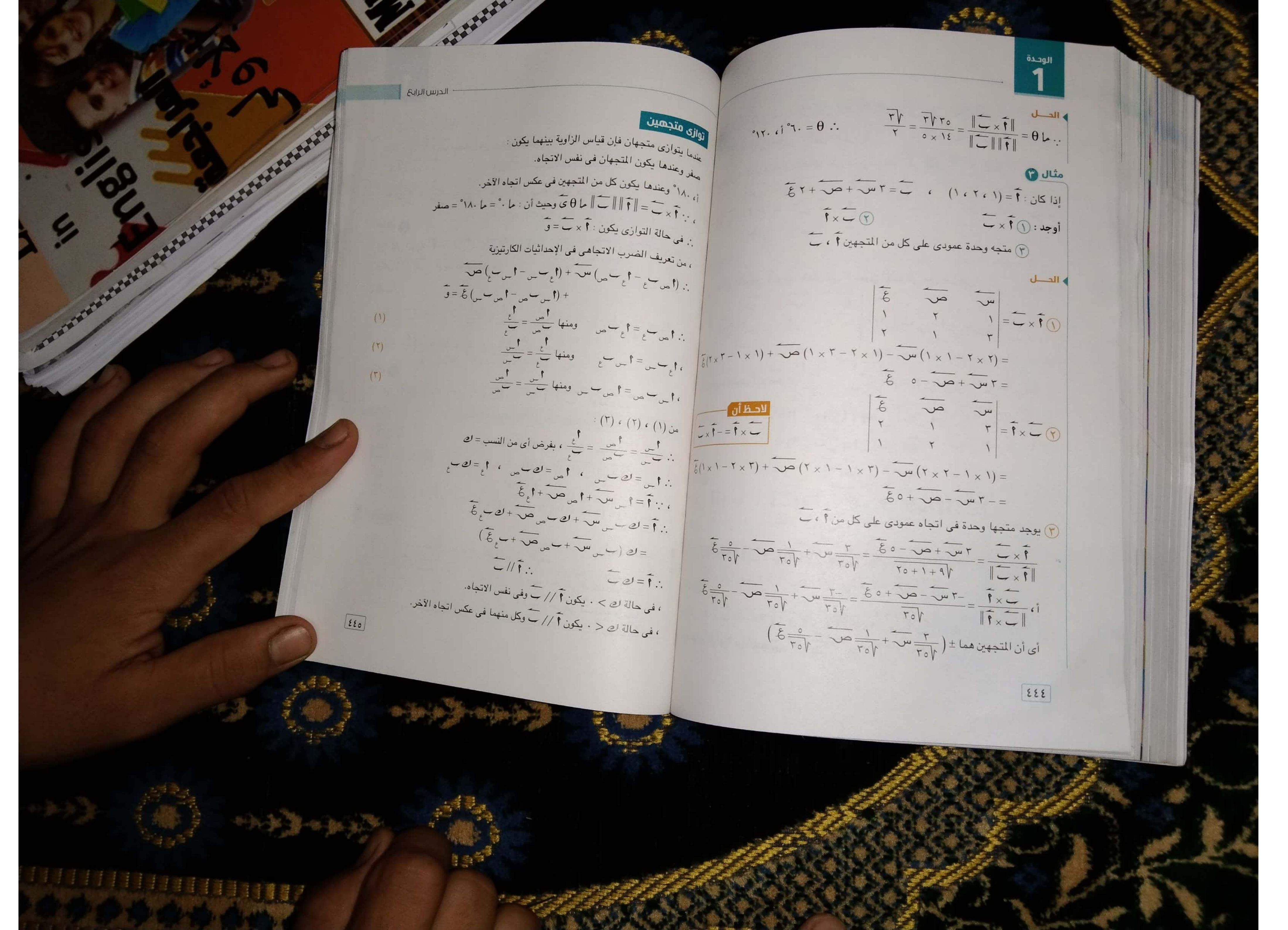
الحل

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\| \text{جا}\,\theta = 5 \times 8 \times \text{جا}\,30° = 20$

مثال 2

إذا كان : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -35\sqrt{3}\,\overrightarrow{ى}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = 14$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = 5$

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$



الحل

$\because \text{جا}\,\theta = \frac{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{٣٥\sqrt{٣}}{١٤ \times ٥} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore \theta = ٦٠^\circ$ أو ١٢٠°

مثال ٣

إذا كان: $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$

أوجد: ① $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ ② $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

③ متجه وحدة عمودى على كل من المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

① $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

$= (٢ \times ٢ - ١ \times ١)\,\overrightarrow{\text{س}} - (١ \times ٢ - ٣ \times ١)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (١ \times ١ - ٣ \times ٢)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= ٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} - ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$

② $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= (١ \times ١ - ٢ \times ٢)\,\overrightarrow{\text{س}} - (٣ \times ١ - ٢ \times ١)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (٣ \times ٢ - ١ \times ١)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= -٣\,\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$

لاحظ أن: $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = -\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

③ يوجد متجها وحدة فى اتجاه عمودى على كل من $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

$\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{٣\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} - ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}}{\sqrt{٩ + ١ + ٢٥}} = \frac{٣}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{ص}} - \frac{٥}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

أو $\frac{\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{-٣\,\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + ٥\,\overrightarrow{\text{ع}}}{\sqrt{٣٥}} = \frac{-٣}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{س}} - \frac{١}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{٥}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

أى أن المتجهين هما $\pm \left(\frac{٣}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \frac{١}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{ص}} - \frac{٥}{\sqrt{٣٥}}\,\overrightarrow{\text{ع}} \right)$

توازى متجهين

عندما يتوازى متجهان فإن قياس الزاوية بينهما يكون:
صفر وعندها يكون المتجهان فى نفس الاتجاه.
أو ١٨٠° وعندها يكون كل من المتجهين فى عكس اتجاه الآخر.

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\,\text{جا}\,\theta\,\overrightarrow{\text{ى}}$ وحيث أن: $\text{جا}\,٠^\circ = \text{جا}\,١٨٠^\circ =$ صفر

$\therefore$ فى حالة التوازى يكون: $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

، من تعريف الضرب الاتجاهى فى الإحداثيات الكارتيزية

$\therefore (\text{أ}_\text{ص}\,\text{ب}_\text{ع} - \text{أ}_\text{ع}\,\text{ب}_\text{ص})\,\overrightarrow{\text{س}} + (\text{أ}_\text{ع}\,\text{ب}_\text{س} - \text{أ}_\text{س}\,\text{ب}_\text{ع})\,\overrightarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_\text{س}\,\text{ب}_\text{ص} - \text{أ}_\text{ص}\,\text{ب}_\text{س})\,\overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\therefore \text{أ}_\text{ص}\,\text{ب}_\text{ع} = \text{أ}_\text{ع}\,\text{ب}_\text{ص}$ ومنها $\frac{\text{أ}_\text{ص}}{\text{ب}_\text{ص}} = \frac{\text{أ}_\text{ع}}{\text{ب}_\text{ع}}$ (١)

، $\text{أ}_\text{ع}\,\text{ب}_\text{س} = \text{أ}_\text{س}\,\text{ب}_\text{ع}$ ومنها $\frac{\text{أ}_\text{س}}{\text{ب}_\text{س}} = \frac{\text{أ}_\text{ع}}{\text{ب}_\text{ع}}$ (٢)

، $\text{أ}_\text{س}\,\text{ب}_\text{ص} = \text{أ}_\text{ص}\,\text{ب}_\text{س}$ ومنها $\frac{\text{أ}_\text{س}}{\text{ب}_\text{س}} = \frac{\text{أ}_\text{ص}}{\text{ب}_\text{ص}}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣):

$\therefore \frac{\text{أ}_\text{س}}{\text{ب}_\text{س}} = \frac{\text{أ}_\text{ص}}{\text{ب}_\text{ص}} = \frac{\text{أ}_\text{ع}}{\text{ب}_\text{ع}}$ ، بفرض أى من النسب = ك

$\therefore \text{أ}_\text{س} = \text{ك}\,\text{ب}_\text{س}$ ، $\text{أ}_\text{ص} = \text{ك}\,\text{ب}_\text{ص}$ ، $\text{أ}_\text{ع} = \text{ك}\,\text{ب}_\text{ع}$

$\because \overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_\text{س}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_\text{ص}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_\text{ع}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

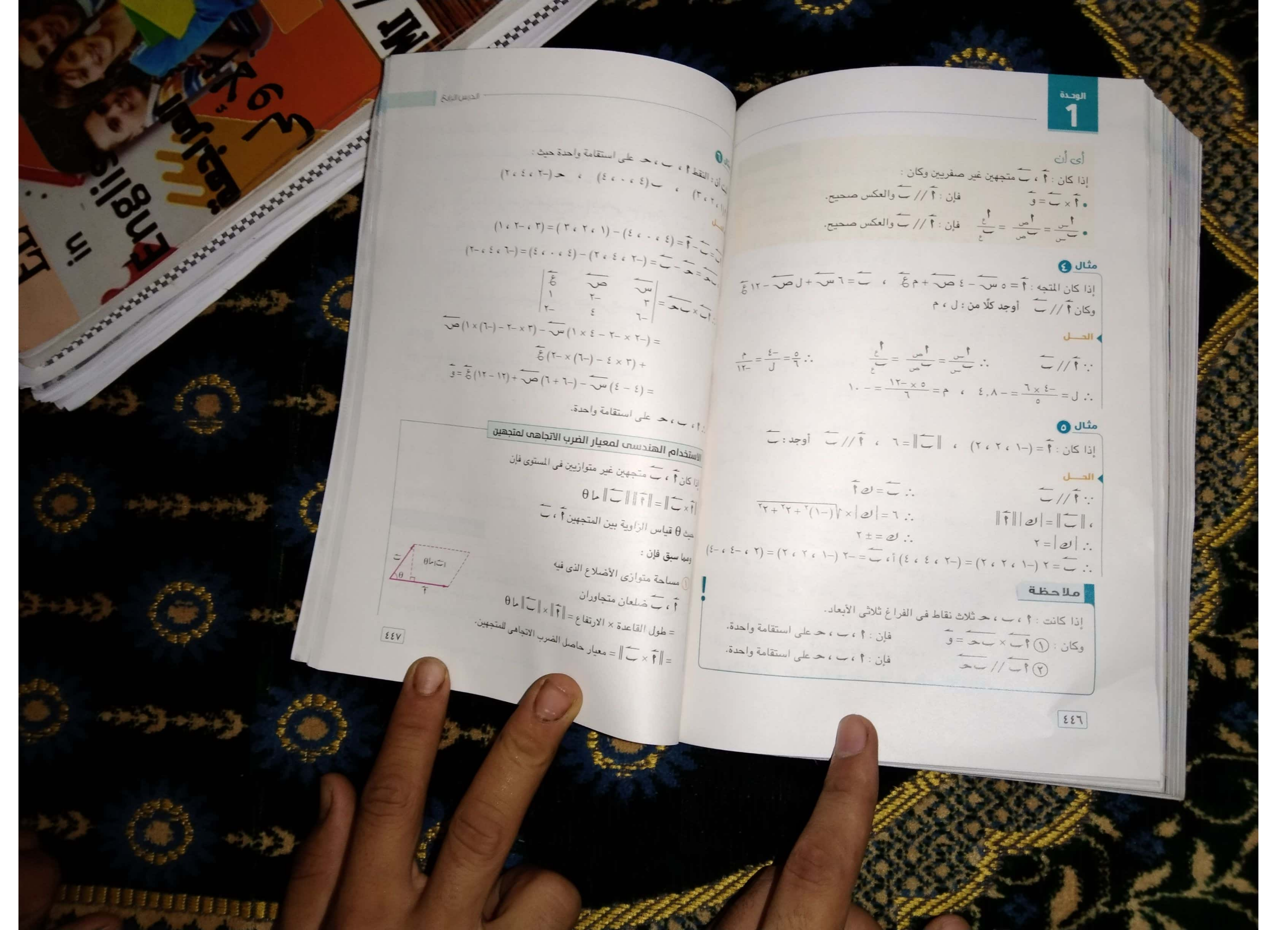
$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\text{ب}_\text{س}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ك}\,\text{ب}_\text{ص}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}\,\text{ب}_\text{ع}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= \text{ك}\,(\text{ب}_\text{س}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_\text{ص}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_\text{ع}\,\overrightarrow{\text{ع}})$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$ $\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$

، فى حالة $\text{ك} > ٠$ يكون $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ وفى نفس الاتجاه.

، فى حالة $\text{ك} < ٠$ يكون $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر.



أي أن

إذا كان: أ ، ب متجهين غير صفريين وكان:

- أ × ب = و فإن: أ // ب والعكس صحيح.
- أس / بس = أص / بص = أع / بع فإن: أ // ب والعكس صحيح.

مثال ٤

إذا كان المتجه: أ = ٥ س − ٤ ص + م ع ، ب = ٦ س + ل ص − ١٢ ع

وكان أ // ب أوجد كلًا من: ل ، م

الحل

∵ أ // ب ∴ أس / بس = أص / بص = أع / بع ∴ ٥ / ٦ = −٤ / ل = م / −١٢

∴ ل = (−٤ × ٦) / ٥ = −٤,٨ ، م = (٥ × −١٢) / ٦ = −١٠

مثال ٥

إذا كان: أ = (−١ ، ٢ ، ٢) ، ||ب|| = ٦ ، أ // ب أوجد: ب

الحل

∵ أ // ب ∴ ب = ك أ

، ||ب|| = |ك| ||أ|| ∴ ٦ = |ك| × √((−١)² + ٢² + ٢²)

∴ |ك| = ٢ ∴ ك = ±٢

∴ ب = ٢ (−١ ، ٢ ، ٢) = (−٢ ، ٤ ، ٤) أو ب = −٢ (−١ ، ٢ ، ٢) = (٢ ، −٤ ، −٤)

ملاحظة

إذا كانت: أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط في الفراغ ثلاثي الأبعاد.

وكان: ① أب × ب حـ = و فإن: أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

② أب // ب حـ فإن: أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

مثال ٦

[أثبت] أن: النقط أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة حيث:

أ(١ ، ٢ ، ٣) ، ب(٤ ، ٠ ، ٤) ، حـ(−٢ ، ٤ ، ٢)

الحل

أب = ب − أ = (٤ ، ٠ ، ٤) − (١ ، ٢ ، ٣) = (٣ ، −٢ ، ١)

ب حـ = حـ − ب = (−٢ ، ٤ ، ٢) − (٤ ، ٠ ، ٤) = (−٦ ، ٤ ، −٢)

أب × ب حـ = | س ص ع ؛ ٣ −٢ ١ ؛ −٦ ٤ −٢ |

= (−٢ × −٢ − ٤ × ١) س − (٣ × −٢ − (−٦) × ١) ص

+ (٣ × ٤ − (−٦) × (−٢)) ع

= (٤ − ٤) س − (−٦ + ٦) ص + (١٢ − ١٢) ع = و

∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

الاستخدام الهندسي لمعيار الضرب الاتجاهي لمتجهين

إذا كان أ ، ب متجهين غير متوازيين في المستوى فإن

||أ × ب|| = ||أ|| ||ب|| جا θ

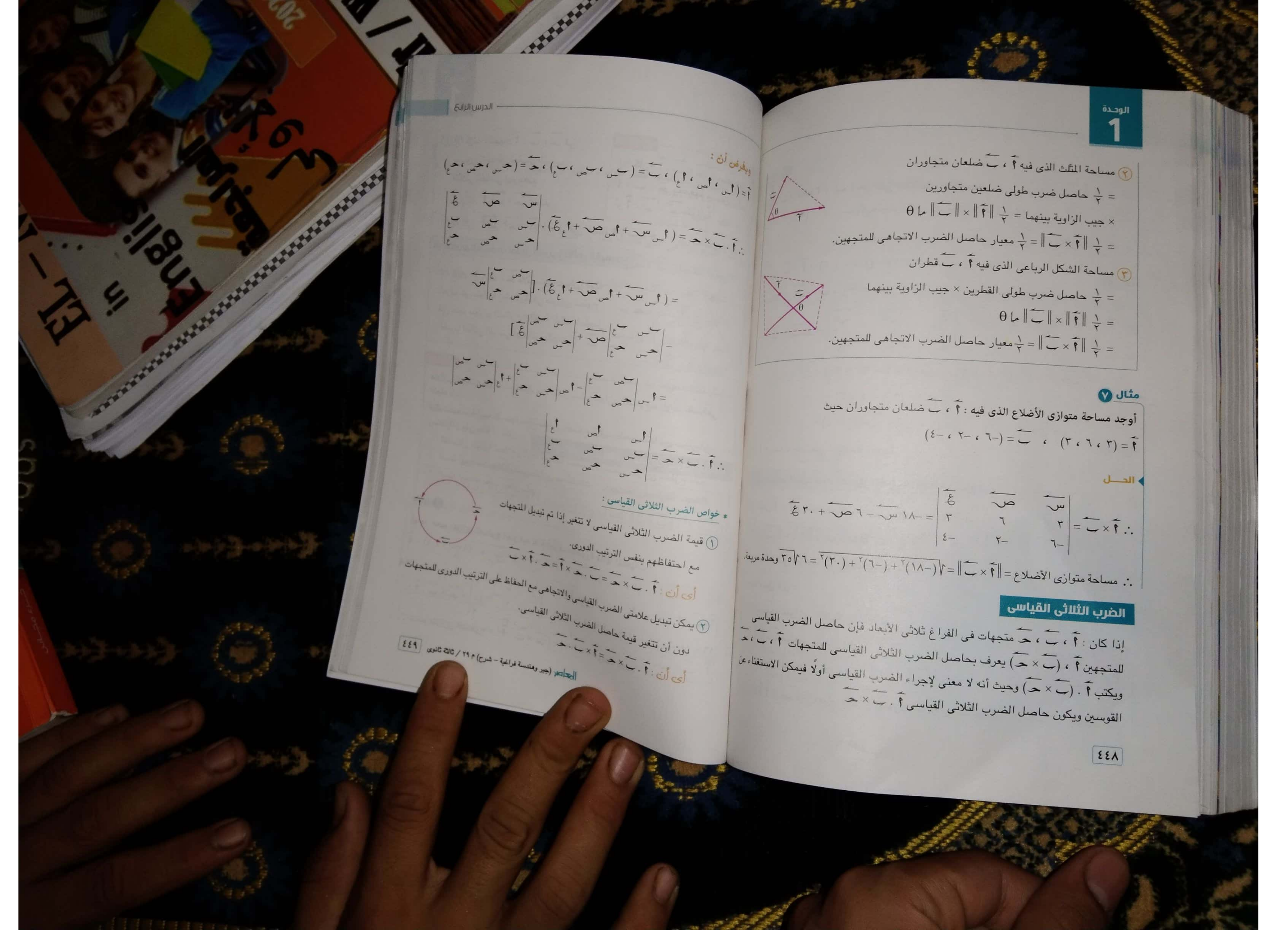
حيث θ قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب

ومما سبق فإن:

① مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه أ ، ب ضلعان متجاوران

= طول القاعدة × الارتفاع = ||أ|| × ||ب|| جا θ

= ||أ × ب|| = معيار حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين.



الوحدة 1

(٢) مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى ضلعين متجاورين

× جيب الزاوية بينهما = $\frac{1}{2}$ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \times \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جا θ

= $\frac{1}{2}$ $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = $\frac{1}{2}$ معيار حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين.

(٣) مساحة الشكل الرباعى الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ قطران

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى القطرين × جيب الزاوية بينهما

= $\frac{1}{2}$ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \times \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جا θ

= $\frac{1}{2}$ $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|$ = $\frac{1}{2}$ معيار حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين.

مثال ٧

أوجد مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ضلعان متجاوران حيث

$\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، ٦ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-٦ ، -٢ ، -٤)$

الحل

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٣ & ٦ & ٣ \\ -٦ & -٢ & -٤ \end{vmatrix} = -١٨ \overrightarrow{\text{س}} - ٦ \overrightarrow{\text{ص}} + ٣٠ \overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع $= \|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{(-١٨)^٢ + (-٦)^٢ + (٣٠)^٢} = ٦\sqrt{٣٥}$ وحدة مربعة.

الضرب الثلاثى القياسى

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ متجهات فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن حاصل الضرب القياسى للمتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $(\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}})$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى للمتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ويكتب $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}})$ وحيث أنه لا معنى لإجراء الضرب القياسى أولًا فيمكن الاستغناء عن القوسين ويكون حاصل الضرب الثلاثى القياسى $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$

وبفرض أن :

$\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} = (\text{حـ}_{\text{س}} ، \text{حـ}_{\text{ص}} ، \text{حـ}_{\text{ع}})$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = (\text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ص}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

$= (\text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}) \cdot \left[\begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{ص}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} - \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix} \overrightarrow{\text{ص}} + \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ص}} \end{vmatrix} \overrightarrow{\text{ع}} \right]$

$= \text{أ}_{\text{س}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{ص}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix} - \text{أ}_{\text{ص}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix} + \text{أ}_{\text{ع}} \begin{vmatrix} \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ص}} \end{vmatrix}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{حـ}_{\text{س}} & \text{حـ}_{\text{ص}} & \text{حـ}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

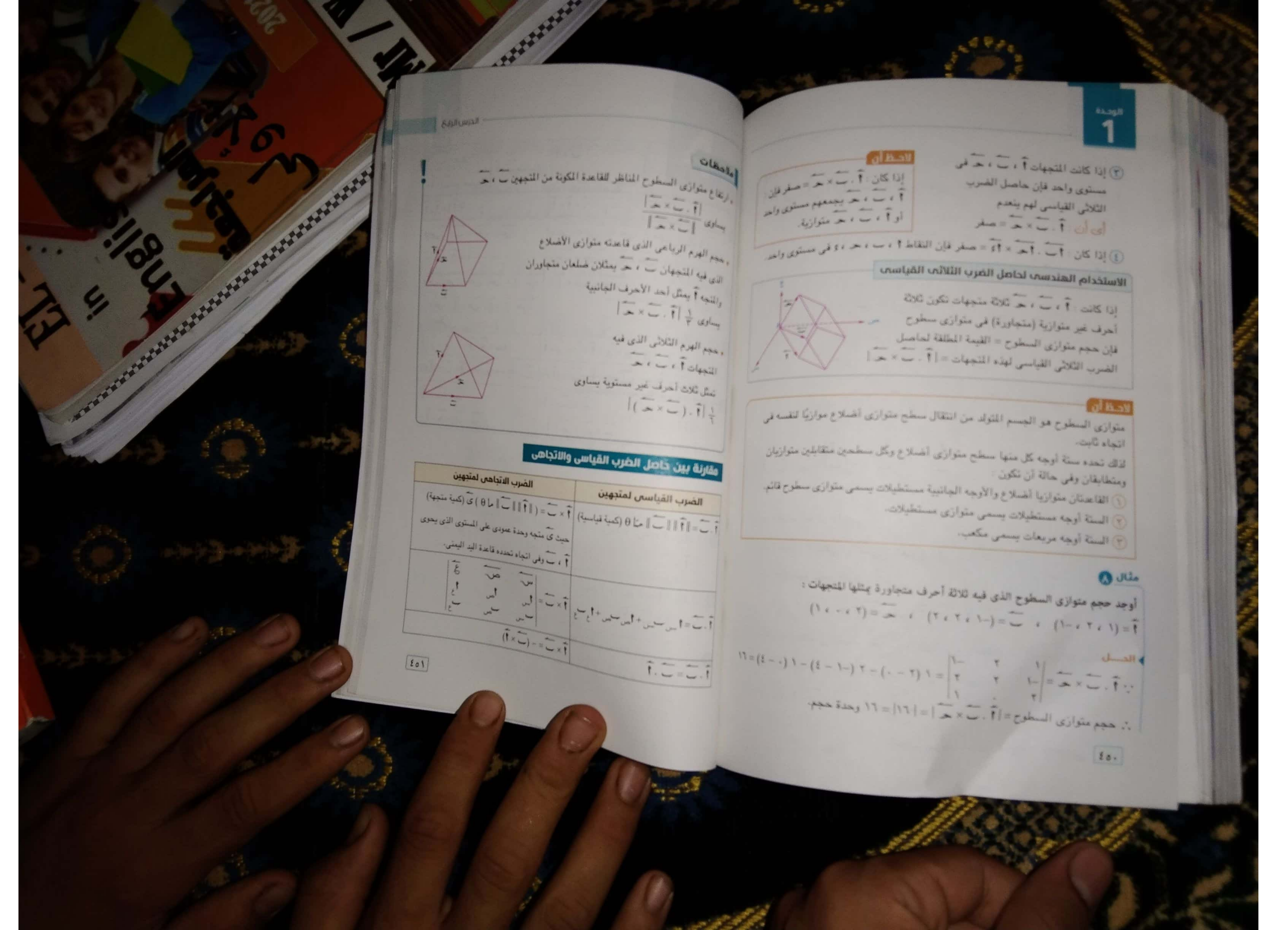
* **خواص الضرب الثلاثى القياسى :**

(١) قيمة الضرب الثلاثى القياسى لا تتغير إذا تم تبديل المتجهات مع احتفاظهم بنفس الترتيب الدورى.

أى أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

(٢) يمكن تبديل علامتى الضرب القياسى والاتجاهى مع الحفاظ على الترتيب الدورى للمتجهات دون أن تتغير قيمة حاصل الضرب الثلاثى القياسى.

أى أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}}$



الوحدة 1

(٣) إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ في مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي لهم ينعدم

أي أن: $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} =$ صفر

لاحظ أن

إذا كان: $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} =$ صفر فإن: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ يجمعهم مستوى واحد أو $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ متوازية.

(٤) إذا كان: $\overrightarrow{أب} \cdot \overrightarrow{أجـ} \times \overrightarrow{أد} =$ صفر فإن النقاط أ ، ب ، جـ ، د في مستوى واحد.

الاستخدام الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي

إذا كانت: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أحرف غير متوازية (متجاورة) في متوازي سطوح فإن حجم متوازي السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثي القياسي لهذه المتجهات $= |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}|$

لاحظ أن

متوازي السطوح هو الجسم المتولد من انتقال سطح متوازي أضلاع موازيًا لنفسه في اتجاه ثابت.

لذلك تحده ستة أوجه كل منها سطح متوازي أضلاع وكل سطحين متقابلين متوازيان ومتطابقان وفي حالة أن تكون:

(١) القاعدتان متوازيا أضلاع والأوجه الجانبية مستطيلات يسمى متوازي سطوح قائم.

(٢) الستة أوجه مستطيلات يسمى متوازي مستطيلات.

(٣) الستة أوجه مربعات يسمى مكعب.

مثال ٨

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات:

$\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-١ ، ٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (٢ ، ٠ ، ١)$

الحل

$\because \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١(٢ - ٠) - ٢(-١ - ٤) - ١(٠ - ٤) = ١٦$

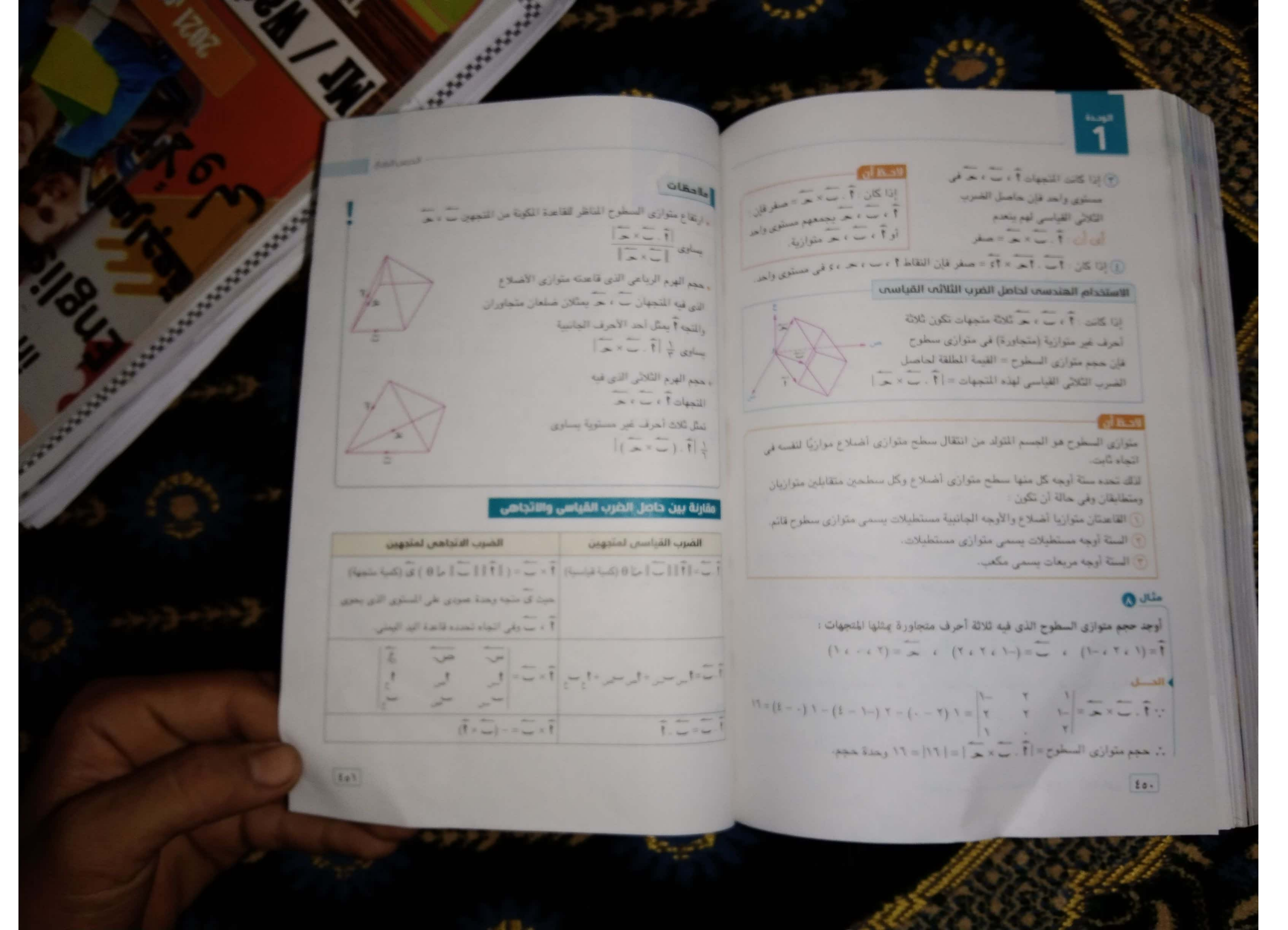
$\therefore$ حجم متوازي السطوح $= |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}| = |١٦| = ١٦$ وحدة حجم.

ملاحظات

- ارتفاع متوازي السطوح المناظر للقاعدة المكونة من المتجهين $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ يساوي $\dfrac{|\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}|}{\|\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}\|}$
- حجم الهرم الرباعي الذي قاعدته متوازي الأضلاع الذي فيه المتجهان $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ يمثلان ضلعان متجاوران والمتجه $\overrightarrow{أ}$ يمثل أحد الأحرف الجانبية يساوي $\frac{١}{٣} |\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ}|$
- حجم الهرم الثلاثي الذي فيه المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ تمثل ثلاث أحرف غير مستوية يساوي $\frac{١}{٦} |\overrightarrow{أ} \cdot (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ})|$

مقارنة بين حاصل الضرب القياسي والاتجاهي

الضرب القياسي لمتجهين	الضرب الاتجاهي لمتجهين
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\| جتا\theta$ (كمية قياسية)	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\| جا\theta) \overrightarrow{ى}$ (كمية متجهة) حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يحوي $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ وفي اتجاه تحدده قاعدة اليد اليمنى.
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \end{vmatrix}$
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -(\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$



الوحدة 1

③ إذا كانت المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ في مستوى واحد فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي لهم ينعدم

أي أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \text{صفر}$

لاحظ أن

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \text{صفر}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ يجمعهم مستوى واحد أو $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ متوازية.

④ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{أء}} = \text{صفر}$ فإن النقاط أ ، ب ، حـ ، ء في مستوى واحد.

الاستخدام الهندسي لحاصل الضرب الثلاثي القياسي

إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أحرف غير متوازية (متجاورة) في متوازي سطوح فإن حجم متوازي السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثي القياسي لهذه المتجهات $= |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}|$

لاحظ أن

متوازي السطوح هو الجسم المتولد من انتقال سطح متوازي أضلاع موازيًا لنفسه في اتجاه ثابت.

لذلك تحده ستة أوجه كل منها سطح متوازي أضلاع وكل سطحين متقابلين متوازيان ومتطابقان وفي حالة أن تكون :

① القاعدتان متوازيا أضلاع والأوجه الجانبية مستطيلات يسمى متوازي سطوح قائم.

② الستة أوجه مستطيلات يسمى متوازي مستطيلات.

③ الستة أوجه مربعات يسمى مكعب.

مثال ⑧

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات :

$\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (-١ ، ٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}} = (٢ ، ٠ ، ١)$

الحل

$\because \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ (٢ - ٠) - ٢ (-١ - ٤) - ١ (٠ - ٤) = ١٦$

$\therefore$ حجم متوازي السطوح $= |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}| = |١٦| = ١٦$ وحدة حجم.

ملاحظات

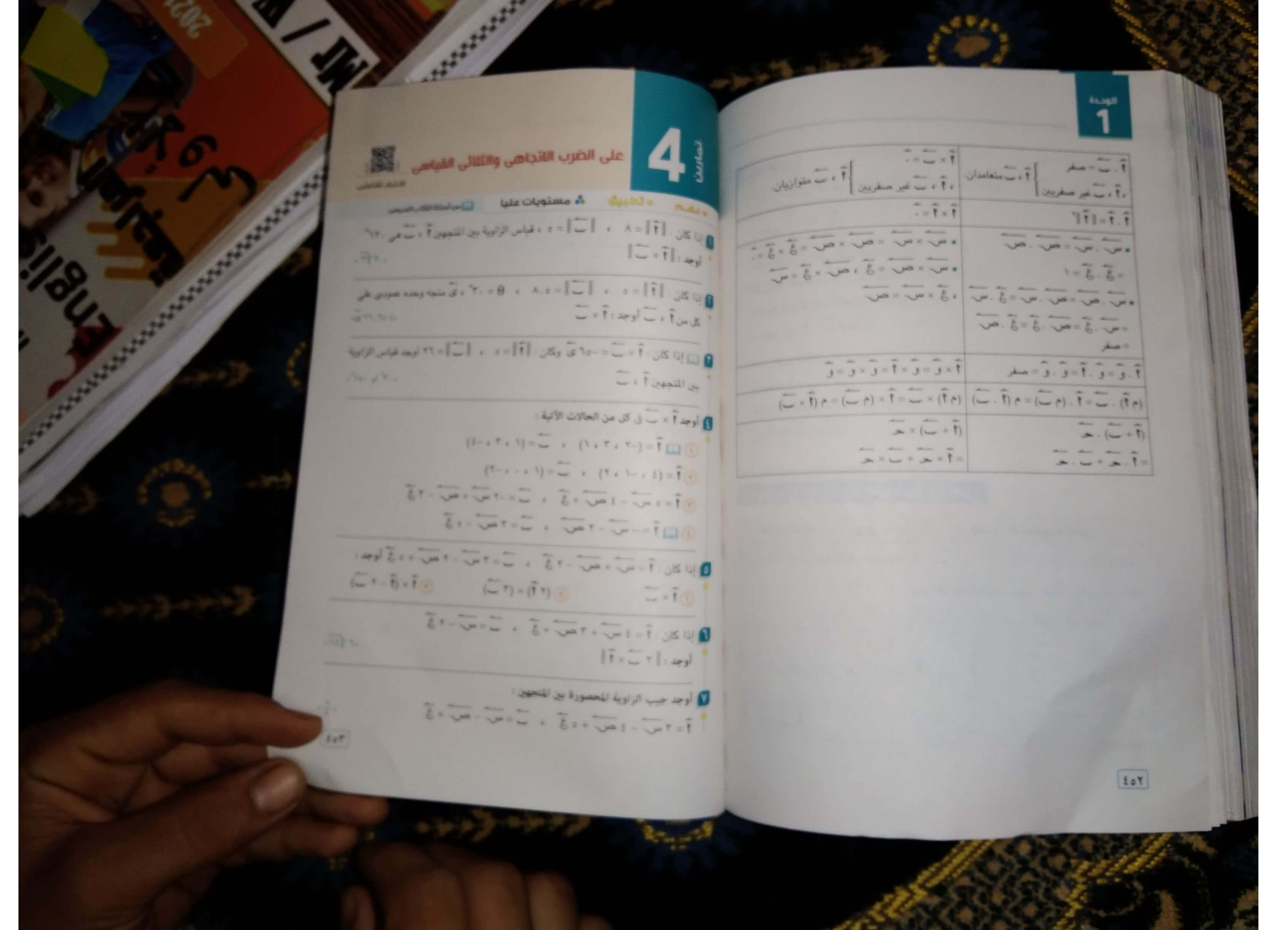
• ارتفاع متوازي السطوح المناظر للقاعدة المكونة من المتجهين $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ يساوي $\dfrac{|\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}|}{\|\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}\|}$

• حجم الهرم الرباعي الذي قاعدته متوازي الأضلاع الذي فيه المتجهان $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ يمثلان ضلعان متجاوران والمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ يمثل أحد الأحرف الجانبية يساوي $\frac{١}{٣} |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}|$

• حجم الهرم الثلاثي الذي فيه المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ تمثل ثلاث أحرف غير مستوية يساوي $\frac{١}{٦} |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}})|$

مقارنة بين حاصل الضرب القياسي والاتجاهي

الضرب القياسي لمتجهين	الضرب الاتجاهي لمتجهين
$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا θ (كمية قياسية)	$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جا $\theta) \overrightarrow{\text{ى}}$ (كمية متجهة) حيث $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يحوي $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ وفي اتجاه تحدده قاعدة اليد اليمنى
$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{س} \text{ب}_{س} + \text{أ}_{ص} \text{ب}_{ص} + \text{أ}_{ع} \text{ب}_{ع}$	$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \text{أ}_{س} & \text{أ}_{ص} & \text{أ}_{ع} \\ \text{ب}_{س} & \text{ب}_{ص} & \text{ب}_{ع} \end{vmatrix}$
$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$	$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -(\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}})$



الوحدة 1

$\overline{أ} \cdot \overline{ب} =$ صفر $\overline{أ}, \overline{ب}$ غير صفريين	$\overline{أ}, \overline{ب}$ متعامدان	$\overline{أ} \times \overline{ب} = \overline{0}$ $\overline{أ}, \overline{ب}$ غير صفريين	$\overline{أ}, \overline{ب}$ متوازيان.
$\overline{أ} \cdot \overline{أ} = \|\overline{أ}\|^2$		$\overline{أ} \times \overline{أ} = \overline{0}$	
• $\overline{س} \cdot \overline{س} = \overline{ص} \cdot \overline{ص}$ $= \overline{ع} \cdot \overline{ع} = 1$ • $\overline{س} \cdot \overline{ص} = \overline{ص} \cdot \overline{س} = \overline{ع} \cdot \overline{س}$ $= \overline{س} \cdot \overline{ع} = \overline{ع} \cdot \overline{ص}$ $=$ صفر		• $\overline{س} \times \overline{س} = \overline{ص} \times \overline{ص} = \overline{ع} \times \overline{ع} = \overline{0}$ • $\overline{س} \times \overline{ص} = \overline{ع}$ ، $\overline{ص} \times \overline{ع} = \overline{س}$ ، $\overline{ع} \times \overline{س} = \overline{ص}$	
$\overline{أ} \cdot \overline{و} = \overline{و} \cdot \overline{أ} = \overline{و} \cdot \overline{و} =$ صفر		$\overline{أ} \times \overline{و} = \overline{و} \times \overline{أ} = \overline{و} \times \overline{و} = \overline{و}$	
$(م\overline{أ}) \cdot \overline{ب} = \overline{أ} \cdot (م\overline{ب}) = م(\overline{أ} \cdot \overline{ب})$		$(م\overline{أ}) \times \overline{ب} = \overline{أ} \times (م\overline{ب}) = م(\overline{أ} \times \overline{ب})$	
$(\overline{أ} + \overline{ب}) \cdot \overline{حـ}$ $= \overline{أ} \cdot \overline{حـ} + \overline{ب} \cdot \overline{حـ}$		$(\overline{أ} + \overline{ب}) \times \overline{حـ}$ $= \overline{أ} \times \overline{حـ} + \overline{ب} \times \overline{حـ}$	

٤٥٢

تمارين 4 على الضرب الاتجاهي والثلاثي القياسي

• تذكر • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

١ إذا كان : $\|\overline{أ}\| = 8$ ، $\|\overline{ب}\| = 5$ ، قياس الزاوية بين المتجهين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ هي $120°$

أوجد : $\|\overline{أ} \times \overline{ب}\|$

٢ إذا كان : $\|\overline{أ}\| = 5$ ، $\|\overline{ب}\| = 8.5$ ، $\theta = 30°$ ، $\overline{ى}$ متجه وحدة عمودي على كل من $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$ أوجد : $\overline{أ} \times \overline{ب}$

٣ إذا كان : $\overline{أ} \times \overline{ب} = -65\overline{ى}$ وكان : $\|\overline{أ}\| = 5$ ، $\|\overline{ب}\| = 26$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overline{أ}$ ، $\overline{ب}$

٤ أوجد $\overline{أ} \times \overline{ب}$ في كل من الحالات الآتية :

(١) $\overline{أ} = (-2 ، 3 ، 1)$ ، $\overline{ب} = (1 ، 2 ، -4)$

(٢) $\overline{أ} = (4 ، -1 ، 2)$ ، $\overline{ب} = (1 ، 0 ، -2)$

(٣) $\overline{أ} = 5\overline{س} - 4\overline{ص} + \overline{ع}$ ، $\overline{ب} = -2\overline{س} + \overline{ص} - 2\overline{ع}$

(٤) $\overline{أ} = -\overline{س} - 2\overline{ص}$ ، $\overline{ب} = 2\overline{ص} - 4\overline{ع}$

٥ إذا كان : $\overline{أ} = \overline{س} + \overline{ص} - 2\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = 3\overline{س} - 2\overline{ص} + 4\overline{ع}$ أوجد :

(١) $\overline{أ} \times \overline{ب}$ (٢) $(2\overline{أ}) \times (3\overline{ب})$ (٣) $\overline{أ} \times (\overline{أ} - 2\overline{ب})$

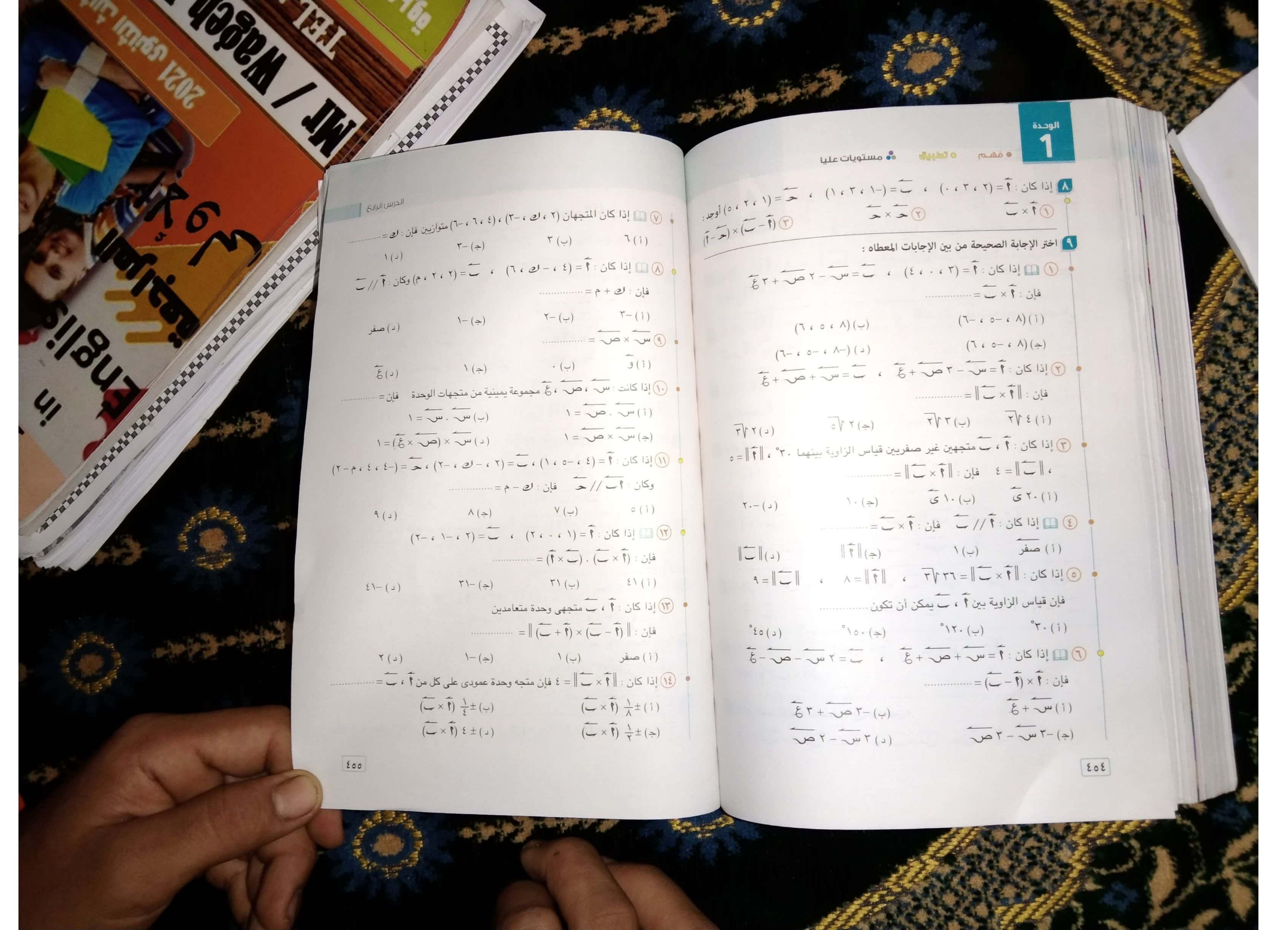
٦ إذا كان : $\overline{أ} = 4\overline{س} + 3\overline{ص} + \overline{ع}$ ، $\overline{ب} = \overline{س} - 2\overline{ع}$

أوجد : $\|2\overline{ب} \times \overline{أ}\|$

٧ أوجد جيب الزاوية المحصورة بين المتجهين :

$\overline{أ} = 2\overline{س} - 4\overline{ص} + 5\overline{ع}$ ، $\overline{ب} = \overline{س} - \overline{ص} + \overline{ع}$

٤٥٣



الوحدة 1 — فهم • تطبيق • مستويات عليا

٨ إذا كان : أ = (٢ ، ٣ ، ٠) ، ب = (-١ ، ٣ ، ١) ، حـ = (١ ، ٢ ، ٥) أوجد :
① أ × ب ② حـ × حـ ③ (أ - ب) × (حـ - أ)

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

① إذا كان : أ = (٣ ، ٠ ، ٤) ، ب = س - ٢ ص + ٣ ع
فإن : أ × ب = ...
(أ) (٨ ، -٥ ، -٦) (ب) (٨ ، ٥ ، ٦)
(جـ) (٨ ، -٥ ، ٦) (د) (-٨ ، -٥ ، -٦)

② إذا كان : أ = س - ٣ ص + ع ، ب = س + ص + ع
فإن : ‖أ × ب‖ = ...
(أ) ٤ √٢ (ب) ٣ √٢ (جـ) ٢ √٥ (د) ٢ √٣

③ إذا كان : أ ، ب متجهين غير صفريين قياس الزاوية بينهما ٣٠° ، ‖أ‖ = ٥ ، ‖ب‖ = ٤ فإن : ‖أ × ب‖ = ...
(أ) ٢٠ ى (ب) ١٠ ى (جـ) ١٠ (د) -٢٠

④ إذا كان : أ // ب فإن : أ × ب = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ‖أ‖ (د) ‖ب‖

⑤ إذا كان : ‖أ × ب‖ = ٣٦ √٣ ، ‖أ‖ = ٨ ، ‖ب‖ = ٩
فإن قياس الزاوية بين أ ، ب يمكن أن تكون ....
(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٥°

⑥ إذا كان : أ = س + ص + ع ، ب = ٢ س - ص - ع
فإن : أ × (أ - ب) = ...
(أ) س + ع (ب) -٣ ص + ٣ ع
(جـ) -٣ س - ٣ ص (د) ٣ س - ٢ ص

٤٥٤

الدرس الرابع

⑦ إذا كان المتجهان (٢ ، ك ، -٣) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيين فإن : ك = ...
(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ١

⑧ إذا كان : أ = (٤ ، -ك ، ٦) ، ب = (٢ ، ٢ ، م) وكان : أ // ب
فإن : ك + م = ...
(أ) -٣ (ب) -٢ (جـ) -١ (د) صفر

⑨ س × ص = ...
(أ) و (ب) ٠ (جـ) ١ (د) ع

⑩ إذا كانت : س ، ص ، ع مجموعة يمينية من متجهات الوحدة فإن = ...
(أ) س . ص = ١ (ب) س . س = ١
(جـ) س × ص = ١ (د) س × (ص × ع) = ١

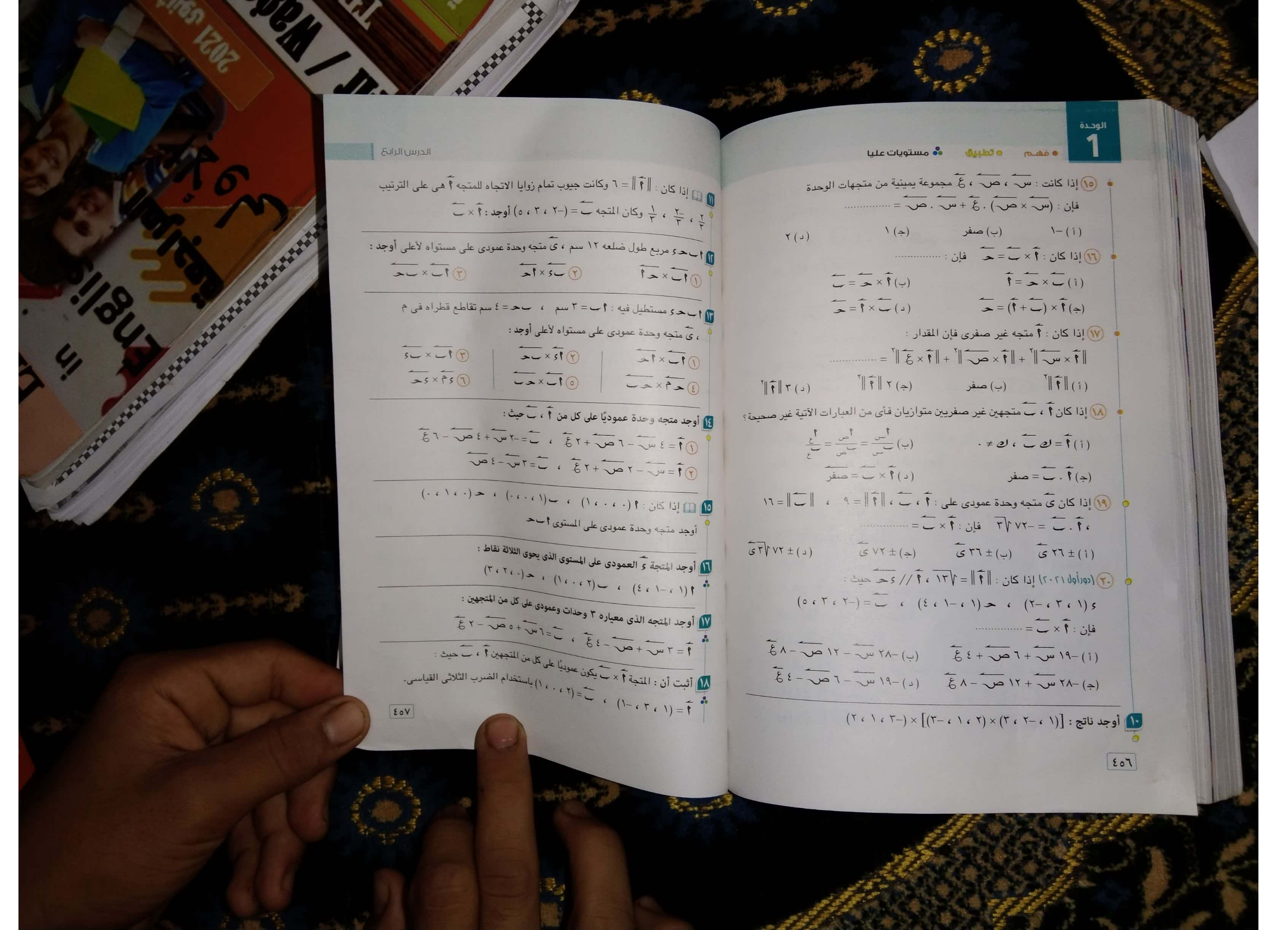
⑪ إذا كان : أ = (٤ ، -٥ ، ١) ، ب = (٢ ، -ك ، -٢) ، حـ = (-٤ ، ٤ ، م - ٢)
وكان : أ ب // حـ فإن : ك - م = ...
(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

⑫ إذا كان : أ = (١ ، ٠ ، ٢) ، ب = (٢ ، -١ ، -٢)
فإن : (أ × ب) . (ب × أ) = ...
(أ) ٤١ (ب) ٣١ (جـ) -٣١ (د) -٤١

⑬ إذا كان : أ ، ب متجهى وحدة متعامدين
فإن : ‖(أ - ب) × (أ + ب)‖ = ...
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) -١ (د) ٢

⑭ إذا كان : ‖أ × ب‖ = ٤ فإن متجه وحدة عمودى على كل من أ ، ب = ...
(أ) ± ١/٨ (أ × ب) (ب) ± ١/٤ (أ × ب)
(جـ) ± ١/٢ (أ × ب) (د) ± ٤ (أ × ب)

٤٥٥



(١٥) إذا كانت: $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة فإن: $(\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص}) \cdot \overrightarrow{ع} + \overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} =$ ....

(أ) -1 (ب) صفر (جـ) 1 (د) 2

(١٦) إذا كان: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{جـ}$ فإن: ....

(أ) $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{أ}$ (ب) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ب}$

(جـ) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}) = \overrightarrow{جـ}$ (د) $\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{جـ}$

(١٧) إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ متجه غير صفرى فإن المقدار: $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{س}\|^2 + \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ص}\|^2 + \|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ع}\|^2 =$ ....

(أ) $\|\overrightarrow{أ}\|^2$ (ب) صفر (جـ) $2\|\overrightarrow{أ}\|^2$ (د) $3\|\overrightarrow{أ}\|^2$

(١٨) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين غير صفريين متوازيان فأى من العبارات الآتية غير صحيحة؟

(أ) $\overrightarrow{أ} = ك\,\overrightarrow{ب}$ ، $ك \neq 0$ (ب) $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

(جـ) $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} =$ صفر (د) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ صفر

(١٩) إذا كان $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على: $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\|\overrightarrow{أ}\| = 9$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = 16$ ، $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = -72\sqrt{3}$ فإن: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ ....

(أ) $\pm 26\,\overrightarrow{ى}$ (ب) $\pm 36\,\overrightarrow{ى}$ (جـ) $\pm 72\,\overrightarrow{ى}$ (د) $\pm 72\sqrt{3}\,\overrightarrow{ى}$

(٢٠) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان: $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{13}$ ، $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ءجـ}$ حيث: ء$(1 ، 3 ، -2)$ ، جـ$(1 ، -1 ، 4)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-2 ، 3 ، 5)$

فإن: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} =$ ....

(أ) $-19\overrightarrow{س} + 6\overrightarrow{ص} + 4\overrightarrow{ع}$ (ب) $-28\overrightarrow{س} - 12\overrightarrow{ص} - 8\overrightarrow{ع}$

(جـ) $-28\overrightarrow{س} + 12\overrightarrow{ص} - 8\overrightarrow{ع}$ (د) $-19\overrightarrow{س} - 6\overrightarrow{ص} - 4\overrightarrow{ع}$

١٠ أوجد ناتج: $[(1 ، -2 ، 3) \times (2 ، 1 ، -3)] \times (-3 ، 1 ، 2)$

١١ إذا كان: $\|\overrightarrow{أ}\| = 6$ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى على الترتيب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{-2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ وكان المتجه $\overrightarrow{ب} = (-2 ، 3 ، 5)$ أوجد: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

١٢ أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستواه لأعلى أوجد:

(١) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$ (٢) $\overrightarrow{بء} \times \overrightarrow{أجـ}$ (٣) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بجـ}$

١٣ أ ب جـ ء مستطيل فيه: أب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم تقاطع قطراه فى م ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستواه لأعلى أوجد:

(١) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ}$ (٢) $\overrightarrow{أء} \times \overrightarrow{بجـ}$ (٣) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بء}$

(٤) $\overrightarrow{جـم} \times \overrightarrow{جـب}$ (٥) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{جـب}$ (٦) $\overrightarrow{ءم} \times \overrightarrow{ءجـ}$

١٤ أوجد متجه وحدة عموديًا على كل من $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حيث:

(١) $\overrightarrow{أ} = 4\overrightarrow{س} - 6\overrightarrow{ص} + 2\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = -2\overrightarrow{س} + 4\overrightarrow{ص} - 6\overrightarrow{ع}$

(٢) $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} - 2\overrightarrow{ص} + 2\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = 3\overrightarrow{س} - 4\overrightarrow{ص}$

١٥ إذا كان: أ$(0 ، 0 ، 1)$ ، ب$(1 ، 0 ، 0)$ ، جـ$(0 ، 1 ، 0)$

أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى أ ب جـ

١٦ أوجد المتجه $\overrightarrow{ء}$ العمودى على المستوى الذى يحوى الثلاثة نقاط:

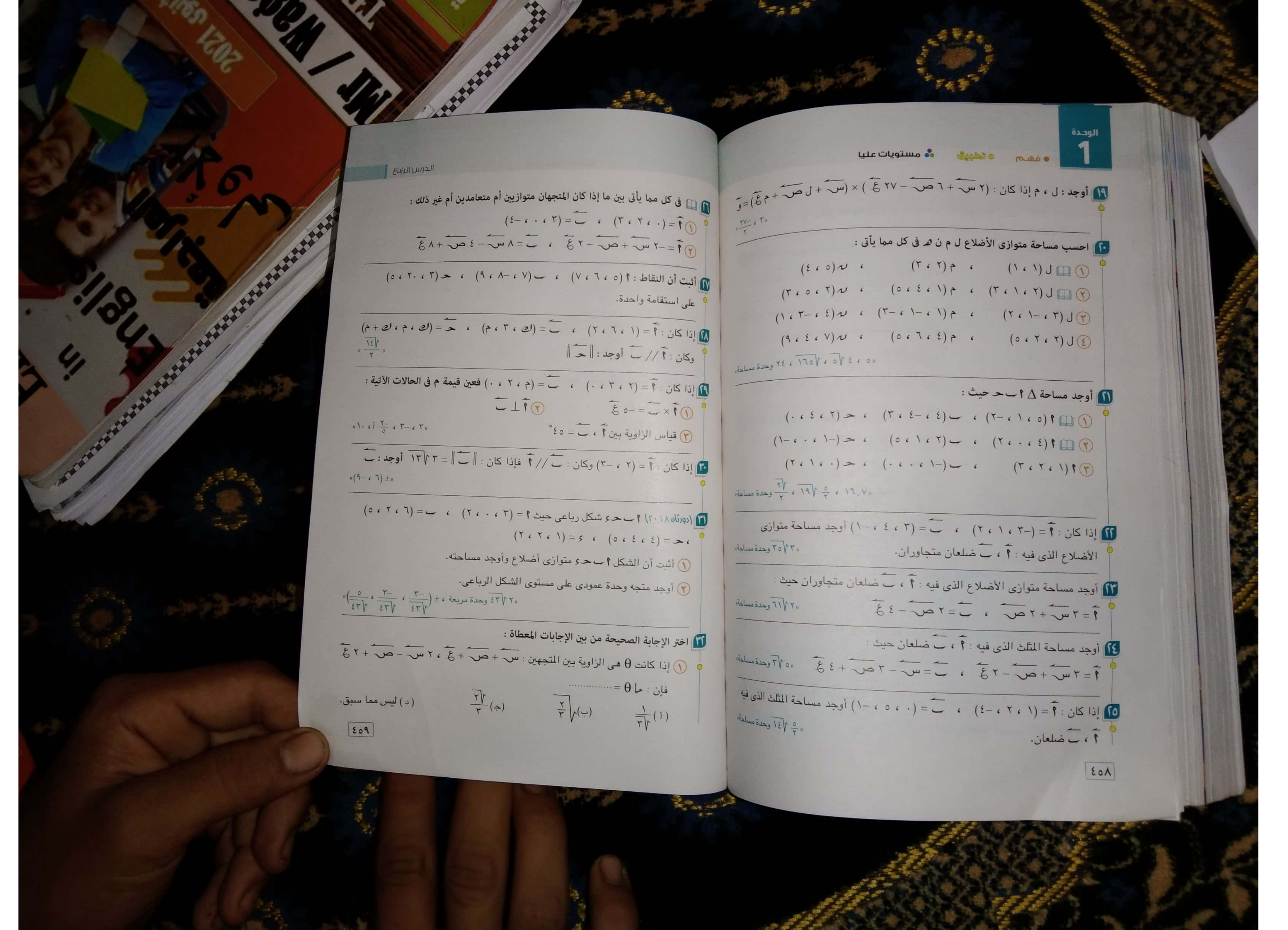
أ$(1 ، -1 ، 4)$ ، ب$(2 ، 0 ، 1)$ ، جـ$(0 ، 2 ، 3)$

١٧ أوجد المتجه الذى معياره ٣ وحدات وعمودى على كل من المتجهين:

$\overrightarrow{أ} = 3\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - 4\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = 6\overrightarrow{س} + 5\overrightarrow{ص} - 2\overrightarrow{ع}$

١٨ أثبت أن: المتجه $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ يكون عموديًا على كل من المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ حيث:

$\overrightarrow{أ} = (1 ، 3 ، -1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (2 ، 0 ، 1)$ باستخدام الضرب الثلاثى القياسى.



19 أوجد : ل ، م إذا كان : (٢ س + ٦ ص − ٢٧ ع) × (س + ل ص + م ع) = و
«٣ ، −٢٧/٢»

20 احسب مساحة متوازي الأضلاع ل م ن هـ في كل مما يأتي :
① ل(١ ، ١) ، م(٢ ، ٣) ، هـ(٥ ، ٤)
② ل(٢ ، ١ ، ٣) ، م(١ ، ٤ ، ٥) ، هـ(٢ ، ٥ ، ٣)
③ ل(٣ ، −١ ، ٢) ، م(١ ، −١ ، −٣) ، هـ(٤ ، −٣ ، ١)
④ ل(٢ ، ٢ ، ٥) ، م(٤ ، ٦ ، ٥) ، هـ(٧ ، ٤ ، ٩)
«٥ ، ٤ √٥ ، √١٦٥ ، ٢٤ وحدة مساحة»

21 أوجد مساحة Δ أ ب حـ حيث :
① أ(٥ ، ١ ، −٢) ، ب(٤ ، −٤ ، ٣) ، حـ(٢ ، ٤ ، ٠)
② أ(٤ ، ٠ ، ٢) ، ب(٢ ، ١ ، ٥) ، حـ(−١ ، ٠ ، −١)
③ أ(١ ، ٢ ، ٣) ، ب(−١ ، ٠ ، ٠) ، حـ(٠ ، ١ ، ٢)
«١٦٫٧ ، ٥/٢ √١٩ ، √٢/٢ وحدة مساحة»

22 إذا كان : أ = (−٣ ، ١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٤ ، −١) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه : أ ، ب ضلعان متجاوران.
«٣ √٣٥ وحدة مساحة»

23 أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه : أ ، ب ضلعان متجاوران حيث :
أ = ٣ س + ٢ ص ، ب = ٢ ص − ٤ ع
«٢ √٦١ وحدة مساحة»

24 أوجد مساحة المثلث الذي فيه : أ ، ب ضلعان حيث :
أ = ٣ س + ص − ٢ ع ، ب = س − ٣ ص + ٤ ع
«٥ √٣ وحدة مساحة»

25 إذا كان : أ = (١ ، ٢ ، −٤) ، ب = (٠ ، ٥ ، −١) أوجد مساحة المثلث الذي فيه أ ، ب ضلعان.
«٥/٢ √١٤ وحدة مساحة»

26 في كل مما يأتي بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك :
① أ = (٠ ، ٢ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٠ ، −٤)
② أ = −٢ س + ص − ٢ ع ، ب = ٨ س − ٤ ص + ٨ ع

27 أثبت أن النقاط : أ(٥ ، ٦ ، ٧) ، ب(٧ ، −٨ ، ٩) ، حـ(٣ ، ٢٠ ، ٥) على استقامة واحدة.

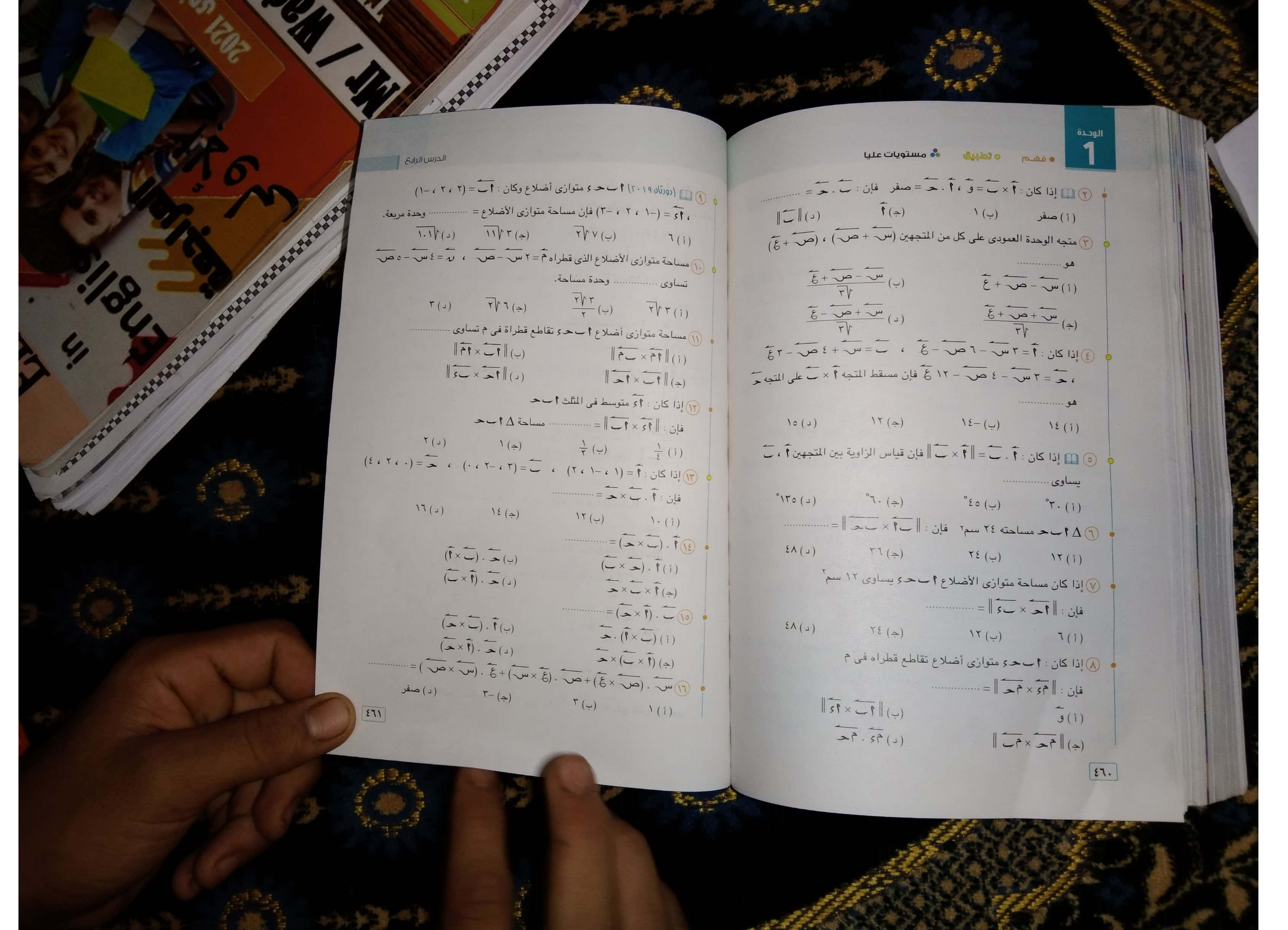
28 إذا كان : أ = (١ ، ٦ ، ٢) ، ب = (ك ، ٣ ، م) ، حـ = (ك ، م ، ك + م)
وكان : أ // ب أوجد : ||حـ||
«√١٤/٢»

29 إذا كان : أ = (٢ ، ٣ ، ٠) ، ب = (م ، ٢ ، ٠) فعين قيمة م في الحالات الآتية :
① أ × ب = −٥ ع ② أ ⊥ ب
③ قياس الزاوية بين أ ، ب = ٤٥°
«٣ ، −٣ ، −٢/٥ أو ١٠»

30 إذا كان : أ = (٢ ، −٣) وكان : ب // أ فإذا كان : ||ب|| = ٣ √١٣ أوجد : ب
«±(٦ ، −٩)»

31 (دور ثان ٢٠١٨) أ ب حـ د شكل رباعي حيث أ = (٣ ، ٠ ، ٢) ، ب = (٦ ، ٢ ، ٥) ، حـ = (٤ ، ٤ ، ٥) ، د = (١ ، ٢ ، ٢)
① أثبت أن الشكل أ ب حـ د متوازي أضلاع وأوجد مساحته.
② أوجد متجه وحدة عمودي على مستوى الشكل الرباعي.
«٢ √٤٣ وحدة مربعة ، ±(−٣/√٤٣ ، −٣/√٤٣ ، ٥/√٤٣)»

32 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :
① إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين : س + ص + ع ، ٢ س − ص + ٢ ع
فإن : جا θ = ...
(أ) ١/√٣ (ب) √(٢/٣) (جـ) √٢/٣ (د) ليس مما سبق.



الوحدة 1

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(٢) إذا كان : أ × ب = و ، أ . ح = صفر فإن : ب . ح = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ (د) ‖ب‖

(٣) متجه الوحدة العمودى على كل من المتجهين (س + ص) ، (ص + ع) هو ....

(أ) س − ص + ع (ب) (س − ص + ع) / $\sqrt{3}$

(جـ) (س + ص + ع) / $\sqrt{3}$ (د) (س + ص − ع) / $\sqrt{3}$

(٤) إذا كان : أ = ٣ س − ٦ ص − ع ، ب = س + ٤ ص − ٣ ع ، ح = ٣ س − ٤ ص − ١٢ ع فإن مسقط المتجه أ × ب على المتجه ح هو ....

(أ) ١٤ (ب) −١٤ (جـ) ١٢ (د) ١٥

(٥) إذا كان : أ . ب = ‖أ × ب‖ فإن قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٣٥°

(٦) Δ أ ب حـ مساحته ٢٤ سم² فإن : ‖ب أ × ب حـ‖ = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(٧) إذا كان مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء يساوى ١٢ سم² فإن : ‖أ حـ × ب ء‖ = ...

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

(٨) إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م فإن : ‖م ء × م حـ‖ = ...

(أ) و (ب) ‖أ ب × أ ء‖

(جـ) ‖م حـ × م ب‖ (د) م ء . م حـ

٤٦٠

الدرس الرابع

(٩) (دورثان ٢٠١٩) أ ب حـ ء متوازى أضلاع وكان : أ ب = (٢ ، ٢ ، −١) ، أ ء = (−١ ، ٢ ، −٣) فإن مساحة متوازى الأضلاع = ... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٧ $\sqrt{2}$ (جـ) ٣ $\sqrt{11}$ (د) $\sqrt{101}$

(١٠) مساحة متوازى الأضلاع الذى قطراه م = ٢ س − ص ، ن = ٤ س − ٥ ص تساوى .... وحدة مساحة.

(أ) ٣ $\sqrt{2}$ (ب) ٣ $\sqrt{2}$ / ٢ (جـ) ٦ $\sqrt{2}$ (د) ٣

(١١) مساحة متوازى أضلاع أ ب حـ ء تقاطع قطراه فى م تساوى ....

(أ) ‖أ م × ب م‖ (ب) ‖أ ب × أ م‖

(جـ) ‖أ ب × أ حـ‖ (د) ‖أ حـ × ب ء‖

(١٢) إذا كان : أ ء متوسط فى المثلث أ ب حـ فإن : ‖أ ء × أ ب‖ = ... مساحة Δ أ ب حـ

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ١ (د) ٢

(١٣) إذا كان : أ = (١ ، −١ ، ٢) ، ب = (٣ ، −٢ ، ٠) ، ح = (٠ ، ٢ ، ٤) فإن : أ . ب × ح = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(١٤) أ . (ب × ح) = ...

(أ) أ . (ح × ب) (ب) ح . (ب × أ)

(جـ) أ × ب × ح (د) ح . (أ × ب)

(١٥) ب . (أ × ح) = ...

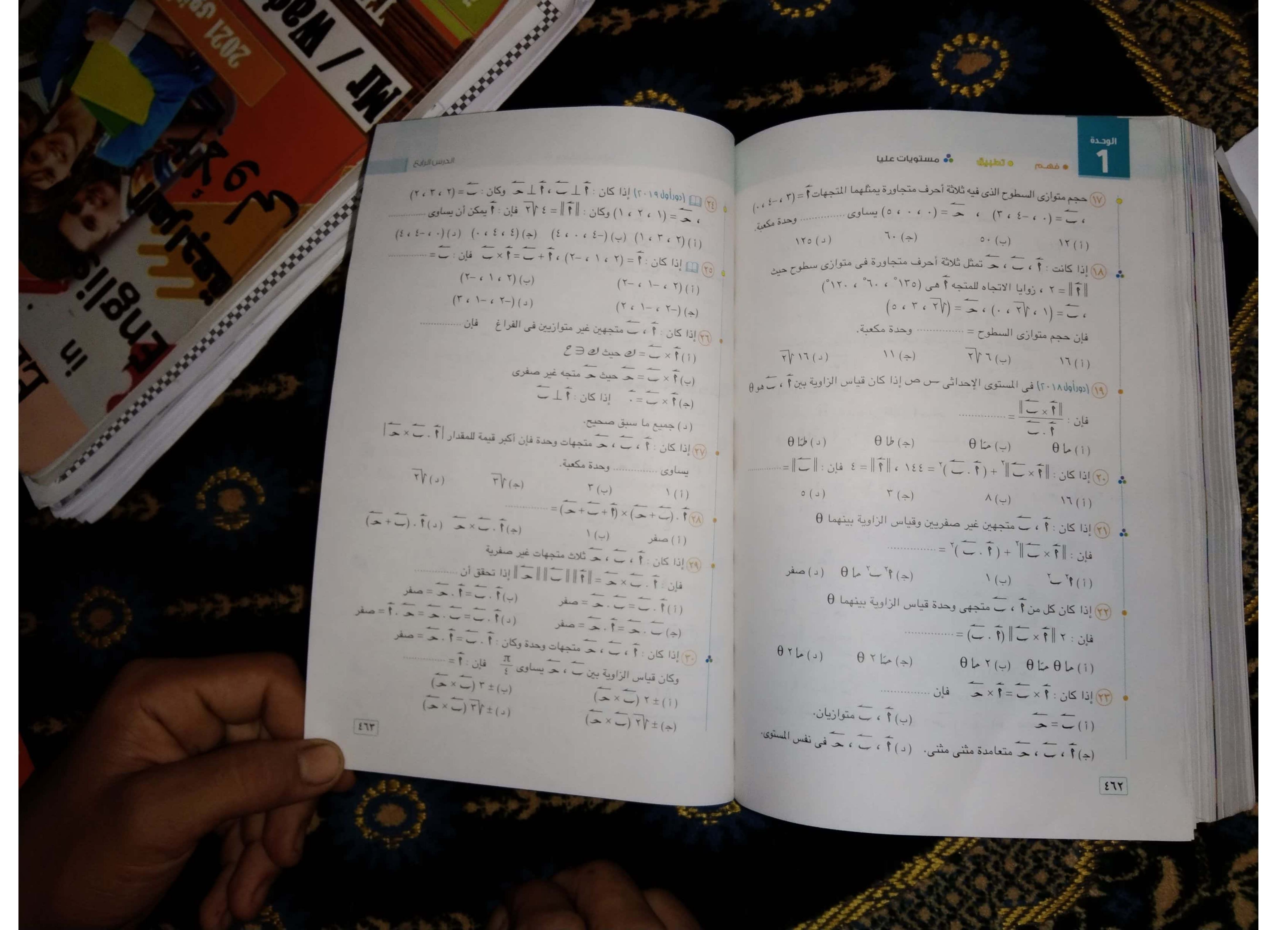
(أ) (ب × أ) . ح (ب) أ . (ب × ح)

(جـ) (أ × ب) × ح (د) ح . (أ × ح)

(١٦) س . (ص × ع) + ص . (ع × س) + ع . (س × ص) = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) صفر

٤٦١



(١٧) حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات أ = (٣ ، -٤ ، ٠) ، ب = (٠ ، -٤ ، ٣) ، حـ = (٠ ، ٠ ، ٥) يساوى .... وحدة مكعبة.

(أ) ١٢ (ب) ٥٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٥

(١٨) إذا كانت : أ ، ب ، حـ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة فى متوازى سطوح حيث ‖أ‖ = ٢ ، زوايا الاتجاه للمتجه أ هى (١٣٥° ، ٦٠° ، ١٢٠°) ، ب = (١ ، $\sqrt{٢}$ ، ٠) ، حـ = ($\sqrt{٢}$ ، ٣ ، ٥)

فإن حجم متوازى السطوح = ... وحدة مكعبة.

(أ) ١٦ (ب) ٦$\sqrt{٢}$ (جـ) ١١ (د) ١٦$\sqrt{٢}$

(١٩) (دور أول ٢٠١٨) فى المستوى الإحداثى س ص إذا كان قياس الزاوية بين أ ، ب هو θ

فإن : ‖أ × ب‖ ÷ (أ . ب) = ...

(أ) جا θ (ب) جتا θ (جـ) ظا θ (د) ظتا θ

(٢٠) إذا كان : ‖أ × ب‖^{٢} + (أ . ب)^{٢} = ١٤٤ ، ‖أ‖ = ٤ فإن : ‖ب‖ = ...

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢١) إذا كان : أ ، ب متجهين غير صفريين وقياس الزاوية بينهما θ

فإن : ‖أ × ب‖^{٢} + (أ . ب)^{٢} = ...

(أ) أ^{٢} ب^{٢} (ب) ١ (جـ) أ^{٢} ب^{٢} جا^{٢} θ (د) صفر

(٢٢) إذا كان كل من أ ، ب متجهى وحدة قياس الزاوية بينهما θ

فإن : ٢ ‖أ × ب‖ (أ . ب) = ...

(أ) جا θ جتا θ (ب) ٢ جا θ (جـ) جتا ٢ θ (د) جا ٢ θ

(٢٣) إذا كان : أ × ب = أ × حـ فإن ....

(أ) ب = حـ (ب) أ ، ب متوازيان.

(جـ) أ ، ب ، حـ متعامدة مثنى مثنى. (د) أ ، ب ، حـ فى نفس المستوى.

(٢٤) (دور أول ٢٠١٩) إذا كان : أ ⊥ ب ، أ ⊥ حـ وكان : ب = (٢ ، ٣ ، ٢) ، حـ = (١ ، ٢ ، ١) وكان : ‖أ‖ = ٤$\sqrt{٢}$ فإن : أ يمكن أن يساوى ....

(أ) (٢ ، ٣ ، ١) (ب) (-٤ ، ٠ ، ٤) (جـ) (٤ ، ٤ ، ٠) (د) (٠ ، -٤ ، ٤)

(٢٥) إذا كان : أ = (٢ ، ١ ، -٢) ، أ + ب = أ × ب فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، -١ ، -٢) (ب) (٢ ، ١ ، -٢)

(جـ) (-٢ ، -١ ، ٢) (د) (-٢ ، -١ ، ٣)

(٢٦) إذا كان : أ ، ب متجهين غير متوازيين فى الفراغ فإن ....

(أ) أ × ب = ك حيث ك ∈ ح

(ب) أ × ب = حـ حيث حـ متجه غير صفرى

(جـ) أ × ب = $\vec{0}$ إذا كان : أ ⊥ ب

(د) جميع ما سبق صحيح.

(٢٧) إذا كان : أ ، ب ، حـ متجهات وحدة فإن أكبر قيمة للمقدار |أ . ب × حـ| يساوى .... وحدة مكعبة.

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٢}$

(٢٨) أ . (ب + حـ) × (أ + ب + حـ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ . ب × حـ (د) أ . (ب + حـ)

(٢٩) إذا كان : أ ، ب ، حـ ثلاث متجهات غير صفرية

فإن : أ . ب × حـ = ‖أ‖ ‖ب‖ ‖حـ‖ إذا تحقق أن ....

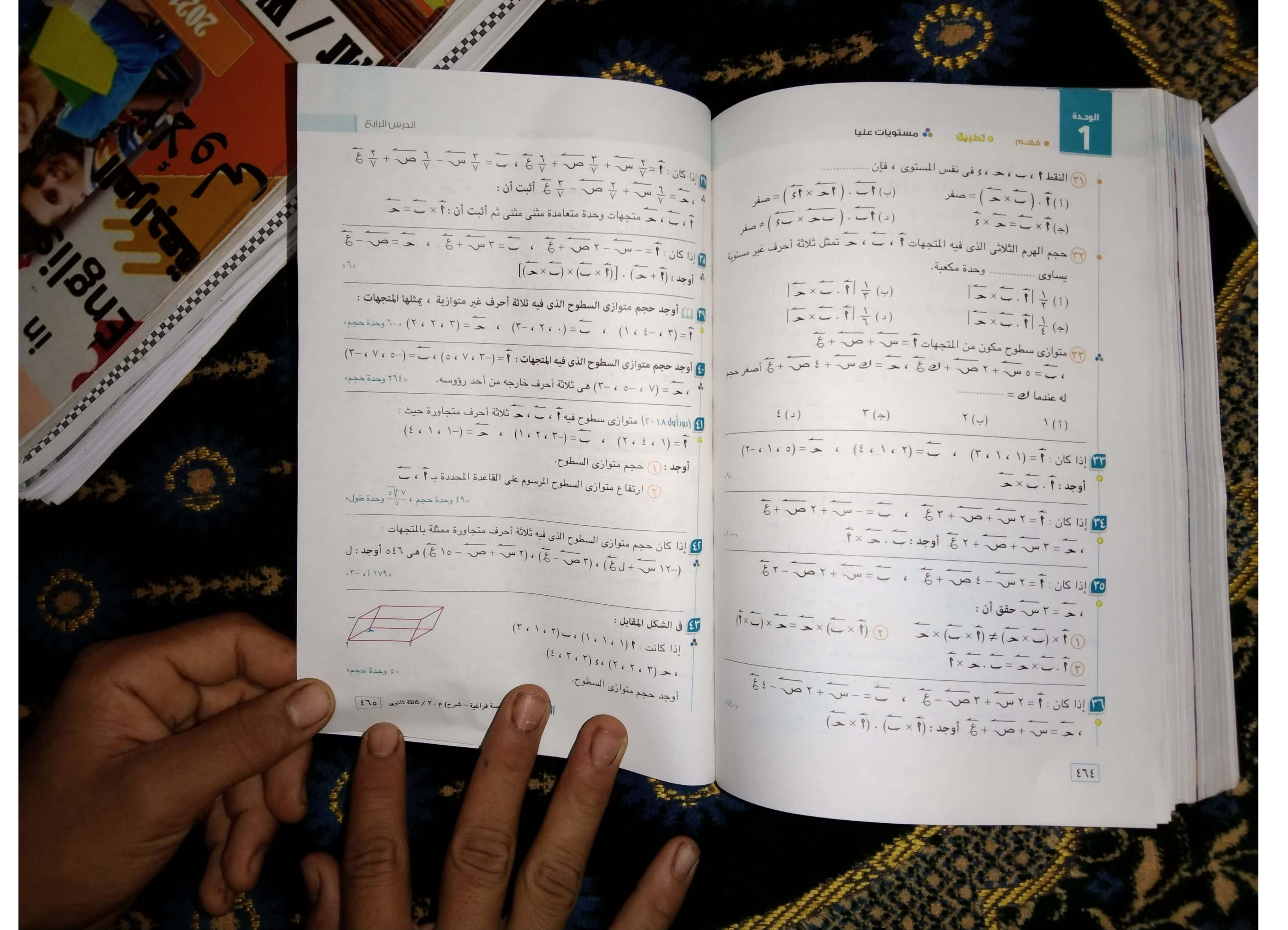
(أ) أ . ب = ب . حـ = صفر (ب) أ . ب = أ . حـ = صفر

(جـ) ب . حـ = أ . حـ = صفر (د) أ . ب = ب . حـ = حـ . أ = صفر

(٣٠) إذا كان : أ ، ب ، حـ متجهات وحدة وكان : أ . ب = أ . حـ = صفر وكان قياس الزاوية بين ب ، حـ يساوى $\frac{\pi}{٤}$ فإن : أ = ...

(أ) ± ٢ (ب × حـ) (ب) ± ٣ (ب × حـ)

(جـ) ± $\sqrt{٢}$ (ب × حـ) (د) ± $\sqrt{٣}$ (ب × حـ)



الوحدة 1 — • فهم • تطبيق • مستويات عليا

(31) النقط أ ، ب ، حـ ، ء في نفس المستوى ، فإن ....

(أ) أ→ . (ب→ × حـ→) = صفر (ب) أب→ . (أحـ→ × أء→) = صفر

(جـ) أ→ × ب→ = حـ→ × ء→ (د) أب→ . (بحـ→ × بء→) ≠ صفر

(32) حجم الهرم الثلاثي الذي فيه المتجهات أ→ ، ب→ ، حـ→ تمثل ثلاثة أحرف غير مستوية يساوي .... وحدة مكعبة.

(أ) $\frac{1}{2}$ |أ→ . ب→ × حـ→| (ب) $\frac{1}{3}$ |أ→ . ب→ × حـ→|

(جـ) $\frac{1}{4}$ |أ→ . ب→ × حـ→| (د) $\frac{1}{6}$ |أ→ . ب→ × حـ→|

(33) متوازي سطوح مكون من المتجهات أ→ = س→ + ص→ + ع→ ، ب→ = ٥ س→ + ٢ ص→ + ك ع→ ، حـ→ = ك س→ + ٤ ص→ + ع→ أصغر حجم له عندما ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣٣ إذا كان : أ→ = (١ ، ١ ، ٣) ، ب→ = (٢ ، ١ ، ٤) ، حـ→ = (٥ ، ١ ، −٢)
أوجد : أ→ . ب→ × حـ→ «٩»

٣٤ إذا كان : أ→ = ٢ س→ + ص→ + ٣ ع→ ، ب→ = − س→ + ٢ ص→ + ع→
، حـ→ = ٣ س→ + ص→ + ٢ ع→ أوجد : ب→ . حـ→ × أ→ «−١٠»

٣٥ إذا كان : أ→ = ٢ س→ − ٤ ص→ + ع→ ، ب→ = س→ + ٢ ص→ − ٢ ع→
، حـ→ = ٣ س→ حقق أن :

(١) أ→ × (ب→ × حـ→) ≠ (أ→ × ب→) × حـ→ (٢) (أ→ × ب→) × حـ→ = حـ→ × (ب→ × أ→)

(٣) أ→ . ب→ × حـ→ = ب→ . حـ→ × أ→

٣٦ إذا كان : أ→ = ٢ س→ + ٣ ص→ − ع→ ، ب→ = − س→ + ٢ ص→ − ٤ ع→
، حـ→ = س→ + ص→ + ع→ أوجد : (أ→ × ب→) . (أ→ × حـ→) «−٧٤»

٣٧ إذا كان : أ→ = $\frac{٢}{٧}$ س→ + $\frac{٣}{٧}$ ص→ + $\frac{٦}{٧}$ ع→ ، ب→ = $\frac{٣}{٧}$ س→ − $\frac{٦}{٧}$ ص→ + $\frac{٢}{٧}$ ع→
، حـ→ = $\frac{٦}{٧}$ س→ + $\frac{٢}{٧}$ ص→ − $\frac{٣}{٧}$ ع→ أثبت أن :
أ→ ، ب→ ، حـ→ متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى ثم أثبت أن : أ→ × ب→ = حـ→

٣٨ إذا كان : أ→ = − س→ − ٢ ص→ + ع→ ، ب→ = ٣ س→ + ع→ ، حـ→ = ص→ − ع→
أوجد : (أ→ + حـ→) . [(أ→ × ب→) × (ب→ × حـ→)] «٦»

٣٩ أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية ، يمثلها المتجهات :
أ→ = (٣ ، −٤ ، ١) ، ب→ = (٠ ، ٢ ، −٣) ، حـ→ = (٣ ، ٢ ، ٢) «٦٠ وحدة حجم»

٤٠ أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه المتجهات : أ→ = (−٣ ، ٧ ، ٥) ، ب→ = (−٥ ، ٧ ، −٣)
، حـ→ = (٧ ، −٥ ، −٣) هي ثلاثة أحرف خارجة من أحد رؤوسه. «٢٦٤ وحدة حجم»

٤١ (دور أول ٢٠١٨) متوازي سطوح فيه أ→ ، ب→ ، حـ→ ثلاثة أحرف متجاورة حيث :
أ→ = (١ ، ٤ ، ٢) ، ب→ = (−٣ ، ٢ ، ١) ، حـ→ = (−١ ، ١ ، ٤)
أوجد : (١) حجم متوازي السطوح.
(٢) ارتفاع متوازي السطوح المرسوم على القاعدة المحددة بـ أ→ ، ب→
«٤٩ وحدة حجم ، $\frac{٧\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول»

٤٢ إذا كان حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة ممثلة بالمتجهات :
(−١٢ س→ + ل ع→) ، (٣ ص→ − ع→) ، (٢ س→ + ص→ − ١٥ ع→) هي ٥٤٦ أوجد : ل
«١٧٩ ، −٣»

٤٣ في الشكل المقابل :
إذا كانت : أ (١ ، ١ ، ١) ، ب (٢ ، ١ ، ٣)
، حـ (٣ ، ٢ ، ٢) ، ء (٣ ، ٣ ، ٤)
أوجد حجم متوازي السطوح. «٥ وحدة حجم»

٤٤ أثبت أن المتجهات : $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} - ٤\overrightarrow{\text{ع}}$
، $\overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ تقع فى مستوى واحد.

٤٥ إذا كانت : أ (٤ ، ٨ ، ١٢) ، ب (٢ ، ٤ ، ٦) ، حـ (٣ ، ٥ ، ٤) ، ء (٥ ، ٨ ، ٥)
أثبت أن النقاط : أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى مستوى واحد.

٤٦ أوجد قيمة ل لكى تصبح المتجهات : $\overrightarrow{\text{أ}}$ (١ ، −١ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ١ ، ٢)
، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (١ ، ل ، −٣) فى مستوى واحد.

٤٧ أوجد ك التى تجعل النقاط أ ، ب ، حـ ، ء تقع فى نفس المستوى حيث :
أ (٣ ، −٢ ، −١) ، ب (٢ ، ٣ ، −٤) ، حـ (−١ ، ١ ، ٢) ، ء (٤ ، ٥ ، ك) « $\frac{-١٤٦}{١٧}$ »

٤٨ برهن كلًا مما يأتى حيث : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^٣$

(١) $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}|^٢ = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ = صفر ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإن إما $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

٤٩ أثبت أن : لأى ثلاثة متجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ يكون :
$\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) + \overrightarrow{\text{ب}} \times (\overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{أ}}) + \overrightarrow{\text{حـ}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = \overrightarrow{\text{و}}$

٥٠ أثبت أن : $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) \times (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = ٢ (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$

٥١ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ء}}$ أثبت أن : المتجه $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}})$
، المتجه $(\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$ متوازيان حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ متجهات ليست صفرية.

٥٢ أوجد قيمة : $\dfrac{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}|^٢}{٢ \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢}$ « $\frac{١}{٢}$ »

٥٣ أثبت أن : $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}})(\overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}) - (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})^٢}$

٥٤ أثبت بالمتجهات أنه لأى $\triangle$ أ ب حـ يكون : $\dfrac{\text{ب حـ}}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{أ حـ}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{أ ب}}{\text{جا حـ}}$

٥٥ أثبت بالمتجهات أن مساحة الشكل الرباعى المستوى أ ب حـ ء هى : $\frac{١}{٢} \|\overrightarrow{\text{أ حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب ء}}\|$

٥٦ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهى وحدة فى ح^٣ تحت أى شرط يكون حاصل الضرب الاتجاهى
$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ يمثل متجه وحدة فى ح^٣ (فسر إجابتك)

٥٧ إذا كان مجموع متجهى وحدة هو متجه وحدة أيضًا أثبت أن الفرق بين المتجهين هو
متجه معياره يساوى $\sqrt{٣}$

٥٨ أثبت أنه لأى ثلاث متجهات $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ يكون :

(١) $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}}) \times (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) = (٢\overrightarrow{\text{أ}}) \times (\overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ب}})$

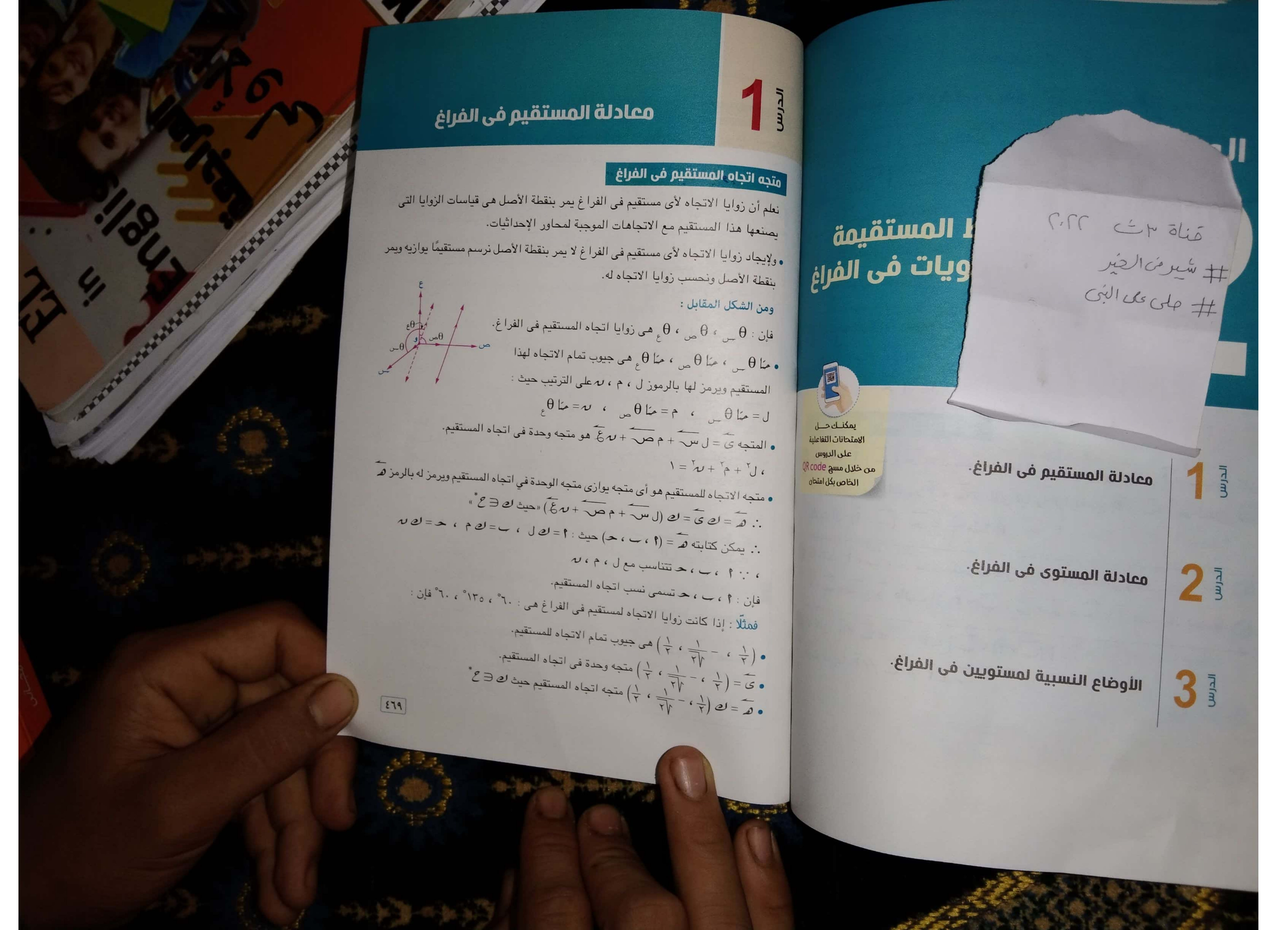
(٢) $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}}) \times (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) = (٢\overrightarrow{\text{أ}}) \times (\overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}})$

مسائل تقيس مهارات التفكير

٥٩ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ثلاث متجهات وحدة، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ لا يقع فى مستوى $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ بحيث كان
قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ تساوى قياس الزاوية بين $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ تساوى θ
فأثبت أن : $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} = \frac{١}{٢}$ جا ٢ θ

٦٠ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ ثلاث متجهات غير متوازية فى مستوى واحد بحيث :
$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فأثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ وفسر ذلك هندسيًا.

٦١ إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \neq \overrightarrow{\text{ب}} \neq \overrightarrow{\text{٠}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times [\overrightarrow{\text{ب}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})] = \overrightarrow{\text{٠}}$
أثبت أنه إما : $\overrightarrow{\text{أ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ب}}$ أو $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$



الدرس 1 معادلة المستقيم فى الفراغ

متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ

نعلم أن زوايا الاتجاه لأى مستقيم فى الفراغ يمر بنقطة الأصل هى قياسات الزوايا التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات.

- ولإيجاد زوايا الاتجاه لأى مستقيم فى الفراغ لا يمر بنقطة الأصل نرسم مستقيمًا يوازيه ويمر بنقطة الأصل ونحسب زوايا الاتجاه له.

ومن الشكل المقابل :

فإن : $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا اتجاه المستقيم فى الفراغ.

- $\text{جتا}\,\theta_{س}$ ، $\text{جتا}\,\theta_{ص}$ ، $\text{جتا}\,\theta_{ع}$ هى جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم ويرمز لها بالرموز ل ، م ، ن على الترتيب حيث :

$$ل = \text{جتا}\,\theta_{س} \quad ، \quad م = \text{جتا}\,\theta_{ص} \quad ، \quad ن = \text{جتا}\,\theta_{ع}$$

- المتجه $\overrightarrow{ى} = ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} + ن\,\overrightarrow{ع}$ هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم.

، $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

- متجه الاتجاه للمستقيم هو أى متجه يوازى متجه الوحدة في اتجاه المستقيم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{هـ}$

$\therefore \overrightarrow{هـ} = ك\,\overrightarrow{ى} = ك\,(ل\,\overrightarrow{س} + م\,\overrightarrow{ص} + ن\,\overrightarrow{ع})$ «حيث $ك \in ح^*$»

$\therefore$ يمكن كتابته $\overrightarrow{هـ} = (أ ، ب ، جـ)$ حيث : $أ = ك\,ل$ ، $ب = ك\,م$ ، $جـ = ك\,ن$

، $\therefore$ أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن

فإن : أ ، ب ، جـ تسمى نسب اتجاه المستقيم.

فمثلًا : إذا كانت زوايا الاتجاه لمستقيم فى الفراغ هى : 60° ، 135° ، 60° فإن :

- $\left(\frac{1}{2} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2}\right)$ هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم.
- $\overrightarrow{ى} = \left(\frac{1}{2} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2}\right)$ متجه وحدة فى اتجاه المستقيم.
- $\overrightarrow{هـ} = ك\left(\frac{1}{2} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{2}\right)$ متجه اتجاه المستقيم حيث $ك \in ح^*$

... المستقيمة
... ويات فى الفراغ

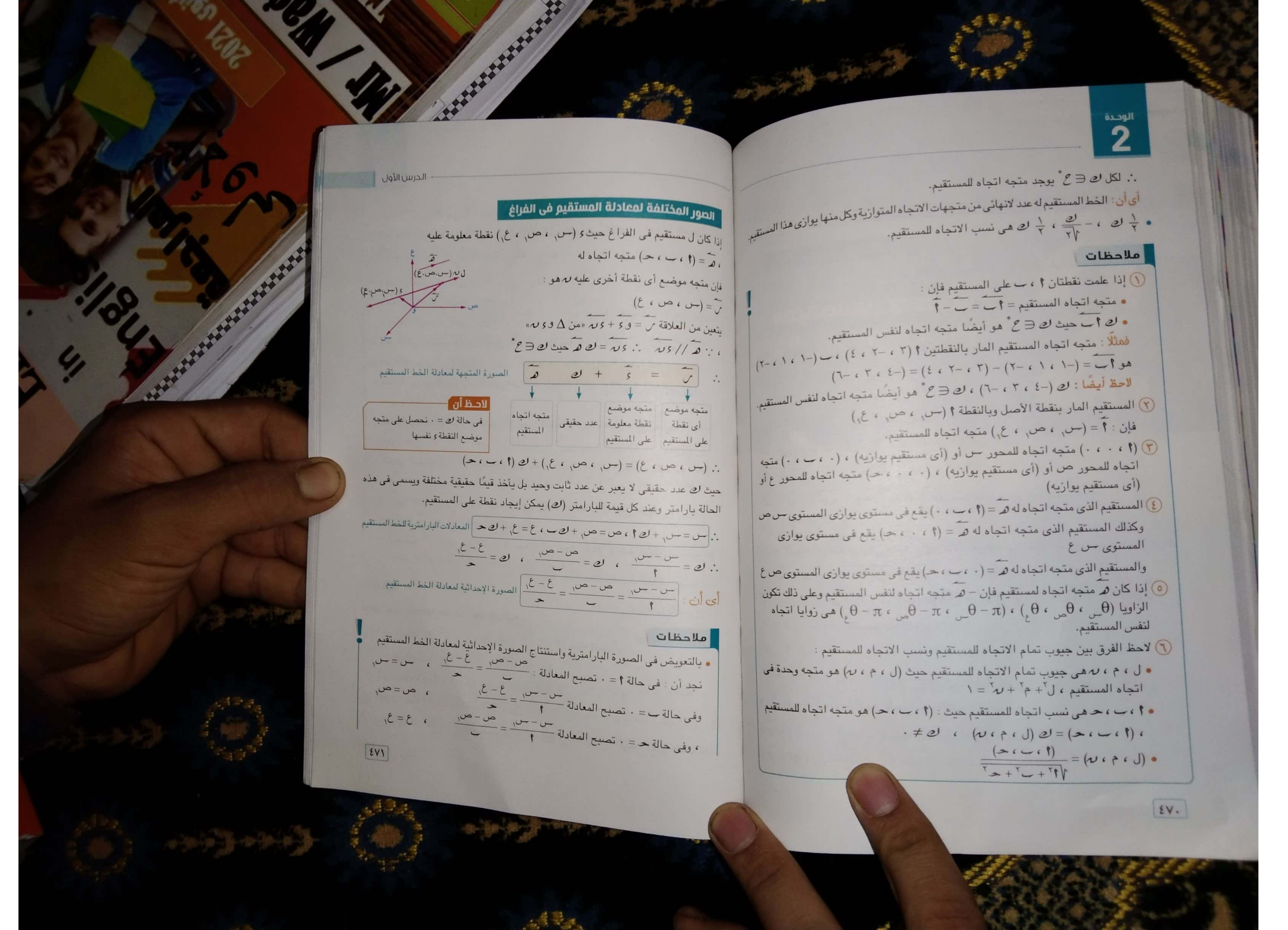
قناة ٣ث ٢٠٢٢
شيرمن الخير
صلى على النبى

يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

الدرس 1 معادلة المستقيم فى الفراغ.

الدرس 2 معادلة المستوى فى الفراغ.

الدرس 3 الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ.



الوحدة 2

∴ لكل ك ∈ ح* يوجد متجه اتجاه للمستقيم.

أى أن: الخط المستقيم له عدد لانهائى من متجهات الاتجاه المتوازية وكل منها يوازى هذا المستقيم.

• $\frac{1}{2}$ ك ، $-\frac{ك}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{2}$ ك هى نسب الاتجاه للمستقيم.

ملاحظات

(١) إذا علمت نقطتان أ ، ب على المستقيم فإن:
- متجه اتجاه المستقيم = $\overrightarrow{أب} = \vec{ب} - \vec{أ}$
- ك $\overrightarrow{أب}$ حيث ك ∈ ح* هو أيضًا متجه اتجاه لنفس المستقيم.

فمثلًا: متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين أ(٣ ، −٢ ، ٤) ، ب(−١ ، ١ ، −٢)
هو $\overrightarrow{أب}$ = (−١ ، ١ ، −٢) − (٣ ، −٢ ، ٤) = (−٤ ، ٣ ، −٦)

لاحظ أيضًا: ك(−٤ ، ٣ ، −٦) ، ك ∈ ح* هو أيضًا متجه اتجاه لنفس المستقيم.

(٢) المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة أ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$)
فإن: $\vec{أ}$ = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) متجه اتجاه للمستقيم.

(٣) (أ ، ٠ ، ٠) متجه اتجاه للمحور س أو (أى مستقيم يوازيه) ، (٠ ، ب ، ٠) متجه اتجاه للمحور ص أو (أى مستقيم يوازيه) ، (٠ ، ٠ ، حـ) متجه اتجاه للمحور ع أو (أى مستقيم يوازيه)

(٤) المستقيم الذى متجه اتجاهه $\vec{ى}$ = (أ ، ب ، ٠) يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص
وكذلك المستقيم الذى متجه اتجاهه $\vec{ى}$ = (أ ، ٠ ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى س ع
والمستقيم الذى متجه اتجاهه $\vec{ى}$ = (٠ ، ب ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى ص ع

(٥) إذا كان $\vec{ى}$ متجه اتجاه لمستقيم فإن $-\vec{ى}$ متجه اتجاه لنفس المستقيم وعلى ذلك تكون الزاويا ($\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$) ، ($\pi - \theta_س$ ، $\pi - \theta_ص$ ، $\pi - \theta_ع$) هى زوايا اتجاه لنفس المستقيم.

(٦) لاحظ الفرق بين جيوب تمام الاتجاه للمستقيم ونسب الاتجاه للمستقيم:
- ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم حيث (ل ، م ، ن) هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم ، $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$
- أ ، ب ، حـ هى نسب اتجاه للمستقيم حيث: (أ ، ب ، حـ) هو متجه اتجاه للمستقيم ، (أ ، ب ، حـ) = ك(ل ، م ، ن) ، ك ≠ ٠ .
- (ل ، م ، ن) = $\frac{(أ ، ب ، حـ)}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}$

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الفراغ

إذا كان ل مستقيم فى الفراغ حيث ء($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) نقطة معلومة عليه ، $\vec{ى}$ = (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له
فإن متجه موضع أى نقطة أخرى عليه ن هو:
$\vec{ر}$ = (س ، ص ، ع)
يتعين من العلاقة $\vec{ر} = \overrightarrow{وء} + \overrightarrow{ءن}$ «من Δ و ء ن»
∵ $\vec{ى} \parallel \overrightarrow{ءن}$ ∴ $\overrightarrow{ءن}$ = ك $\vec{ى}$ حيث ك ∈ ح*

∴ $\vec{ر} = \vec{ء} + ك\,\vec{ى}$ — الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم

$\vec{ر}$	=	$\vec{ء}$	+	ك		$\vec{ى}$
متجه موضع أى نقطة على المستقيم		متجه موضع نقطة معلومة على المستقيم		عدد حقيقى		متجه اتجاه المستقيم

لاحظ أن: فى حالة ك = ٠ نحصل على متجه موضع النقطة ء نفسها

∴ (س ، ص ، ع) = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) + ك(أ ، ب ، حـ)

حيث ك عدد حقيقى لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيمًا حقيقية مختلفة ويسمى فى هذه الحالة بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر (ك) يمكن إيجاد نقطة على المستقيم.

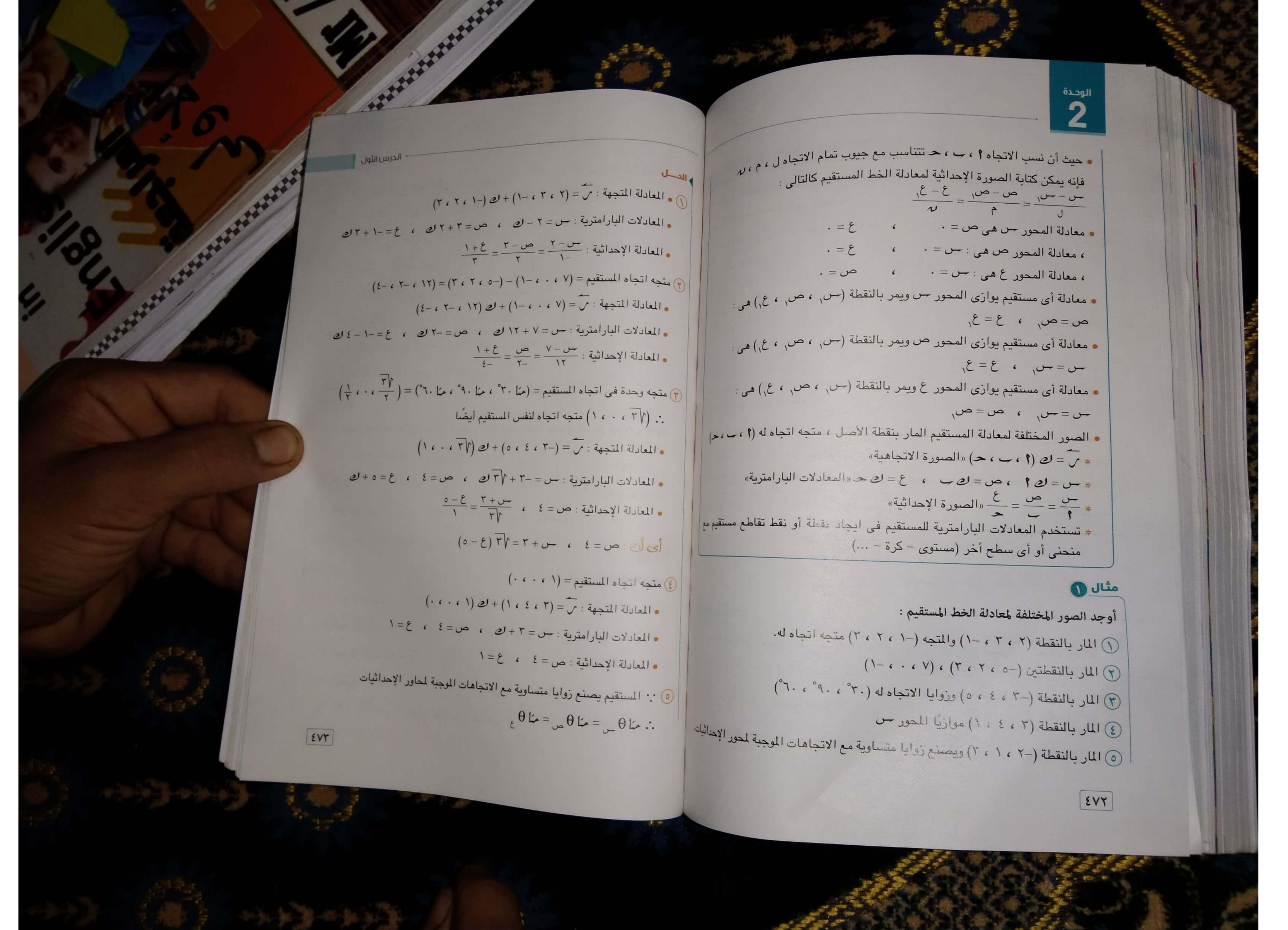
∴ $س = س_1 + ك أ$ ، $ص = ص_1 + ك ب$ ، $ع = ع_1 + ك حـ$ — المعادلات البارامترية للخط المستقيم

∴ ك = $\frac{س - س_1}{أ}$ ، ك = $\frac{ص - ص_1}{ب}$ ، ك = $\frac{ع - ع_1}{حـ}$

أى أن: $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{حـ}$ — الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم

ملاحظات

- بالتعويض فى الصورة البارامترية واستنتاج الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم
نجد أن: فى حالة أ = ٠ تصبح المعادلة: $\frac{ص - ص_1}{ب} = \frac{ع - ع_1}{حـ}$ ، $س = س_1$
وفى حالة ب = ٠ تصبح المعادلة $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ع - ع_1}{حـ}$ ، $ص = ص_1$
، وفى حالة حـ = ٠ تصبح المعادلة $\frac{س - س_1}{أ} = \frac{ص - ص_1}{ب}$ ، $ع = ع_1$



- حيث أن نسب الاتجاه ؟ ، ب ، حـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن
فإنه يمكن كتابة الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم كالتالى :

$$\frac{س - س_1}{ل} = \frac{ص - ص_1}{م} = \frac{ع - ع_1}{ن}$$

- معادلة المحور س هى ص = ٠ ، ع = ٠ .
- ، معادلة المحور ص هى : س = ٠ ، ع = ٠ .
- ، معادلة المحور ع هى : س = ٠ ، ص = ٠ .
- معادلة أى مستقيم يوازى المحور س ويمر بالنقطة $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ هى :
$ص = ص_1$ ، $ع = ع_1$
- معادلة أى مستقيم يوازى المحور ص ويمر بالنقطة $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ هى :
$س = س_1$ ، $ع = ع_1$
- معادلة أى مستقيم يوازى المحور ع ويمر بالنقطة $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ هى :
$س = س_1$ ، $ص = ص_1$
- الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ، متجه اتجاه له (؟ ، ب ، حـ)
  * $\vec{ر} = ك$ (؟ ، ب ، حـ) «الصورة الاتجاهية»
  * س = ك ؟ ، ص = ك ب ، ع = ك حـ «المعادلات البارامترية»
  * $\frac{س}{؟} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{حـ}$ «الصورة الإحداثية»
  * تستخدم المعادلات البارامترية للمستقيم فى ايجاد نقطة أو نقط تقاطع مستقيم مع منحنى أو أى سطح آخر (مستوى – كرة – ...)

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

(١) المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، –١) والمتجه (–١ ، ٢ ، ٣) متجه اتجاه له.

(٢) المار بالنقطتين (–٥ ، ٢ ، ٣) ، (٧ ، ٠ ، –١)

(٣) المار بالنقطة (–٣ ، ٤ ، ٥) وزوايا الاتجاه له (٣٠° ، ٩٠° ، ٦٠°)

(٤) المار بالنقطة (٣ ، ٤ ، ١) موازيًا المحور س

(٥) المار بالنقطة (–٢ ، ١ ، ٣) ويصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحور الإحداثيات.

الحل

(١)
- المعادلة المتجهة : $\vec{ر}$ = (٢ ، ٣ ، –١) + ك (–١ ، ٢ ، ٣)
- المعادلات البارامترية : س = ٢ – ك ، ص = ٣ + ٢ ك ، ع = –١ + ٣ ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ٢}{-١} = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع + ١}{٣}$

(٢) متجه اتجاه المستقيم = (٧ ، ٠ ، –١) – (–٥ ، ٢ ، ٣) = (١٢ ، –٢ ، –٤)
- المعادلة المتجهة : $\vec{ر}$ = (٧ ، ٠ ، –١) + ك (١٢ ، –٢ ، –٤)
- المعادلات البارامترية : س = ٧ + ١٢ ك ، ص = –٢ ك ، ع = –١ – ٤ ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ٧}{١٢} = \frac{ص}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$

(٣) متجه وحدة فى اتجاه المستقيم = (حتا ٣٠° ، حتا ٩٠° ، حتا ٦٠°) = $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ٠ ، \frac{١}{٢})$

∴ $(\sqrt{٣} ، ٠ ، ١)$ متجه اتجاه لنفس المستقيم أيضًا
- المعادلة المتجهة : $\vec{ر}$ = (–٣ ، ٤ ، ٥) + ك $(\sqrt{٣} ، ٠ ، ١)$
- المعادلات البارامترية : س = –٣ + $\sqrt{٣}$ ك ، ص = ٤ ، ع = ٥ + ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س + ٣}{\sqrt{٣}} = \frac{ع - ٥}{١}$ ، ص = ٤

أى أن : ص = ٤ ، س + ٣ = $\sqrt{٣}$ (ع – ٥)

(٤) متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ٠ ، ٠)
- المعادلة المتجهة : $\vec{ر}$ = (٣ ، ٤ ، ١) + ك (١ ، ٠ ، ٠)
- المعادلات البارامترية : س = ٣ + ك ، ص = ٤ ، ع = ١
- المعادلة الإحداثية : ص = ٤ ، ع = ١

(٥) ∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

∴ $حتا θ_س = حتا θ_ص = حتا θ_ع$

، ∵ $جتا^2 \theta_{س} + جتا^2 \theta_{ص} + جتا^2 \theta_{ع} = ١$

∴ $جتا^2 \theta_{س} = جتا^2 \theta_{ص} = جتا^2 \theta_{ع} = \frac{١}{٣}$

∴ $جتا \theta_{س} = جتا \theta_{ص} = جتا \theta_{ع} = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه اتجاه للمستقيم = $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

∴ (١ ، ١ ، ١) متجه اتجاه لنفس المستقيم أيضًا.

• المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، ١ ، ٣) + ك (١ ، ١ ، ١)

• المعادلات البارامترية : س = -٢ + ك ، ص = ١ + ك ، ع = ٣ + ك

• المعادلة الإحداثية : س + ٢ = ص - ١ = ع - ٣

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم وإحداثيات نقطة عليه فى كل من الحالات الآتية :

(١) المار بنقطة الأصل ونسب الاتجاه له ٢ ، -١ ، ٧

(٢) الذى معادلته الاتجاهية : $\overrightarrow{ر}$ = (-١ ، ٢ ، ٥) + ك (-١ ، ٤ ، ٣)

(٣) الذى معادلته الكارتيزية : ٣ س = ٤ ص = $\frac{-ع + ١}{٥}$

(٤) الذى معادلته الكارتيزية : ص = ٥ ، $\frac{س - ٤}{٢} = \frac{٢ ع + ١}{٦}$

الحل

(١) • المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = ك (٢ ، -١ ، ٧)

• المعادلات البارامترية : س = ٢ ك ، ص = - ك ، ع = ٧ ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع}{٧}$

• وبوضع س = ٢ ∴ ص = -١ ، ع = ٧

∴ (٢ ، -١ ، ٧) إحداثيات نقطة على المستقيم.

(٢) • المعادلات البارامترية : س = -١ - ك ، ص = ٢ + ٤ ك ، ع = ٥ + ٣ ك

• المعادلة الإحداثية : $\frac{س + ١}{-١} = \frac{ص - ٢}{٤} = \frac{ع - ٥}{٣}$

• وبوضع س = -١ ∴ ص = ٢ ، ع = ٥

∴ (-١ ، ٢ ، ٥) إحداثيات نقطة على المستقيم.

(٣) • بوضع ٣ س = ٤ ص = $\frac{-ع + ١}{٥}$ = ك نستنتج أن :

• س = $\frac{١}{٣}$ ك ، ص = $\frac{١}{٤}$ ك ، ع = ١ - ٥ ك وهى المعادلات البارامترية للمستقيم.

• $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٠ ، ١) + ك $\left(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، -٥\right)$ وهى المعادلة المتجهة للمستقيم.

• وبوضع ك = ٢٤ ∴ س = ٨ ∴ ص = ٦ ، ع = -١١٩

∴ (٨ ، ٦ ، -١١٩) إحداثيات نقطة على المستقيم.

(٤) • بوضع $\frac{س - ٤}{٢} = \frac{٢ ع + ١}{٦}$ = ك

• س = ٤ + ٢ ك ، ص = ٥ ، ع = $-\frac{١}{٢}$ + ٣ ك وهى المعادلات البارامترية للمستقيم.

• $\overrightarrow{ر}$ = $\left(٤ ، ٥ ، -\frac{١}{٢}\right)$ + ك (٢ ، ٠ ، ٣) وهى المعادلة المتجهة للمستقيم.

• وبوضع ك = ١ ∴ س = ٧ ، ع = $٢\frac{١}{٢}$ ، ص = ٥

∴ $\left(٧ ، ٥ ، ٢\frac{١}{٢}\right)$ إحداثيات نقطة على المستقيم.

مثال ٣

أوجد معادلة الخط المستقيم :

(١) المار بالنقطة أ (٢ ، ٣ ، -٥) موازيًا المستقيم المار بالنقطتين :

ب (-١ ، ٣ ، ٢) ، حـ (٢ ، -١ ، ٣) وأثبت أنه يمر بالنقطة (١٧ ، -١٧ ، ٠)

(٢) المار بالنقطة (-٢ ، ٣ ، ٤) موازيًا المستقيم $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{٢ ص + ١}{٦} = \frac{ع - ٤}{٢}$

(٣) المار بنقطة تقاطع المستقيمين : $ل_1$: $\overrightarrow{ر_1}$ = (١ ، -١ ، ٢) + $ك_1$ (٣ ، -٢ ، ٥)

$ل_2$: $\overrightarrow{ر_2}$ = (٨ ، -٢ ، ١٤) + $ك_2$ (١ ، ٣ ، ٢) والنقطة (٢ ، -٣ ، ١)

الحل

(١) ∵ المستقيم المطلوب يوازي $\overleftrightarrow{بحـ}$

∴ $\overrightarrow{بحـ}$ هو متجه اتجاه للمستقيم.

، $\overrightarrow{بحـ}$ = (٢ ، -١ ، ٣) - (-١ ، ٣ ، ٢) = (٣ ، -٤ ، ١)

- المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، -٥) + ك (٣ ، -٤ ، ١)
- المعادلات البارامترية : س = ٢ + ٣ك ، ص = ٣ - ٤ك ، ع = -٥ + ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص - ٣}{-٤}$ = ع + ٥

∵ $\frac{١٧ - ٢}{٣}$ = ٥ ، $\frac{-١٧ - ٣}{-٤}$ = ٥ ، ٠ + ٥ = ٥

∴ المستقيم يمر بالنقطة (١٧ ، -١٧ ، ٠)

(٢) ∵ معادلة المستقيم المعطى هي : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{٢ص + ١}{٦} = \frac{ع - ٤}{٢}$

أي أن : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص + \frac{١}{٢}}{٣} = \frac{ع - ٤}{٢}$

> **لاحظ أن**
> يمكن وضع المعادلة الإحداثية على الصورة : $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$
> ،لجعل معاملات س ، ص ، ع هي الواحد الصحيح،
> فيكون (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه للمستقيم
> ، (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة عليه.

∴ (٣ ، ٣ ، ٢) متجه اتجاه للمستقيم المعطى.

، ∵ المستقيم المطلوب يوازيه. ∴ (٣ ، ٣ ، ٢) متجه اتجاه للمستقيم المطلوب.

- المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، ٣ ، ٤) + ك (٣ ، ٣ ، ٢)
- المعادلات البارامترية : س = -٢ + ٣ك ، ص = ٣ + ٣ك ، ع = ٤ + ٢ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س + ٢}{٣} = \frac{ص - ٣}{٣} = \frac{ع - ٤}{٢}$

(٣) عند نقطة تقاطع المستقيمين يكون : $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{ر_٢}$

∴ (١ ، -١ ، ٢) + ك١ (٣ ، -٢ ، ٥) = (٨ ، -٢ ، ١٤) + ك٢ (١ ، ٣ ، ٢)

∴ ١ + ٣ك١ = ٨ + ك٢ ∴ ٣ك١ - ك٢ = ٧ (١)

، -١ - ٢ك١ = -٢ + ٣ك٢ ∴ ٢ك١ + ٣ك٢ = ١ (٢)

، ٢ + ٥ك١ = ١٤ + ٢ك٢ ∴ ٥ك١ - ٢ك٢ = ١٢ (٣)

بحل (١) ، (٢) : ∴ ك١ = ٢ ، ك٢ = -١

، نجد أن الحلين يحققان المعادلة (٣) أيضًا وبالتعويض عن ك١ في معادلة المستقيم ل١

∴ نقطة التقاطع هي :

(س ، ص ، ع) = (١ ، -١ ، ٢) + ٢ (٣ ، -٢ ، ٥) = (٧ ، -٥ ، ١٢)

∴ المتجه (٢ ، -٣ ، ١) - (٧ ، -٥ ، ١٢) = (-٥ ، ٢ ، -١١) متجه اتجاه للمستقيم المطلوب.

- المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -٣ ، ١) + ك (-٥ ، ٢ ، -١١)
- المعادلات البارامترية : س = ٢ - ٥ك ، ص = -٣ + ٢ك ، ع = ١ - ١١ك
- المعادلة الإحداثية : $\frac{س - ٢}{-٥} = \frac{ص + ٣}{٢} = \frac{ع - ١}{-١١}$

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ

قياس الزاوية بين مستقيمين في الفراغ هو قياس الزاوية الصغرى بينهما

فإذا كان : ل١ ، ل٢ مستقيمين في الفراغ متجها اتجاهيهما

$\overrightarrow{ى_١}$ = (أ١ ، ب١ ، حـ١) ، $\overrightarrow{ى_٢}$ = (أ٢ ، ب٢ ، حـ٢)

فإن جيب تمام الزاوية الصغرى (θ) بين المستقيمين ل١ ، ل٢

تعطى بالعلاقة : $جتا θ = \frac{|\overrightarrow{ى_١} \cdot \overrightarrow{ى_٢}|}{\|\overrightarrow{ى_١}\| \|\overrightarrow{ى_٢}\|}$

وإذا كان : (ل١ ، م١ ، ن١) ، (ل٢ ، م٢ ، ن٢) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين

فإن : جتا θ = | ل١ ل٢ + م١ م٢ + ن١ ن٢ |

مثال ٤

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

(١) ل١ يمر بالنقطتين (٥ ، ٣ ، ٥) ، (-١ ، ٧ ، ٣)
، ل٢ يمر بالنقطتين (٢ ، ٥ ، ٤) ، (-٢ ، ٣ ، ١)

(٢) ل١ : $\overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، -٣ ، ٤) + \text{ك}\,(١ ، ٢ ، ٥)$ ، ل٢ : $\frac{\text{س} - ٣}{٢} = \frac{\text{ص} + ٤}{١} = \frac{\text{ع} + ٦}{٤}$

(٣) إذا كانت جيوب تمام اتجاهما هى : $\left(\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{٢\sqrt{٢}}\right)$

الحل

(١) $\overrightarrow{\text{ى}_١} = (-١ ، ٧ ، ٣) - (٥ ، ٣ ، ٥) = (-٦ ، ٤ ، -٢)$

، $\overrightarrow{\text{ى}_٢} = (-٢ ، ٣ ، ١) - (٢ ، ٥ ، ٤) = (-٤ ، -٢ ، -٣)$

$\because \text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{ى}_١} \cdot \overrightarrow{\text{ى}_٢}|}{\|\overrightarrow{\text{ى}_١}\|\,\|\overrightarrow{\text{ى}_٢}\|}$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{|(-٦ ، ٤ ، -٢) \cdot (-٤ ، -٢ ، -٣)|}{\sqrt{(-٦)^٢ + (٤)^٢ + (-٢)^٢}\,\sqrt{(-٤)^٢ + (-٢)^٢ + (-٣)^٢}}$

$= \frac{|٢٤ - ٨ + ٦|}{٢\sqrt{١٤} \times \sqrt{٢٩}} = \frac{١١}{\sqrt{٤٠٦}}$

$\therefore \theta \approx ٥٦° \; ٥٤' \; ٤٥''$

(٢) $\overrightarrow{\text{ى}_١} = (١ ، ٢ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{\text{ى}_٢} = (٢ ، ١ ، ٤)$ $\because \text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{ى}_١} \cdot \overrightarrow{\text{ى}_٢}|}{\|\overrightarrow{\text{ى}_١}\|\,\|\overrightarrow{\text{ى}_٢}\|}$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{|(١ ، ٢ ، ٥) \cdot (٢ ، ١ ، ٤)|}{\sqrt{١ + ٤ + ٢٥}\,\sqrt{٤ + ١ + ١٦}} = \frac{|٢ + ٢ + ٢٠|}{\sqrt{٣٠}\,\sqrt{٢١}} = \frac{٨}{\sqrt{٧٠}}$

$\therefore \theta \approx ١٧° \; ٦' \; ٣٦''$

(٣) $(\text{ل}_١ ، \text{م}_١ ، \text{ن}_١) = \left(\frac{١}{٢} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{٢}\right)$

، $(\text{ل}_٢ ، \text{م}_٢ ، \text{ن}_٢) = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right)$

$\because \text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_١\,\text{ل}_٢ + \text{م}_١\,\text{م}_٢ + \text{ن}_١\,\text{ن}_٢|$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \left|\left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)\left(\frac{١}{٢\sqrt{٢}}\right) + \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{-١}{٢\sqrt{٢}}\right)\right|$

$= \left|\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢} - ١}{٤\sqrt{٢}}\right|$

$\therefore \theta \approx ٨٩° \; ٤٨' \; ٣٤''$

المستقيمان المتوازيان فى الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{\text{ى}_١} = (\text{أ}_١ ، \text{ب}_١ ، \text{جـ}_١)$ ، $\overrightarrow{\text{ى}_٢} = (\text{أ}_٢ ، \text{ب}_٢ ، \text{جـ}_٢)$

هما متجها اتجاه المستقيمين ل١ ، ل٢ فإن : **ل١ // ل٢** إذا وفقط إذا كان **$\overrightarrow{\text{ى}_١} // \overrightarrow{\text{ى}_٢}$**

وهذا الشرط يمكن تحققه بصور مختلفة :

(١) $\overrightarrow{\text{ى}_١} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ى}_٢}$ ، $\text{ك} \in \text{ح}^*$ (٢) $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{\text{جـ}_١}{\text{جـ}_٢}$

(٣) $\overrightarrow{\text{ى}_١} \times \overrightarrow{\text{ى}_٢} = \overrightarrow{\text{و}}$

ملاحظات

(١) إذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر
فإن المستقيمين منطبقان.

(٢) إذا لم يحقق المستقيمان إحدى شروط التوازى السابقة
فإن المستقيمين إما متقاطعان أو متخالفان.

مثال ٥

إذا كان المستقيمان : ل١ : $\overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، ٣ ، -٤) + \text{ك}\,(٢ ، ٣ ، \text{أ})$

ل٢ : $\frac{\text{س} - ٥}{\text{ب}} = \frac{\text{ص} + ٤}{٦} = \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$ متوازيين.

أوجد : أ ، ب



الحل

(٢ ، ٣ ، أ) متجه اتجاه للمستقيم ل١ ، (ب ، ٦ ، ٢) متجه اتجاه للمستقيم ل٢

، ∵ ل١ // ل٢ ∴ $\frac{٢}{ب} = \frac{٣}{٦} = \frac{أ}{٢}$

∴ ب = ٤ ، أ = ١

المستقيمان المتعامدان فى الفراغ

إذا كان $\overrightarrow{ى_١}$ = (أ١ ، ب١ ، حـ١) ، $\overrightarrow{ى_٢}$ = (أ٢ ، ب٢ ، حـ٢)

هما متجها اتجاه المستقيمين ل١ ، ل٢ فإن ل١ ⊥ ل٢ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{ى_١} \cdot \overrightarrow{ى_٢}$ = صفر

أى أن أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + حـ١ حـ٢ = صفر

«ويمكن استخدام جيوب التمام الاتجاهية لكل من المستقيمين كمتجه اتجاه».

ملاحظات

١. المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد.
٢. المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.
٣. المستقيمان المتعامدان :
أما أن يكونا متقاطعين على التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد
أ، متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

مثال ٦

أثبت أن المستقيمين : ل١ : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك١ (٤ ، −٢ ، ٢)

، ل٢ : س = ١ − ٦ ك٢ ، ص = ١ + ٢١ ك٢ ، ع = ١ + ٣٣ ك٢

متعامدان ومتخالفان.

الحل

∵ $\overrightarrow{ى_١}$ (متجه اتجاه المستقيم ل١) = (٤ ، −٢ ، ٢)

، $\overrightarrow{ى_٢}$ (متجه اتجاه المستقيم ل٢) = (−٦ ، ٢١ ، ٣٣)

∴ $\overrightarrow{ى_١} \cdot \overrightarrow{ى_٢}$ = (٤ ، −٢ ، ٢) . (−٦ ، ٢١ ، ٣٣)

= ٤ × −٦ + −٢ × ٢١ + ٢ × ٣٣ = صفر

∴ المستقيمان متعامدان.

، إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نساوى معادلتيهما معًا

∵ ل١ : س = ١ + ٤ ك١ ، ص = ٢ − ٢ ك١ ، ع = ٤ + ٢ ك١

، ∵ ل٢ : س = ١ − ٦ ك٢ ، ص = ١ + ٢١ ك٢ ، ع = ١ + ٣٣ ك٢

∴ ١ + ٤ ك١ = ١ − ٦ ك٢

ومنها ٢ ك١ + ٣ ك٢ = ٠ (١)

، ٢ − ٢ ك١ = ١ + ٢١ ك٢

ومنها ٢ ك١ + ٢١ ك٢ = ١ (٢)

، ٤ + ٢ ك١ = ١ + ٣٣ ك٢

ومنها ٢ ك١ − ٣٣ ك٢ = −٣ (٣)

وبحل (١) ، (٢) نجد أن

ك١ = $-\frac{١}{١٢}$ ، ك٢ = $\frac{١}{١٨}$

وبالتعويض فى (٣)

∴ ٢ × $-\frac{١}{١٢}$ − ٣٣ × $\frac{١}{١٨}$ = −٢ ≠ −٣

∴ لا يوجد ك١ ، ك٢ تحقق المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) معًا

∴ المستقيمين لا يتقاطعان.

، ∵ المستقيمين متعامدان.

∴ المستقيمان متعامدان ومتخالفان.

حل آخر

لإثبات أن المستقيمين متخالفان

ل١ : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك١ (٤ ، −٢ ، ٢)

لاحظ أن

فى المعادلات البارامترية للمستقيم طالما أن معاملات س ، ص ، ع هى الواحد الصحيح فإن معاملات ك هى مركبات متجه اتجاه المستقيم.

ملاحظة

فى المستقيمين الغير متوازيين $\overrightarrow{ر}$ = (س١ ، ص١ ، ع١) + ك١ (أ١ ، ب١ ، حـ١)

، $\overrightarrow{ر}$ = (س٢ ، ص٢ ، ع٢) + ك٢ (أ٢ ، ب٢ ، حـ٢)

١. إذا وجدت قيمة لكل من ك١ ، ك٢ تحقق أن $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{ر_٢}$ فإن المستقيمين متقاطعان.

٢. إذا لم يوجد قيمة لكل من ك١ ، ك٢ تحقق أن $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{ر_٢}$ فإن المستقيمين متخالفان.

ملاحظة

المستقيمان ل١ : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{د_١}$ + ك١ $\overrightarrow{ى_١}$

، ل٢ : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{د_٢}$ + ك٢ $\overrightarrow{ى_٢}$

يكونان متخالفان إذا كان $\overrightarrow{د_١ د_٢}$. ($\overrightarrow{ى_١} \times \overrightarrow{ى_٢}$) ≠ صفر

ل٢ : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ١ ، ١) + ك٢ (-٦ ، ٢١ ، ٣٣)

$\overrightarrow{ء_١ ء_٢}$ = (١ - ١ ، ١ - ٢ ، ١ - ٤) = (٠ ، -١ ، -٣)

∴ $\overrightarrow{ء_١ ء_٢}$. ($\overrightarrow{ه_١}$ × $\overrightarrow{ه_٢}$) = $\begin{vmatrix} ٠ & -١ & -٣ \\ ٤ & -٢ & ٢ \\ -٦ & ٢١ & ٣٣ \end{vmatrix}$ = (٤ × ٣٣ + ٦ × ٢) - ٣ (٤ × ٢١ + ٦ × ٢) = -٧٢ ≠ صفر

∴ المستقيمان متخالفان.

طول العمود الساقط من نقطة على مستقيم فى الفراغ



بفرض مستقيم ل فى الفراغ معادلته هى : $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{ب}$ + ك $\overrightarrow{ه}$ يمر بالنقطة ب ومتجه اتجاهه $\overrightarrow{ه}$ فإنه لإيجاد بعد نقطة حـ فى الفراغ عن المستقيم ل وليكن (حـ ء) حيث $\overline{حـ ء}$ ⊥ ل ، ء ∈ ل نتبع إحدى الطرق التالية :

الطريقة الأولى

(١) نوجد ب حـ = ‖$\overrightarrow{ب حـ}$‖

(٢) نوجد ب ء = طول مسقط $\overrightarrow{ب حـ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ه}$ = $\frac{|\overrightarrow{ب حـ} . \overrightarrow{ه}|}{\|\overrightarrow{ه}\|}$

(٣) نوجد طول العمود (حـ ء) = $\sqrt{(ب حـ)^٢ - (ب ء)^٢}$ باستخدام فيثاغورس.

الطريقة الثانية

(١) نوجد ب حـ = ‖$\overrightarrow{ب حـ}$‖

(٢) نوجد قياس الزاوية θ من القانون : جتا θ = $\frac{|\overrightarrow{ب حـ} . \overrightarrow{ه}|}{\|\overrightarrow{ب حـ}\| \|\overrightarrow{ه}\|}$

(٣) نوجد طول العمود (حـ ء) = ب حـ جا θ

الطريقة الثالثة

(١) ∵ ء ∈ ل ∴ ء تحقق معادلة المستقيم. ∴ نكتب ء بدلالة ك

(٢) ∵ $\overline{حـ ء}$ ⊥ ل ∴ $\overrightarrow{حـ ء}$. $\overrightarrow{ه}$ = صفر ومنها نوجد ك وبالتالى نوجد النقطة ء

(٣) نوجد طول العمود حـ ء = ‖$\overrightarrow{حـ ء}$‖

الطريقة الرابعة

∵ |$\overrightarrow{ب حـ}$ × $\overrightarrow{ه}$| = |$\overrightarrow{ه}$| |$\overrightarrow{ب حـ}$| جا θ

∵ طول العمود = |$\overrightarrow{ب حـ}$| جا θ ∴ طول العمود (حـ ء) = $\frac{|\overrightarrow{ب حـ} × \overrightarrow{ه}|}{|\overrightarrow{ه}|}$

والمثال التالى يوضح ذلك :

مثال ٧

أوجد بعد النقطة أ (٢ ، ٢$\sqrt{٥}$ ، ٣) عن المستقيم ل الذى معادلته الاتجاهية :

$\overrightarrow{ر}$ = (-٢ ، ٣$\sqrt{٥}$ ، ١) + ك (٨ ، -$\sqrt{٥}$ ، ٢)

الحل

∵ ب (-٢ ، ٣$\sqrt{٥}$ ، ١) نقطة على المستقيم ل

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ = (٢ ، ٢$\sqrt{٥}$ ، ٣) - (-٢ ، ٣$\sqrt{٥}$ ، ١)

= (٤ ، -$\sqrt{٥}$ ، ٢)

∴ ب أ = ‖$\overrightarrow{ب أ}$‖ = $\sqrt{٤^٢ + (-\sqrt{٥})^٢ + ٢^٢}$ = ٥ وحدة طول.

، ب حـ = طول مسقط $\overrightarrow{ب أ}$ على المستقيم ل

، ∵ $\overrightarrow{ه}$ = (٨ ، -$\sqrt{٥}$ ، ٢) متجه اتجاه للمستقيم ل

∴ ب حـ = $\frac{|\overrightarrow{ب أ} . \overrightarrow{ه}|}{|\overrightarrow{ه}|}$ = $\frac{|(٤ ، -\sqrt{٥} ، ٢) . (٨ ، -\sqrt{٥} ، ٢)|}{\sqrt{(٨)^٢ + (-\sqrt{٥})^٢ + ٢^٢}}$

= $\frac{|٣٢ + ٥ + ٤|}{\sqrt{٦٤ + ٥ + ٤}}$ = $\frac{٤١}{\sqrt{٧٣}}$ وحدة طول.

∴ بعد النقطة أ عن المستقيم ل = أ حـ = $\sqrt{٥^٢ - \left(\frac{٤١}{\sqrt{٧٣}}\right)^٢}$ = $\frac{١٢}{\sqrt{٧٣}}$ ≃ ١,٤ وحدة طول.

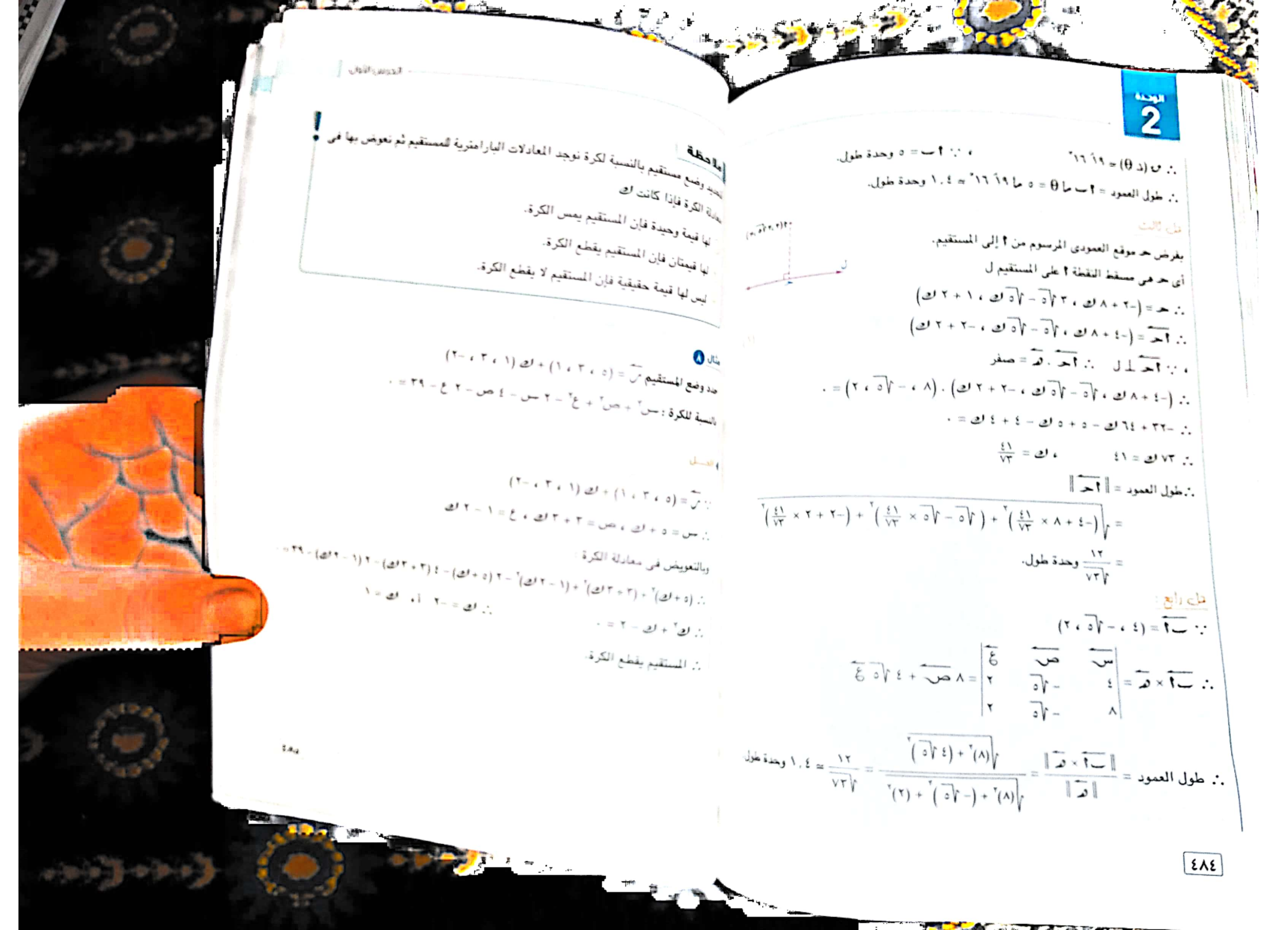
حل آخر

∵ متجه اتجاه المستقيم ل هو $\overrightarrow{ه_١}$ = (٨ ، -$\sqrt{٥}$ ، ٢)

، ∵ متجه اتجاه $\overrightarrow{أ ب}$ هو $\overrightarrow{ه_٢}$ = (٤ ، -$\sqrt{٥}$ ، ٢)

∴ جتا θ = $\frac{|(٨ ، -\sqrt{٥} ، ٢) . (٤ ، -\sqrt{٥} ، ٢)|}{\sqrt{٦٤ + ٥ + ٤}\sqrt{١٦ + ٥ + ٤}}$





∴ ق (د θ) ≃ ١٩َ ٦٦ْ ، ∵ أب = ٥ وحدة طول

∴ طول العمود = أب جا θ = ٥ جا ١٩َ ٦٦ْ ≃ ١.٤ وحدة طول.

حل ثالث

بفرض حـ موقع العمودي المرسوم من أ إلى المستقيم.

أي حـ هي مسقط النقطة أ على المستقيم ل

∴ حـ = (-٢ + ٨ك ، ٣√٥ − √٥ ك ، ١ + ٢ك)

∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (-٤ + ٨ك ، √٥ − √٥ ك ، -٢ + ٢ك)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ⊥ ل ∴ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$. $\overrightarrow{\text{د}}$ = صفر

∴ (-٤ + ٨ك ، √٥ − √٥ ك ، -٢ + ٢ك) . (٨ ، -√٥ ، ٢) = ٠

∴ -٣٢ + ٦٤ك − ٥ + ٥ك − ٤ + ٤ك = ٠

∴ ٧٣ك = ٤١ ، ك = $\frac{٤١}{٧٣}$

∴ طول العمود = ‖$\overrightarrow{\text{أحـ}}$‖

= $\sqrt{\left(-٤ + ٨ \times \frac{٤١}{٧٣}\right)^٢ + \left(\sqrt{٥} - \sqrt{٥} \times \frac{٤١}{٧٣}\right)^٢ + \left(-٢ + ٢ \times \frac{٤١}{٧٣}\right)^٢}$

= $\frac{١٢}{\sqrt{٧٣}}$ وحدة طول.

حل رابع

∵ $\overrightarrow{\text{بأ}}$ = (٤ ، -√٥ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{بأ}} \times \overrightarrow{\text{د}}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -\sqrt{٥} & ٢ \\ ٨ & -\sqrt{٥} & ٢ \end{vmatrix}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٤√٥ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{\text{بأ}} \times \overrightarrow{\text{د}}\|}{\|\overrightarrow{\text{د}}\|} = \frac{\sqrt{(٨)^٢ + (٤\sqrt{٥})^٢}}{\sqrt{(٨)^٢ + (-\sqrt{٥})^٢ + (٢)^٢}} = \frac{١٢}{\sqrt{٧٣}}$ ≃ ١.٤ وحدة طول

ملاحظة

لتحديد وضع مستقيم بالنسبة لكرة نوجد المعادلات البارامترية للمستقيم ثم نعوض بها في معادلة الكرة فإذا كانت ك

- لها قيمة وحيدة فإن المستقيم يمس الكرة.
- لها قيمتان فإن المستقيم يقطع الكرة.
- ليس لها قيمة حقيقية فإن المستقيم لا يقطع الكرة.

مثال ٨

حدد وضع المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، -٢)

بالنسبة للكرة: س² + ص² + ع² − ٢س − ٤ص − ٢ع − ٣٩ = ٠

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، -٢)

∴ س = ٥ + ك ، ص = ٣ + ٣ك ، ع = ١ − ٢ك

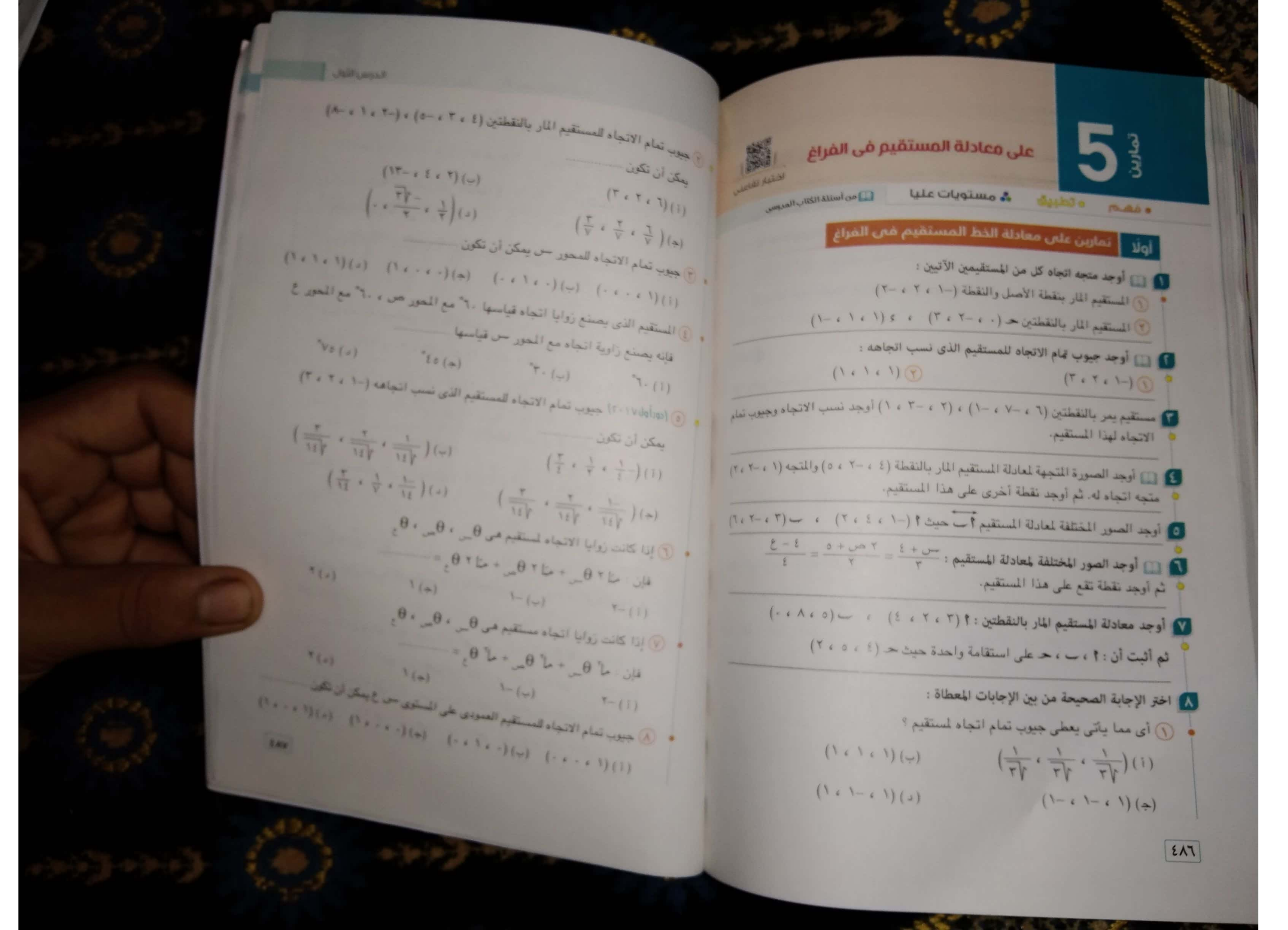
وبالتعويض في معادلة الكرة:

∴ (٥ + ك)² + (٣ + ٣ك)² + (١ − ٢ك)² − ٢(٥ + ك) − ٤(٣ + ٣ك) − ٢(١ − ٢ك) − ٣٩ = ٠

∴ ك² + ك − ٢ = ٠

∴ ك = -٢ ، ك = ١

∴ المستقيم يقطع الكرة.



تمارين 5 على معادلة المستقيم فى الفراغ

• فهم • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

اختبار تفاعلي

أولاً تمارين على معادلة الخط المستقيم في الفراغ

1 أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمين الآتيين :

(١) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (−١ ، ٢ ، −٢)

(٢) المستقيم المار بالنقطتين حـ (٠ ، −٢ ، ٣) ، ء (١ ، ١ ، −١)

2 أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه :

(١) (−١ ، ٢ ، ٣)　　(٢) (١ ، ١ ، ١)

3 مستقيم يمر بالنقطتين (٦ ، −٧ ، −١) ، (٢ ، −٣ ، ١) أوجد نسب الاتجاه وجيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم.

4 أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، −٢ ، ٥) والمتجه (١ ، −٢ ، ٢) متجه اتجاه له. ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم.

5 أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ (−١ ، ٤ ، ٢) ، ب (٣ ، −٢ ، ٦)

6 أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم : $\frac{س + ٤}{٣} = \frac{٢ص + ٥}{٢} = \frac{٤ - ع}{٤}$

ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم.

7 أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : أ (٣ ، ٢ ، ٤) ، ب (٥ ، ٨ ، ٠)

ثم أثبت أن : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة حيث حـ (٤ ، ٥ ، ٢)

8 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى مما يأتى يعطى جيوب تمام اتجاه لمستقيم ؟

(أ) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} ، \frac{1}{\sqrt{3}} ، \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　(ب) (١ ، ١ ، ١)

(جـ) (١ ، −١ ، −١)　　(د) (١ ، −١ ، ١)

(٢) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٣ ، −٥) ، (−٢ ، ١ ، −٨) يمكن أن تكون ......

(أ) (٦ ، ٢ ، ٣)　　(ب) (٢ ، ٤ ، −١٣)

(جـ) $\left(\frac{6}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{3}{7}\right)$　　(د) $\left(\frac{1}{2} ، \frac{-\sqrt{3}}{2} ، ٠\right)$

(٣) جيوب تمام الاتجاه للمحور س يمكن أن تكون ......

(أ) (١ ، ٠ ، ٠)　　(ب) (٠ ، ١ ، ٠)　　(جـ) (٠ ، ٠ ، ١)　　(د) (١ ، ١ ، ١)

(٤) المستقيم الذى يصنع زوايا اتجاه قياسها ٦٠° مع المحور ص ، ٦٠° مع المحور ع فإنه يصنع زاوية اتجاه مع المحور س قياسها ......

(أ) ٦٠°　　(ب) ٣٠°　　(جـ) ٤٥°　　(د) ٧٥°

(٥) (دور أول ٢٠١٧) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه (−١ ، ٢ ، ٣) يمكن أن تكون ......

(أ) $\left(\frac{-1}{4} ، \frac{1}{2} ، \frac{3}{4}\right)$　　(ب) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}} ، \frac{2}{\sqrt{14}} ، \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-1}{\sqrt{14}} ، \frac{2}{\sqrt{14}} ، \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$　　(د) $\left(\frac{-1}{14} ، \frac{1}{7} ، \frac{3}{14}\right)$

(٦) إذا كانت زوايا الاتجاه لمستقيم هى $\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع$

فإن: جتا ٢$\theta_س$ + جتا ٢$\theta_ص$ + جتا ٢$\theta_ع$ = ...

(أ) −٢　　(ب) −١　　(جـ) ١　　(د) ٢

(٧) إذا كانت زوايا اتجاه مستقيم هى $\theta_س ، \theta_ص ، \theta_ع$

فإن: جا² $\theta_س$ + جا² $\theta_ص$ + جا² $\theta_ع$ = ...

(أ) −٢　　(ب) −١　　(جـ) ١　　(د) ٢

(٨) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم العمودى على المستوى س ع يمكن أن تكون ......

(أ) (١ ، ٠ ، ٠)　　(ب) (٠ ، ١ ، ٠)　　(جـ) (٠ ، ٠ ، ١)　　(د) (١ ، ٠ ، ١)



الوحدة 2

● مهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(٩) إذا كانت جيوب تمام الاتجاه لمستقيم هى $\left(\frac{1}{\text{حـ}} ، \frac{1}{\text{حـ}} ، \frac{1}{\text{حـ}}\right)$ فإن : ....

(أ) حـ < ٠　(ب) ٠ < حـ < ١　(جـ) حـ = $\pm\sqrt{3}$　(د) حـ > ١

(١٠) معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٠ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = (١ ، −١ ، ٢)

متجه اتجاه له هى ....

(أ) $\frac{\text{س}-1}{2} = \frac{\text{ص}}{1} = \frac{\text{ع}-1}{-1}$　(ب) $\frac{\text{س}+1}{1} = \frac{\text{ص}}{-1} = \frac{\text{ع}-2}{2}$

(جـ) $\frac{\text{س}-1}{2} = \frac{\text{ص}}{-1} = \frac{\text{ع}}{1}$　(د) $\frac{\text{س}-1}{1} = \frac{\text{ص}-1}{-1} = \frac{\text{ع}}{2}$

(١١) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، −١ ، ٣) ، (٠ ، ٣ ، ١) هى ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (٢ ، −٤ ، ٢)

(ب) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (٢ ، ٢ ، ٤)

(جـ) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −٤ ، ٢) + ك (٢ ، −١ ، ٣)

(د) $\overrightarrow{\text{ر}}$. (٢ ، −٤ ، ٢) = صفر

(١٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (−٢ ، ٤ ، ٢) ، (٧ ، −٢ ، ٥) هى ....

(أ) $\frac{\text{س}+2}{3} = \frac{\text{ص}-4}{-2} = \frac{\text{ع}-2}{1}$　(ب) $\frac{\text{س}}{7} = \frac{\text{ص}}{-2} = \frac{\text{ع}}{5}$

(جـ) $\frac{\text{س}}{-2} = \frac{\text{ص}}{4} = \frac{\text{ع}}{2}$　(د) $\frac{\text{س}-1}{1} = \frac{\text{ص}-2}{3} = \frac{\text{ع}+1}{1}$

(١٣) المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين أ (−١ ، ٠ ، ٣) ، ب (١ ، −١ ، ٠)

هى ....

(أ) س = −١ + ك ، ص = −ك ، ع = ٣ − ٣ ك

(ب) س = −١ + ٢ ك ، ص = −ك ، ع = −٣ ك

(جـ) س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ − ك ، ع = −٣ ك

(د) س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ + ك ، ع = ٣ − ٣ ك

(١٤) معادلة المستقيم الذى معادلته المتجهه : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ ، ٣ ، ٩) + ك (٥ ، ٤ ، ٢)

هى ....

(أ) س − ٥ = $\frac{\text{ص}-2}{3} = \frac{\text{ص}-4}{4} = \frac{\text{ع}-2}{9}$　(ب) $\frac{\text{س}-1}{5} = \frac{\text{ص}-3}{4} = \frac{\text{ع}-9}{2}$

(جـ) س + ٥ = $\frac{\text{ص}+4}{3} = \frac{\text{ع}+2}{9}$　(د) $\frac{\text{س}+1}{5} = \frac{\text{ص}+3}{4} = \frac{\text{ع}+9}{2}$

(١٥) المعادلة المتجهة للمستقيم الذى معادلته الإحداثية : $\frac{\text{س}+2}{2} = \frac{2\text{ص}-1}{5} = \frac{3\text{ع}+2}{4}$

هى ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = $\left(-3 ، \frac{1}{2} ، \frac{-2}{3}\right)$ + ك $\left(2 ، \frac{5}{2} ، \frac{4}{3}\right)$

(ب) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٣ ، ١ ، −٢) + ك (٢ ، ٥ ، ٤)

(جـ) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٥ ، ٤) + ك (−٣ ، ١ ، −٢)

(د) $\overrightarrow{\text{ر}}$ = $\left(2 ، \frac{5}{2} ، \frac{4}{3}\right)$ + ك $\left(-3 ، -\frac{1}{2} ، \frac{-2}{3}\right)$

(١٦) أى من المستقيمات الآتية يمر بالنقطة (−٢ ، ٣ ، ٥) وموازى للمستقيم

ل : $\frac{\text{س}-1}{2} = \frac{\text{ص}+1}{4} = \frac{\text{ع}-2}{3}$ ؟

(أ) س = ٢ + ٢ ك ، ص = ٣ + ٤ ك ، ع = ٥ + ٣ ك

(ب) $\frac{\text{س}+2}{2} = \frac{\text{ص}-3}{4} = \frac{\text{ع}-5}{3}$

(جـ) س = ١ + ٢ ك ، ص = −١ + ٤ ك ، ع = ٣ + ٣ ك

(د) س = ٢ + ٢ ك ، ص = −٣ + ٤ ك ، ع = −٥ + ٣ ك

(١٧) معادلة المحور ص فى الفراغ هى ....

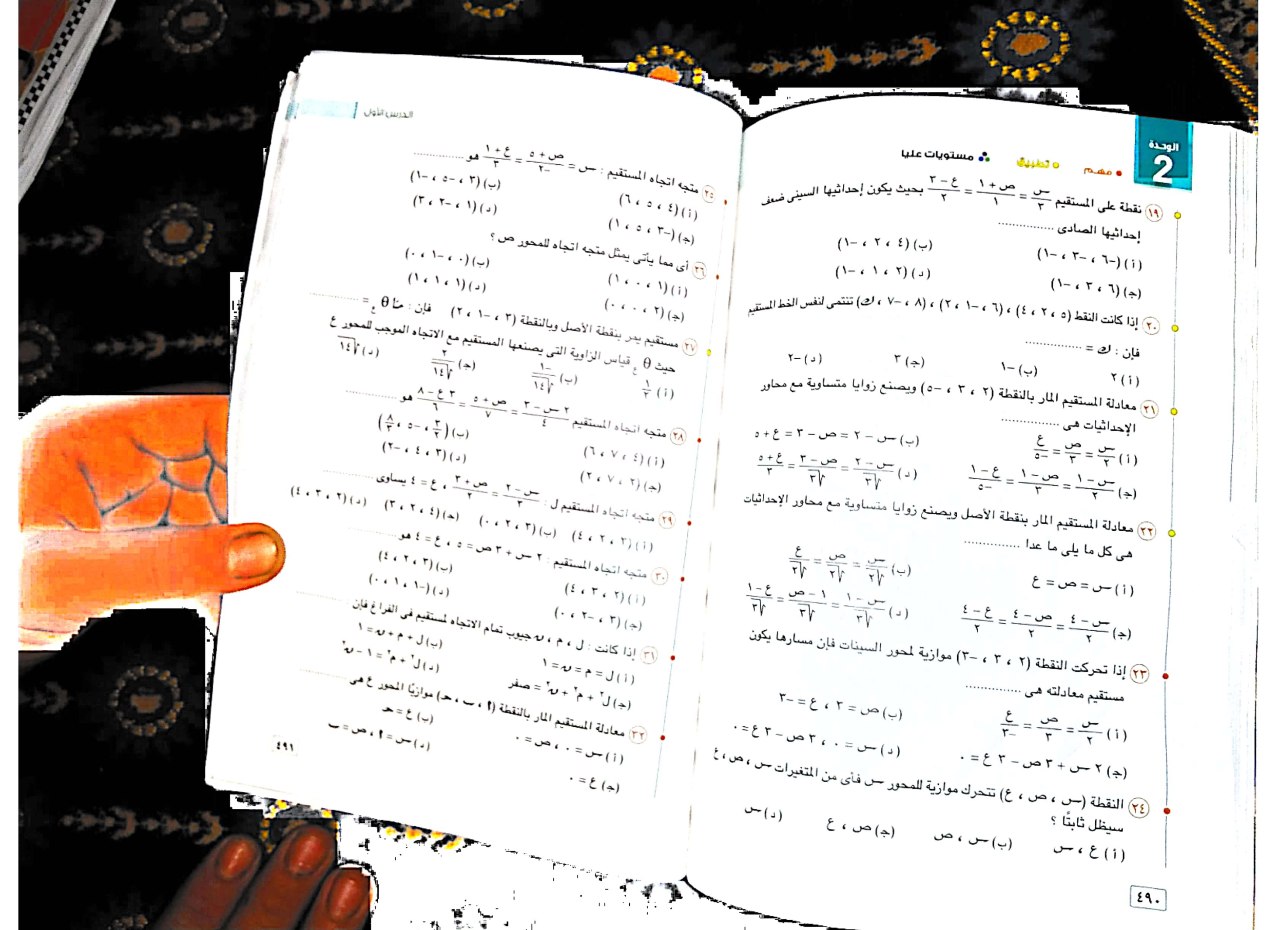
(أ) س = ٠ ، ع = ٠　(ب) ع = ٠ ، ص = ٠

(جـ) س = ٠　(د) ع = ٠

(١٨) النقطة التى تقع على المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، −١)

هى ....

(أ) (١ ، ١ ، ١)　(ب) (٠ ، ٢ ، −٢)　(جـ) (٣ ، ١ ، ٢)　(د) (٤ ، −٣ ، ٠)



الوحدة 2

● مهم ● تطبيق ● مستويات عليا

(١٩) نقطة على المستقيم $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص} + ١}{١} = \frac{\text{ع} - ٣}{٢}$ بحيث يكون إحداثيها السينى ضعف إحداثيها الصادى ....

(أ) (−٦ ، −٣ ، −١) (ب) (٤ ، ٢ ، −١)

(جـ) (٦ ، ٣ ، −١) (د) (٢ ، ١ ، −١)

(٢٠) إذا كانت النقط (٥ ، ٢ ، ٤) ، (٦ ، −١ ، ٢) ، (٨ ، −٧ ، ك) تنتمى لنفس الخط المستقيم

فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −١ (جـ) ٣ (د) −٢

(٢١) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، −٥) ويصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات هى ....

(أ) $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{\text{ع}}{-٥}$ (ب) س − ٢ = ص − ٣ = ع + ٥

(جـ) $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} - ١}{٣} = \frac{\text{ع} - ١}{-٥}$ (د) $\frac{\text{س} - ٢}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ص} - ٣}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ع} + ٥}{٣}$

(٢٢) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات هى كل ما يلى ما عدا ....

(أ) س = ص = ع (ب) $\frac{\text{س}}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ص}}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{٣}}$

(جـ) $\frac{\text{س} - ٤}{٢} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} - ٤}{٢}$ (د) $\frac{\text{س} - ١}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ص} - ١}{\sqrt{٣}} = \frac{\text{ع} - ١}{\sqrt{٣}}$

(٢٣) إذا تحركت النقطة (٢ ، ٣ ، −٣) موازية لمحور السينات فإن مسارها يكون مستقيم معادلته هى ....

(أ) $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{\text{ع}}{-٣}$ (ب) ص = ٣ ، ع = −٣

(جـ) ٢ س + ٣ ص − ٣ ع = ٠ (د) س = ٠ ، ٣ ص − ٣ ع = ٠

(٢٤) النقطة (س ، ص ، ع) تتحرك موازية للمحور س فأى من المتغيرات س ، ص ، ع سيظل ثابتًا ؟

(أ) ع ، س (ب) س ، ص (جـ) ص ، ع (د) س

(٢٥) متجه اتجاه المستقيم : $\text{س} = \frac{\text{ص} + ٥}{-٢} = \frac{\text{ع} + ١}{٣}$ هو ....

(أ) (٤ ، ٥ ، ٦) (ب) (٣ ، −٥ ، −١)

(جـ) (−٣ ، ٥ ، ١) (د) (١ ، −٢ ، ٣)

(٢٦) أى مما يأتى يمثل متجه اتجاه للمحور ص ؟

(أ) (١ ، ٠ ، ١) (ب) (٠ ، −١ ، ٠)

(جـ) (٢ ، ٠ ، ٠) (د) (١ ، ١ ، ١)

(٢٧) مستقيم يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٣ ، −١ ، ٢) فإن : جتا $\theta_{\text{ع}}$ = ...

حيث $\theta_{\text{ع}}$ قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور ع

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{\sqrt{١٤}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ (د) $\sqrt{١٤}$

(٢٨) متجه اتجاه المستقيم $\frac{٢\text{س} - ٣}{٤} = \frac{\text{ص} + ٥}{٧} = \frac{٣\text{ع} - ٨}{٦}$ هو ....

(أ) (٤ ، ٧ ، ٦) (ب) $(\frac{٣}{٢} ، -٥ ، \frac{٨}{٣})$

(جـ) (٢ ، ٧ ، ٢) (د) (٣ ، ٤ ، −٢)

(٢٩) متجه اتجاه المستقيم ل : $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} + ٣}{٢}$ ، ع = ٤ يساوى ....

(أ) (٢ ، ٢ ، ٤) (ب) (٣ ، ٢ ، ٠) (جـ) (٤ ، ٢ ، ٣) (د) (٢ ، ٣ ، ٤)

(٣٠) متجه اتجاه المستقيم : ٢ س + ٣ ص = ٥ ، ع = ٤ هو ....

(أ) (٢ ، ٣ ، ٤) (ب) (٣ ، ٢ ، ٤)

(جـ) (٣ ، −٢ ، ٠) (د) (−١ ، ١ ، ٠)

(٣١) إذا كانت : ل ، م ، ن جيوب تمام الاتجاه لمستقيم فى الفراغ فإن : ....

(أ) ل = م = ن = ١ (ب) ل + م + ن = ١

(جـ) ل^٢ + م^٢ + ن^٢ = صفر (د) ل^٢ + م^٢ = ١ − ن^٢

(٣٢) معادلة المستقيم المار بالنقطة (أ ، ب ، حـ) موازيًا المحور ع هى ....

(أ) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) ع = حـ

(جـ) ع = ٠ (د) س = أ ، ص = ب

الوحدة 2

● مهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

(٣٣) فى الشكل المقابل :

معادلة المستقيم ل هى ....

(أ) س = (ص − ٢)/٢ = ع − ١

(ب) س = (ص + ٢)/٢ = (ع − ١)/٢

(جـ) س/٢ = (ص − ٢)/−٢ = ع − ١

(د) س = (ص − ٢)/−٢ = ع − ١

(٣٤) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أ (١ ، ٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ٠ ، ٥) ، حـ (١ ، ٤ ، ٠) ، م نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، فإن معادلة المستقيم أم هى ....

(أ) ر→ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ٤ ، ٥)

(ب) ر→ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ١ ، ١)

(جـ) ر→ = (١ ، ٢ ، ٤) + ك (−١ ، ٠ ، −١)

(د) ر→ = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، ٤)

(٣٥) بوضع قيم حقيقية مختلفة للرمز ك فى معادلة المستقيم ر→ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (١ ، −٢ ، ٤) نحصل على ....

(أ) متجهات اتجاه مختلفة لنفس الخط المستقيم.

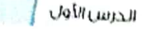
(ب) نقط مختلفة تقع على الخط المستقيم.

(جـ) متجهات اتجاه مختلفة عمودية على الخط المستقيم.

(د) جيوب تمام مختلفة لنفس الخط المستقيم.

(٣٦) إذا قطع المستقيم ر→ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (−٢ ، ١ ، −١) المستوى ع = ٢ فى نقطة أ والمستوى س = ٣ فى نقطة ب فإن طول أب = ... وحدة طول.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) $٢\sqrt{٦}$ (د) $٦\sqrt{٢}$



(٣٧) إذا قطع المستقيم الذى متجه اتجاهه (٢ ، ٠ ، −٢) الكرة (س − ٢)² + (ص + ١)² + (ع − ٣)² = ٤ فى النقطتين أ ، ب حيث أ = (٠ ، −١ ، ٣) فإن : طول أب = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) $٢\sqrt{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{٦}$ (د) $\sqrt{٦}$

١ أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم :

(١) المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ١) ، (−١ ، ٢ ، ٤)

(٢) المار بالنقطتين (٢ ، −١ ، ٥) ، (−٣ ، ١ ، ٤)

(٣) المار بنقطة الأصل ، والمتجه (−٢ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه له.

(٤) المار بالنقطة (٤ ، −٢ ، ٥) والمتجه ى→ = (٢ ، ١ ، −١) متجه اتجاه له.

(٥) المار بالنقطة (٢ ، ٠ ، −٣) وموازيًا للمتجه أ→ = (٢ ، −٣ ، ٠)

(٦) المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

(٧) المار بالنقطة أ (١ ، −١ ، ٠) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (−٣ ، ٢ ، ١) ، حـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ى (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم.

(٨) المار بالنقطة (−١ ، ٤ ، ٢) والموازى للمستقيم (س − ٢)/٤ = ص/٥ = (ع + ٢)/٣

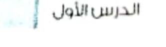
(٩) المار بالنقطة (١ ، ٥ ، −٢) والموازى للمستقيم : س = ٣ + ٤ ك ، ص = ٧ − ٣ ك ، ع = −٦ + ٢١ ك

(١٠) الذى يحمل المتوسط المرسوم من حـ فى Δ أ ب حـ حيث : أ (٣ ، ٦ ، −٧) ، ب (−٥ ، ٢ ، ٣) ، حـ (٤ ، −٧ ، −٢)

(١١) المار بالنقطة (١ ، −١ ، ١) ومركز الكرة ٢ س² + ٢ ص² + ٢ ع² − ٢ س + ٤ ص − ٦ ع = ١

(١٢) الذى معادلته المتجهة : ر→ = (١ ، ٣ ، ٩) + ك (٥ ، ٤ ، ٢)

(١٣) الذى معادلته المتماثلة : س − ٢ = (ص + ٤)/٥ = (٧ − ع)/٢



(١٤) الذى معادلته المتماثلة : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ ص - ١}{٥} = \frac{٣ ع + ٢}{٤}$

(١٥) المار بالنقطة أ (١ ، -٢ ، ٥) والموازى لمنصف الربع الثانى من المستوى ص ع

١٠ مكعب إحدى رؤوسه تقع على نقطة الأصل وتقع الثلاثة أحرف المرسومة من هذه الرأس على الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات فإذا كان طول حرف المكعب ٥ وحدات طول، أوجد معادلة المستقيم الذى يحمل القطر الرئيسى المرسوم من نقطة الأصل.

١١ أوجد مسقط النقطة أ (٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢ ، ٣) ، حـ (٧ ، -٢ ، ٥)

١٢ ماذا يمكن أن تقول عن المستقيم الذى متجه اتجاهه $\overrightarrow{ي}$ = (أ ، ب ، صفر) ؟

١٣ اكتشف الخطأ :

(١) مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١

(٢) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) هى ($س_٢ - س_١$ ، $ص_٢ - ص_١$ ، $ع_٢ - ع_١$)

ثانيا تمارين على الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية بين المستقيمين $\overrightarrow{ر_١}$ = (-٢ ، ٥ ، -٧) + ك (-٦ ، ٦ ، ٨) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (١ ، -٢ ، ٣) + ك (٤ ، ١٢ ، -٦) يساوى ....

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاهيهما (١ ، ١ ، ٢) ، ($\sqrt{٣} - ١$ ، $-\sqrt{٣} - ١$ ، ٤) هى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٣) (دور ثان ٢٠١٧) إذا كانت جيوب تمام اتجاهات مستقيمين هى ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠) فإن قياس الزاوية بين المستقيمين يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٤) قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ص = -ع ، ٦ س = -ص = -٤ ع يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٤٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٥) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى (١ ، ١ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) يساوى ....

(أ) $جتا^{-١}\left(\frac{-٥\sqrt{٣}}{٩}\right)$ (ب) $جتا^{-١}\left(\frac{٥\sqrt{٣}}{٩}\right)$ (جـ) $جا^{-١}\left(\frac{٥\sqrt{٣}}{٩}\right)$ (د) $جتا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٩}\right)$

(٦) قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، ص = ١ ، $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص - ٢}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ يساوى ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

(٧) قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم : $\frac{س - ١}{\sqrt{٢}} = \frac{ص - \sqrt{٢}}{١} = \frac{ع + ١}{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

(٨) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{١}$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{-١}$ يساوى ٦٠° فإن : قيمة أ = ...

(أ) ١ أ، $\frac{٢}{٥}$ (ب) ١ أ، $\frac{-١٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ أ، $\frac{-١٣}{٥}$ (د) $\pm\frac{١٣}{٥}$

(٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $ل_١$: س = ٠ ، ص = ع

، $ل_٢$: ص = ٠ ، س = ع

فإن : θ = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١٣٥° (جـ) ١٥٠° (د) ١٦٥°

(١٠) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: س = ٢ ص + ١ ، ٢ ص = ١ - ع ، $ل_٢$: ٢ س + ص + ع = ٠ ، ع + ٢ = ٠ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

٢ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاهيهما :

$\left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) ، \left(\frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

٣ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

$ل_١$: ٢ س = ٣ ص − ١ = ع − ٣ ، $ل_٢$: $\vec{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٥) + ك (−١ ، ١ ، ٢)

٤ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين : $ل_١$: $\vec{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + $ك_١$ (−٢ ، ٠ ، ٢)

، $ل_٢$: س = ١ ، $\frac{ص - ٤}{٣} = \frac{ع + ٥}{-٣}$

٥ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين : $ل_١$: س = ٢ − ٥ ك ، ص = ١ − ك

، ع = ٣ + ٤ ك ، $ل_٢$: $\frac{س + ١}{٣} = \frac{٢ - ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$

٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

(١) $ل_١$: يمر بالنقطتين (−٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، −٢)

$ل_٢$: يمر بالنقطتين (١ ، −٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

(٢) $ل_١$: $\vec{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + $ك_١$ (−١ ، ٤ ، ٢)

$ل_٢$: $\vec{ر}$ = (٠ ، ٢ ، −١) + $ك_٢$ (١ ، ١ ، ٣)

(٣) $ل_١$: ٢ س = ٣ ص = ٤ ع

$ل_٢$: $\frac{س + ١}{٣} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع}{-٥}$

٧ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

$ل_١$: س = ٢ + ٤ $ك_١$ ، ص = ١ − $ك_١$ ، ع = ٢ + ٥ $ك_١$

$ل_٢$: س = −١ + $ك_٢$ ، ص = ٢ $ك_٢$ ، ع = ٤ − $ك_٢$

٨ أوجد قياس الزاوية بين المستقيم :

س = ١ ، ص = ٢ والمستقيم ص = −١ ، ع = ٠

١ أثبت أن قياس الزاوية بين قطرى المكعب = $\text{جتا}^{-١} \frac{١}{٣}$

٢ اكتشف الخطأ : إذا كان : ($أ_١$ ، $ب_١$ ، $ح_١$) ، ($أ_٢$ ، $ب_٢$ ، $ح_٢$) هى نسب الاتجاه للمستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة :

جتا θ = | $أ_١ أ_٢$ + $ب_١ ب_٢$ + $ح_١ ح_٢$ |

ثالثًا تمارين على أوضاع مستقيمين فى الفراغ

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\vec{أ}$ = (−٢ ، ك ، −٣) يوازى متجه اتجاه المستقيم $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص}{٨} = \frac{ع - ١}{٦}$ فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) −٢ (د) −١

(٢) إذا كان المستقيم : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ك}$ يوازى المستقيم : $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ فإن : ك + م = ...

(أ) $\frac{١٧}{٢}$ (ب) $\frac{١١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١٥}{٢}$ (د) $\frac{-٢١}{٢}$

(٣) إذا كان $ل_١$: $\frac{س - ٣}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$ يوازى $ل_٢$: $\frac{س + ٥}{-٢} = \frac{ص}{ك + ١} = \frac{ع - ١}{٨}$

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤) (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان المستقيم : $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص - ١}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$

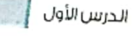
عموديًا على المستقيم $\frac{س - ٩}{-٢} = \frac{ص + ٨}{١}$ ، ع = ٣ فإن : م = ...

(أ) −١٢ (ب) صفر (جـ) ٦ (د) ١٢

(٥) إذا كان المستقيمان : $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٤}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{ع - ١}{[illegible]}$

متعامدين فإن : ك = ...

(أ) −١ (ب) [illegible] (جـ) [illegible] (د) [illegible]



الوحدة 2

● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

٦ إذا كان $ل_1 : \frac{س+2}{-1} = \frac{ص+3}{3} = \frac{ع+5}{2}$ عموديًا على $ل_2 : \frac{س}{2} = \frac{ص-5}{ك} = \frac{ع-6}{م}$ فإن: $3ك + 2م =$ ......

(أ) -1 (ب) 2 (جـ) م (د) 4

٧ (دور ثان ٢٠١٩) إذا كان المستقيمان $ل_1$: $س = 2ك_1 - 1$ ، $ص = ك_1 + 1$ ، $ع = ك_1 - 1$ ، $ل_2$: $س = أك_2 - 1$ ، $ص = 2ك_2 + 1$ ، $ع = ب ك_2 - 2$ متوازيين فإن: $أ + ب =$ ......

(أ) 4 (ب) 2 (جـ) 6 (د) -2

٨ (دور أول ٢٠٢١) إذا كان المستقيمان $ل_1 : ر = ك_1(-2 ، م ، 7)$ ، $ل_2 : \frac{س-1}{ن} = \frac{1-ص}{4} = \frac{ع-2}{2}$ متعامدين فإن: $ن + 2م =$ ......

(أ) 7 (ب) -7 (جـ) 14 (د) -14

٩ المستقيمان: $\frac{س-1}{1} = \frac{ص-2}{2} = \frac{ع-3}{3}$ ، $\frac{س}{2} = \frac{ص+2}{2} = \frac{ع-2}{-2}$ ......

(أ) متعامدان. (ب) منطبقان. (جـ) متوازيان. (د) متقاطعان.

١٠ المستقيمان: $ر = أ_1 + ك_1 ب_1$ ، $ر = أ_2 + ك_2 ب_2$ متوازيان إذا كان ......

(أ) $ب_1 = ل ب_2$ ، $ل \in ح^*$ (ب) $ب_2 \parallel (أ_2 - أ_1)$ (جـ) $ب_1 \parallel (أ_2 - أ_1)$ (د) $ب_1 \cdot ب_2 =$ صفر

١١ إذا كان: (أ ، ب ، جـ) ، (أَ ، بَ ، جـَ) هما متجها اتجاه لمستقيمين متعامدين فإن: ......

(أ) أأَ + ب بَ + جـ جـَ = ١ (ب) أأَ + ب بَ + جـ جـَ = ٠ (جـ) $\frac{أ}{أَ} = \frac{ب}{بَ} = \frac{جـ}{جـَ}$ (د) أ + ب + جـ = أَ + بَ + جـَ

١٢ المستقيمان: $\frac{س-1}{2} = \frac{ص-2}{4} = \frac{ع-3}{7}$ ، $\frac{س-1}{4} = \frac{ص-2}{5} = \frac{ع-3}{7}$ ......

(أ) متعامدان. (ب) متقاطعان. (جـ) متخالفان. (د) متوازيان.

١٣ المستقيمان س = ص = ع ، ٢س = ٣ص = ع ......

(أ) متخالفان. (ب) متقاطعان ومتعامدان. (جـ) متوازيان. (د) متقاطعان وغير متعامدين.

١٤ إذا كان المستقيمان $ل_1 : ر = (1 ، 2 ، 3) + ك_1(1 ، 2 ، 3)$ ، $ل_2 : ر = (-1 ، 2 ، 0) + ك_2(م ، 2 ، -1)$ متقاطعين. فإن: م = ...

(أ) $\frac{-8}{3}$ (ب) $\frac{-5}{3}$ (جـ) صفر (د) -3

١ أثبت أن المستقيمين متقاطعين وأوجد نقطة تقاطعهما:

$ل_1$: $س = ك_1 + 4$ ، $ص = -4ك_1 - 3$ ، $ع = 7ك_1 - 1$

$ل_2$: $س = 2ك_2 + 1$ ، $ص = -3ك_2 - 1$ ، $ع = 8ك_2 - 10$ «(٥ ، -٧ ، ٦)»

٢ أثبت أن المستقيمين: $\frac{س-6}{2} = \frac{ص-1}{2} = \frac{ع-5}{3}$ ، $\frac{س-2}{1} = \frac{ص-3}{-2} = \frac{ع+4}{3}$ متقاطعين وأوجد إحداثيات نقطة التقاطع. «(٤ ، -١ ، ٢)»

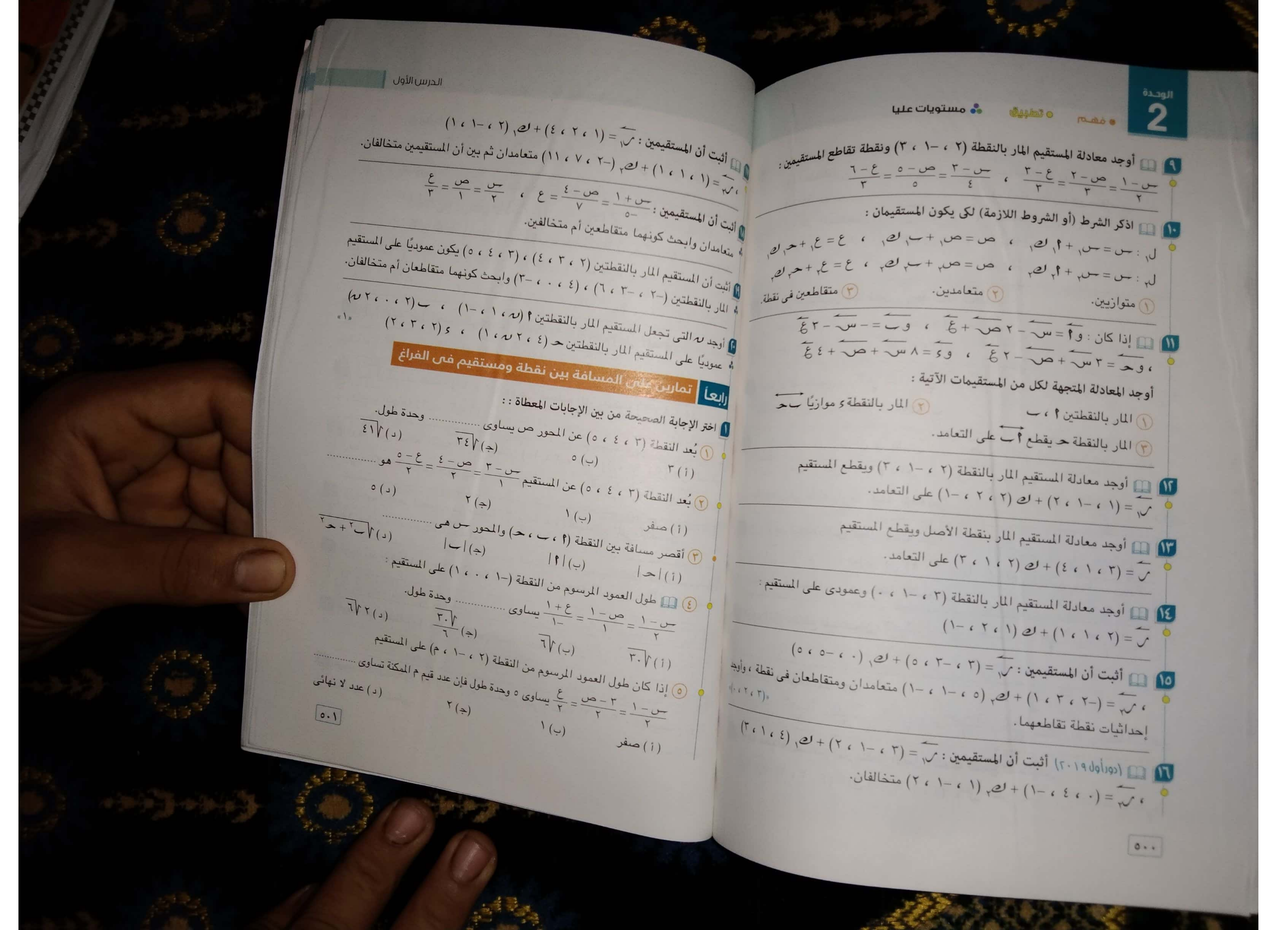
٤ (دور ثان ٢٠١٩) أثبت أن المستقيمين: $ر_1 = ص + ك_1(س + 2ص - ع)$ ، $ر_2 = (س + ص + ع) + ك_2(-2س - 2ص)$ متقاطعان في نقطة وأوجد نقطة تقاطعهما. «(-١ ، -١ ، ١)»

٥ أوجد قيمة ن التي تجعل المستقيمين: $ل_1 : ر = (3 ، -1 ، ن) + ك_1(4 ، 1 ، 3)$ ، $ل_2 : س = \frac{ص-4}{-1} = \frac{ع+1}{2}$ متقاطعان في نقطة ، وأوجد نقطة تقاطعهما. «٧ ، $(\frac{22}{5} ، \frac{3}{5} ، \frac{41}{5})$»

٦ أوجد أ لكي يتقاطع المستقيمان: $\frac{س+2}{2} = \frac{ص}{-3} = \frac{ع-1}{4}$ ، $\frac{س-3}{أ} = \frac{ص-1}{4} = \frac{ع-7}{2}$ «٣»

٧ أثبت أن مجموعة المعادلات: $\frac{س-1}{-6} = \frac{ص-2}{-8} = \frac{ع-3}{24}$ ، $\frac{س-4}{3} = \frac{ص-6}{4} = \frac{ع+9}{-12}$ تمثلان نفس الخط المستقيم.

٨ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وبنقطة تقاطع المستقيمين: $ل_1 : ر = (2 ، 3 ، 4) + ك(-4 ، -4 ، 5)$ ، $ل_2 : س = -6$ ، $\frac{ص+10}{1} = \frac{ع+1}{2}$



٩ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –١ ، ٣) ونقطة تقاطع المستقيمين :

$\frac{س-١}{٢} = \frac{ص-٢}{٣} = \frac{ع-٣}{٣}$ ، $\frac{س-٣}{٤} = \frac{ص-٥}{٥} = \frac{ع-٦}{٣}$

١٠ اذكر الشرط (أو الشروط اللازمة) لكي يكون المستقيمان :

ل١ : س = س١ + أ١ ك١ ، ص = ص١ + ب١ ك١ ، ع = ع١ + حـ١ ك١

ل٢ : س = س٢ + أ٢ ك٢ ، ص = ص٢ + ب٢ ك٢ ، ع = ع٢ + حـ٢ ك٢

(١) متوازيين. (٢) متعامدين. (٣) متقاطعين فى نقطة.

١١ إذا كان : $\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وب} = -\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وحـ} = ٣\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{وء} = ٨\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٤\overrightarrow{ع}$

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات الآتية :

(١) المار بالنقطتين أ ، ب (٢) المار بالنقطة ء موازيًا $\overleftrightarrow{بحـ}$

(٣) المار بالنقطة حـ يقطع $\overleftrightarrow{أب}$ على التعامد.

١٢ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –١ ، ٣) ويقطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = (١ ، –١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، –١)$ على التعامد.

١٣ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = (٣ ، ١ ، ٤) + ك (٢ ، ١ ، ٣)$ على التعامد.

١٤ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، –١ ، ٠) وعمودى على المستقيم : $\overrightarrow{ر} = (٢ ، ١ ، ١) + ك (١ ، ٢ ، –١)$

١٥ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١} = (٣ ، –٣ ، ٥) + ك_١ (٠ ، –٥ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{ر_٢} = (–٢ ، ٣ ، ١) + ك_٢ (٥ ، –١ ، –١)$ متعامدان ومتقاطعان فى نقطة ، وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما. «(٣ ، ٢ ، ٠)»

١٦ (دور أول ٢٠١٩) أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١} = (٣ ، –١ ، ٢) + ك_١ (٤ ، ١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ر_٢} = (٠ ، ٤ ، –١) + ك_٢ (١ ، –١ ، ٢)$ متخالفان.

١٧ أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_١} = (١ ، ٢ ، ٤) + ك_١ (٢ ، –١ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ر_٢} = (١ ، ١ ، ١) + ك_٢ (–٢ ، ٧ ، ١١)$ متعامدان ثم بين أن المستقيمين متخالفان.

١٨ أثبت أن المستقيمين : $\frac{س+١}{-٥} = \frac{ص-٤}{٧} = ع$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{٣}$ متعامدان وابحث كونهما متقاطعين أم متخالفين.

١٩ أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٤ ، ٥) يكون عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين (–٢ ، –٣ ، ٦) ، (٤ ، ٠ ، –٣) وابحث كونهما متقاطعان أم متخالفان.

٢٠ أوجد ن التى تجعل المستقيم المار بالنقطتين أ (ن ، ١ ، –١) ، ب (٢ ، ٠ ، ٢ن) عموديًا على المستقيم المار بالنقطتين حـ (٤ ، ٢ن ، ١) ، ء (٢ ، ٣ ، ٢) «١»

رابعًا تمارين على المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) بُعد النقطة (٣ ، ٤ ، ٥) عن المحور ص يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{٣٤}$ (د) $\sqrt{٤١}$

(٢) بُعد النقطة (٣ ، ٤ ، ٥) عن المستقيم $\frac{س-٣}{١} = \frac{ص-٤}{٢} = \frac{ع-٥}{٢}$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣) أقصر مسافة بين النقطة (أ ، ب ، حـ) والمحور س هى ....

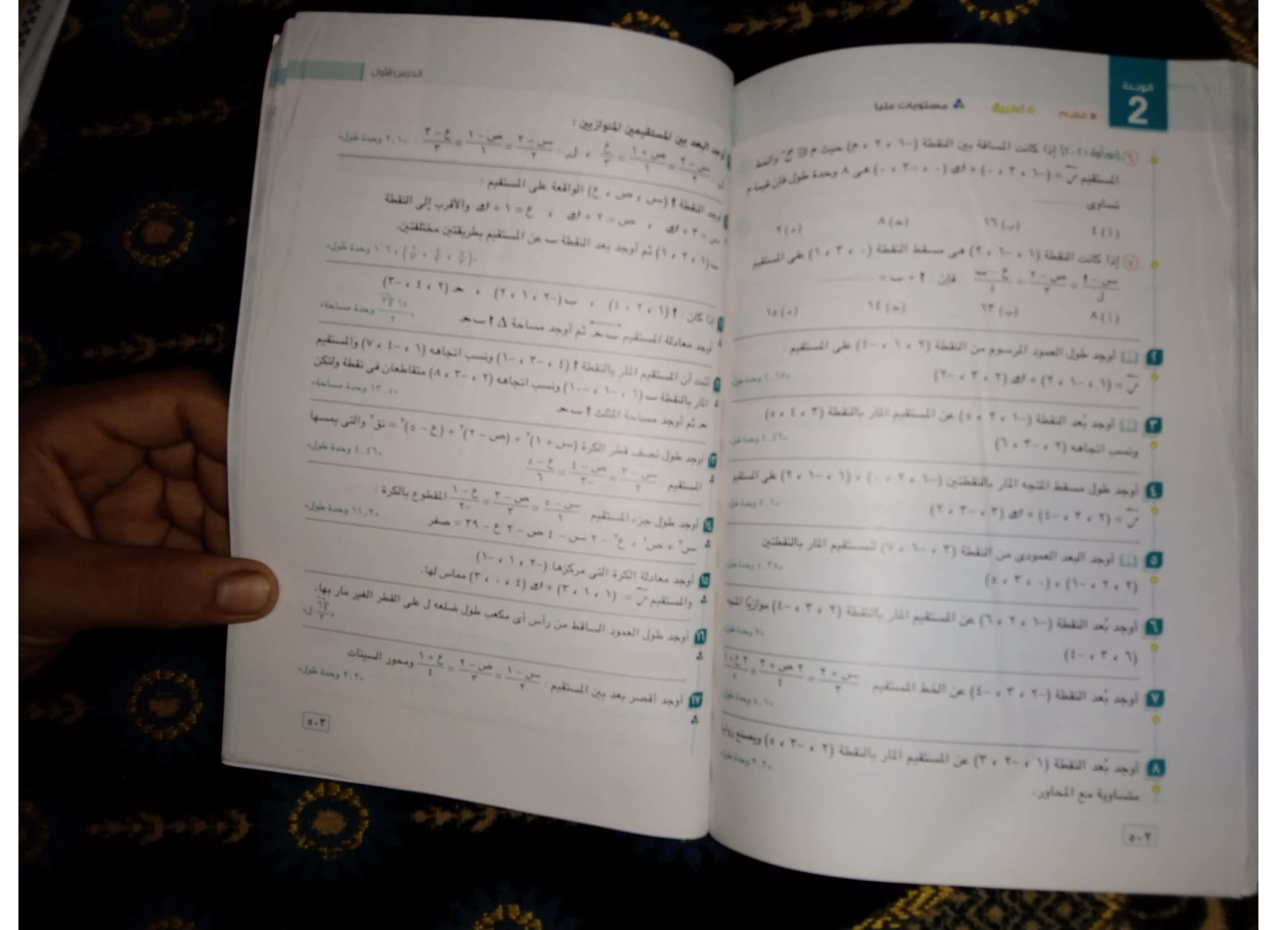
(أ) |حـ| (ب) |أ| (جـ) |ب| (د) $\sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$

(٤) طول العمود المرسوم من النقطة (–١ ، ٠ ، ١) على المستقيم : $\frac{س-١}{٢} = \frac{ص-١}{١} = \frac{ع+١}{-١}$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٣٠}$ (ب) $\sqrt{٦}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣٠}}{٦}$ (د) $٢\sqrt{٦}$

(٥) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، –١ ، م) على المستقيم $\frac{س-١}{٢} = \frac{٣-ص}{٢} = \frac{ع}{٢}$ يساوى ٥ وحدة طول فإن عدد قيم م الممكنة تساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى



(٦) [الدقهلية ٢١ - ٢٠٢٠] إذا كانت المسافة بين النقطة (−١ ، ٢ ، م) حيث م ∈ ح⁺ والخط المستقيم $\overrightarrow{ر} = (-١ ، ٢ ، ٠) + ك (٠ ، −٣ ، ٠)$ هي ٨ وحدة طول فإن قيمة م تساوي ....

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٨ (د) ٢

(٧) إذا كانت النقطة (١ ، −١ ، ٢) هي مسقط النقطة (٠ ، ٣ ، ١) على المستقيم $\frac{س - ٢}{ل} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ب}{٤}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

٢ أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، −٤) على المستقيم : $\overrightarrow{ر} = (١ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، −٢)$

٣ أوجد بُعد النقطة (−١ ، ٢ ، ٥) عن المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤ ، ٥) ومتجه اتجاهه (٢ ، −٣ ، ٦)

٤ أوجد طول مسقط المتجه المار بالنقطتين (−١ ، ٢ ، ٠) ، (١ ، −١ ، ٢) على المستقيم $\overrightarrow{ر} = (٢ ، ٣ ، −٤) + ك (٣ ، −٣ ، ٢)$

٥ أوجد البعد العمودي من النقطة (٣ ، −١ ، ٧) للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢ ، −١) ، (٠ ، ٣ ، ٥)

٦ أوجد بُعد النقطة (−١ ، ٢ ، ٦) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، −٤) موازيًا للمتجه (٦ ، ٣ ، −٤)

٧ أوجد بُعد النقطة (−٢ ، ٣ ، −٤) عن الخط المستقيم : $\frac{س + ٢}{٣} = \frac{٢ص + ٣}{٤} = \frac{٣ع + ٤}{٥}$

٨ أوجد بُعد النقطة (١ ، −٢ ، ٣) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −٣ ، ٥) ويصنع زوايا متساوية مع المحاور.

٩ أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين : ل₁ : $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{١} = \frac{ع}{٣}$ ، ل₂ : $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع - ٣}{٣}$ — ٢,١٠ وحدة طول

١٠ أوجد النقطة أ (س ، ص ، ع) الواقعة على المستقيم : س = ٢ + ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ١ + ك والأقرب إلى النقطة ب (١ ، ٢ ، ١) ثم أوجد بعد النقطة ب عن المستقيم بطريقتين مختلفتين. — $(\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{١}{٣})$ ، ١,٦٠ وحدة طول

١١ إذا كان : أ (١ ، ٢ ، ٤) ، ب (−٢ ، ١ ، ٢) ، جـ (٢ ، ٤ ، −٣) أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ثم أوجد مساحة Δ أ ب جـ — $\frac{\sqrt{٢٢} ١٠}{٢}$ وحدة مساحة

١٢ أثبت أن المستقيم المار بالنقطة أ (٤ ، −٣ ، −١) ومتجه اتجاهه (١ ، −٤ ، ٧) والمستقيم المار بالنقطة ب (١ ، −١ ، −١) ومتجه اتجاهه (٢ ، −٣ ، ٨) متقاطعان في نقطة ولتكن جـ ثم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ — ١٣,٠٠ وحدة مساحة

١٣ أوجد طول نصف قطر الكرة $(س + ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ٥)^٢ = نق^٢$ والتي يمسها المستقيم : $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص - ٤}{-٢} = \frac{ع - ٥}{١}$ — ٤,٤٦٠ وحدة طول

١٤ أوجد طول جزء المستقيم : $\frac{س - ٥}{١} = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع - ١}{-٢}$ المقطوع بالكرة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ٢س - ٤ص - ٢ع - ٣٩ = صفر$ — ١١,٢٠ وحدة طول

١٥ أوجد معادلة الكرة التي مركزها (−٢ ، ١ ، −١) والمستقيم $\overrightarrow{ر} = (١ ، ١ ، ٣) + ك (٤ ، ٠ ، ٣)$ مماس لها.

١٦ أوجد طول العمود الساقط من رأس أي مكعب طول ضلعه ل على القطر الغير مار بها. — $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ ل

١٧ أوجد أقصر بعد بين المستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع + ١}{٤}$ ومحور السينات — ٢,٢٠ وحدة طول

الدرس 2

معادلة المستوى فى الفراغ

الصور المختلفة لمعادلة المستوى فى الفراغ

بفرض أ $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$ نقطة معلومة تقع على المستوى ط متجه موضعها $\overrightarrow{أ}$ وكان المتجه $\overrightarrow{ن} = (أ ، ب ، حـ)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى «تذكر أن كل المتجهات العمودية على المستوى تكون متوازية».

وبفرض ب $(س ، ص ، ع)$ أى نقطة على المستوى ط متجه موضعها $\overrightarrow{ر}$ فإن :

∵ $\overrightarrow{ن} \perp$ المستوى ط ∴ $\overrightarrow{ن} \perp$ أى متجه فى المستوى

∴ $\overrightarrow{ن} \perp \overrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أب} = ٠$ ∴ $\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}) = ٠$

، ∵ $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ر}$ ∴ $\overrightarrow{ن} \cdot (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أ}) = ٠$ (١)

∴ $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ} = ٠$ ∴ $\boxed{\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}}$ «الصورة المتجهة لمعادلة المستوى»

، من (١) :

، ∵ $\overrightarrow{ن} = (أ ، ب ، حـ)$ ، $\overrightarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$ ، $\overrightarrow{أ} = (س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

∴ $(أ ، ب ، حـ) \cdot (س - س_١ ، ص - ص_١ ، ع - ع_١) = ٠$

∴ $\boxed{أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + حـ(ع - ع_١) = ٠}$

«الصورة القياسية لمعادلة المستوى»

وبفك الأقواس :

∴ $أس + ب ص + حـ ع + (- أس_١ - ب ص_١ - حـ ع_١) = ٠$

وبوضع $- أس_١ - ب ص_١ - حـ ع_١ = ء$

∴ $\boxed{أس + ب ص + حـ ع + ء = ٠}$

«الصورة العامة لمعادلة المستوى»

لاحظ أن
$ء = - \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

مما سبق يتضح أن المستوى ط يتعين بمعرفة نقطة عليه ومتجه عمودى عليه.

من دراستنا السابقة نتذكر أن المستوى يتعين أيضًا بمعرفة :

- ثلاث نقاط تقع عليه وليست على استقامة واحدة.
- مستقيمان متقاطعان يقعان فيه.
- مستقيم ونقطة لا تنتمى للمستقيم تقعان فى المستوى.
- مستقيمين مختلفين متوازيين.

مثال ١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة : $(٢ ، -٣ ، ٥)$ والمتجه : $\overrightarrow{ن} = (-١ ، ٢ ، ٣)$ عموديًا عليه.

الحل

، الصورة المتجهة :

$\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ ∴ $(-١ ، ٢ ، ٣) \cdot \overrightarrow{ر} = (-١ ، ٢ ، ٣) \cdot (٢ ، -٣ ، ٥)$

∴ $(-١ ، ٢ ، ٣) \cdot \overrightarrow{ر} = ٧$

، الصورة القياسية :

∵ $أ(س - س_١) + ب(ص - ص_١) + حـ(ع - ع_١) = ٠$

∴ $-١(س - ٢) + ٢(ص + ٣) + ٣(ع - ٥) = ٠$

، الصورة العامة : $- س + ٢ ص + ٣ ع - ٧ = ٠$

مثال ٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط :

أ $(١ ، ٣ ، ٥)$ ، ب $(-١ ، ٢ ، ٤)$ ، حـ $(٤ ، ٤ ، ٠)$

الحل

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٢ ، -١ ، -١)$ ، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ} = (٣ ، ١ ، -٥)$

∵ $\frac{-٢}{٣} \neq \frac{-١}{١}$ ∴ $\overrightarrow{أب}$ لا يوازى $\overrightarrow{أحـ}$

∴ أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

ولإيجاد معادلة المستوى نحتاج :

① نقطة معلومة عليه «هناك ٣ نقاط معطاة».

② متجه اتجاه عمودى على المستوى ولإيجاده نوجد $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ}$

$$\therefore \overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -٥ \end{vmatrix} = ٦ \overrightarrow{س} - ١٣ \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$$

- الصورة المتجهة لمعادلة المستوى : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

$\therefore$ (٦ ، -١٣ ، ١) $\cdot \overrightarrow{ر}$ = (٦ ، -١٣ ، ١) . (١ ، ٣ ، ٥)

$\therefore$ (٦ ، -١٣ ، ١) $\cdot \overrightarrow{ر}$ = -٢٨

- الصورة القياسية لمعادلة المستوى : ٦ (س - ١) - ١٣ (ص - ٣) + (ع - ٥) = ٠
- الصورة العامة لمعادلة المستوى : ٦ س - ١٣ ص + ع + ٢٨ = ٠

ملاحظة

معادلة المستوى المار بالثلاث نقاط (س١ ، ص١ ، ع١) ، (س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، (س٣ ، ص٣ ، ع٣) والتى لا تقع على استقامة واحدة هى :

$$\begin{vmatrix} س - س_١ & ص - ص_١ & ع - ع_١ \\ س_٢ - س_١ & ص_٢ - ص_١ & ع_٢ - ع_١ \\ س_٣ - س_١ & ص_٣ - ص_١ & ع_٣ - ع_١ \end{vmatrix} = ٠$$

ويمكن استخدام الملاحظة السابقة لإيجاد معادلة المستوى فى المثال السابق كالتالى :

$$\begin{vmatrix} س - ١ & ص - ٣ & ع - ٥ \\ -١ - ١ & ٢ - ٣ & ٤ - ٥ \\ ٤ - ١ & ٤ - ٣ & ٠ - ٥ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore \begin{vmatrix} س - ١ & ص - ٣ & ع - ٥ \\ -٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -٥ \end{vmatrix} = ٠$$

الصورة القياسية لمعادلة المستوى :

٦ (س - ١) - ١٣ (ص - ٣) + (ع - ٥) = ٠

الصورة العامة لمعادلة المستوى :

٦ س - ١٣ ص + ع + ٢٨ = ٠

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى :

(٦ ، -١٣ ، ١) $\cdot \overrightarrow{ر}$ = -٢٨

لاحظ أن

- مركبات متجه الاتجاه العمودى للمستوى هى معاملات س ، ص ، ع فى المعادلة العامة للمستوى.
- $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ فى المعادلة المتجهة للمستوى = - د فى المعادلة العامة.

ملاحظات

① المستقيمان فى الفراغ : عند حل معادلة المستقيمين معًا وكانت :

(١) مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيمين متخالفان أو متوازيان.

(٢) مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيمين متقاطعان ويحويهما مستوى واحد.

* إذا اشترك المستقيمان فى أكثر من نقطة فإنهما ينطبقان.

② المستقيم والمستوى فى الفراغ : عند حل معادلتى المستقيم والمستوى معًا وكانت :

(١) مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيم يوازى المستوى.

(٢) مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيم يقطع المستوى فى هذه النقطة.

* إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة فإن المستوى يحوى هذا المستقيم.

مثال ③

أثبت أن المستقيمين : ل١ : $\overrightarrow{ر_١}$ = (٣ ، -٢ ، -١) + ك١ (٢ ، ٣ ، ١)

، ل٢ : $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٤ ، ٥ ، ١) + ك٢ (١ ، ٧ ، ٢)

متقاطعان وأوجد نقطة تقاطعهما و معادلة المستوى الذى يحويهما.

الحل

يتقاطع المستقيمان عندما $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{ر_٢}$

أى أن : (٣ ، -٢ ، -١) + ك١ (٢ ، ٣ ، ١) = (٤ ، ٥ ، ١) + ك٢ (١ ، ٧ ، ٢)



وبمساواة المعاملات للطرفين نجد أن :

٣ + ٢ ك١ = ٤ + ك٢ ومنها ٢ ك١ − ك٢ = ١

، −٢ + ٣ ك١ = ٥ + ٧ ك٢ ومنها ٣ ك١ − ٧ ك٢ = ٧

، −١ + ك١ = ١ + ٢ ك٢ ومنها ك١ − ٢ ك٢ = ٢

وبحل المعادلتين (١) ، (٣) : ∴ ك١ = صفر ، ك٢ = −١

وبالتعويض فى (٢) نجد أن : ك١ = صفر ، ك٢ = −١ تحققها

∴ المستقيمان متقاطعان عندما ك١ = صفر فى معادلة المستقيم ل١ ، عندما ك٢ = −١ فى معادلة المستقيم ل٢

ومن معادلة المستقيم ل١ : نقطة التقاطع هى (س ، ص ، ع) = (٣ ، −٢ ، −١) + صفر (٢ ، ٣ ، ١)

أى أنها (٣ ، −٢ ، ١)

∵ ى١ (متجه اتجاه للمستقيم ل١) = (٢ ، ٣ ، ١)

، ى٢ (متجه اتجاه للمستقيم ل٢) = (١ ، ٧ ، ٢)

∴ ن (متجه اتجاه عمودى على المستوى) = | س ص ع ؛ ٢ ٣ ١ ؛ ١ ٧ ٢ | = − س − ٣ ص + ١١ ع

وباختيار أى نقطة تقع على أى من المستقيمين ل١ ، ل٢

∴ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى : (−١ ، −٣ ، ١١) . ر = (−١ ، −٣ ، ١١) . (٣ ، −٢ ، −١)

أى أن (−١ ، −٣ ، ١١) . ر = −٨

، الصورة القياسية لمعادلة المستوى : − (س − ٣) − ٣ (ص + ٢) + ١١ (ع + ١) = ٠

، الصورة العامة لمعادلة المستوى : − س − ٣ ص + ١١ ع + ٨ = ٠

مثال ٤

أثبت أن المستقيمين : ل١ : ر = (٢ ، ٣ ، −٤) + ك (٢ ، ٣ ، ١)

، ل٢ : $\frac{س - ٥}{٤} = \frac{ص + ٤}{٦} = \frac{ع - ٤}{٢}$ متوازيان ثم عين المعادلة العامة للمستوى الذى يحوى هذين المستقيمين.

... ى١ = (٢ ، ٣ ، ١) ، ى٢ = (٤ ، ٦ ، ٢)

... = $\frac{٢}{٤} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ المستقيمان متوازيان أو منطبقان.

∵ النقطة أ (٢ ، ٣ ، −٤) ∈ ل١ وبالتعويض بها فى ل٢

... أ ∉ ل٢ ∴ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين.

... يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

بفرض أ (٢ ، ٣ ، −٤) ∈ ل١ ، ب (٥ ، −٤ ، ٤) ∈ ل٢

∴ أب = ب − أ = (٣ ، −٧ ، ٨)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب = أب × ى٢

= | س ص ع ؛ ٣ −٧ ٨ ؛ ٢ ٣ ١ | = − ٣١ س + ١٣ ص + ٢٣ ع

∴ معادلة المستوى هى : (−٣١ ، ١٣ ، ٢٣) . ر = (−٣١ ، ١٣ ، ٢٣) . (٢ ، ٣ ، −٤)

أى أن : ٣١ س − ١٣ ص − ٢٣ ع = ١١٥

حل آخر: باختيار ثلاثة نقط يمكن تعين معادلة المستوى عن طريقهم.

أ (٢ ، ٣ ، −٤) ∈ ل١ ، ب = (٥ ، −٤ ، ٤) ∈ ل٢ ، حـ = (٤ ، ٦ ، −٣) ∈ ل١

(وذلك بوضع ك = ١ فى ل١)

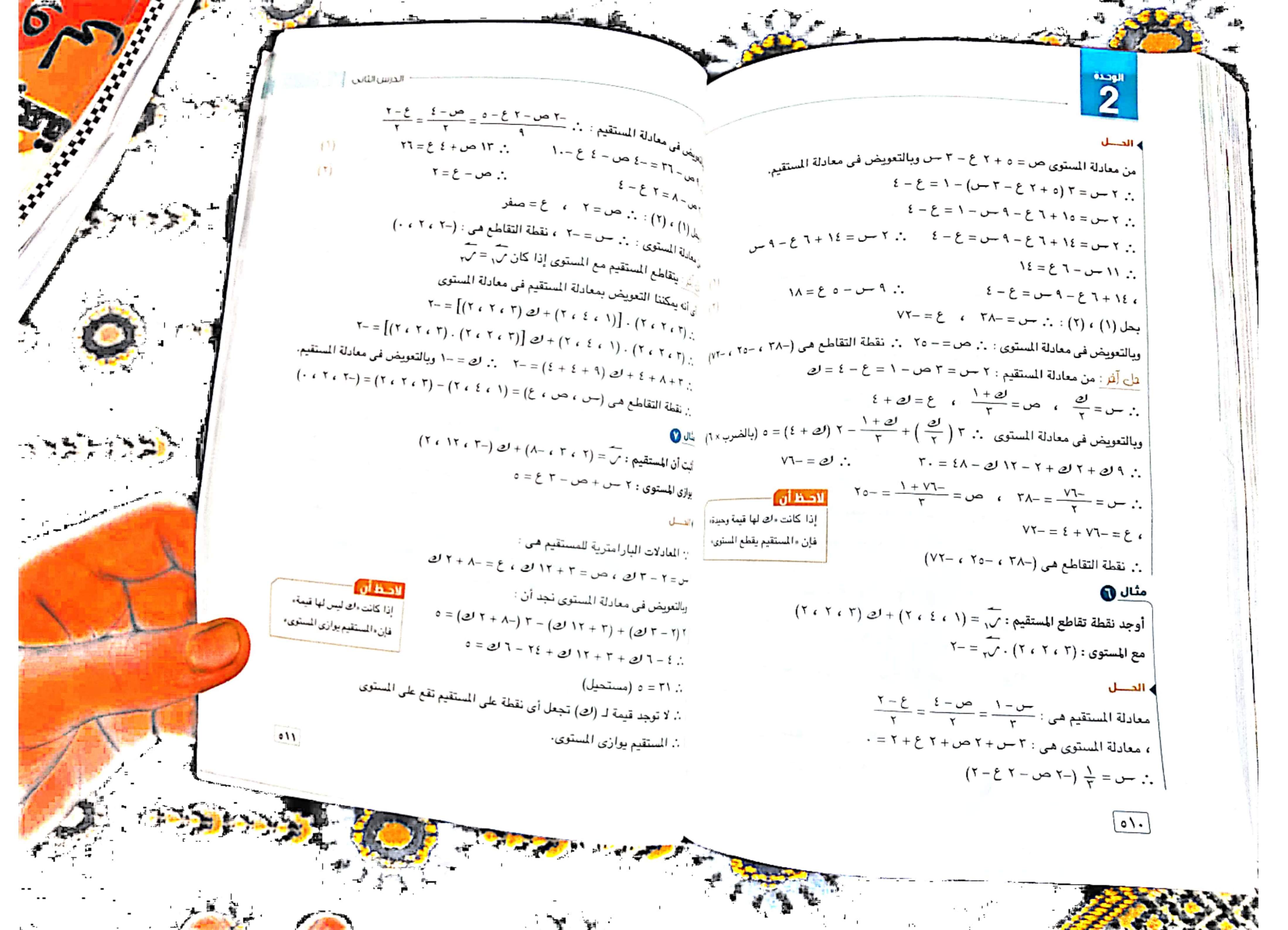
∴ معادلة المستوى هى | س − ٢ ص − ٣ ع + ٤ ؛ ٥ − ٢ −٤ − ٣ ٤ + ٤ ؛ ٤ − ٢ ٦ − ٣ −٣ + ٤ | = صفر

وبفك المحدد نجد أن المعادلة هى : ٣١ س − ١٣ ص − ٢٣ ع = ١١٥

مثال ٥

أوجد نقطة تقاطع المستقيم : ٢ س = ٢ ص − ١ = ع − ٤

مع المستوى : ٣ س + ص − ٢ ع = ٥



الحل

من معادلة المستوى ص = ٥ + ٢ ع − ٣ س وبالتعويض فى معادلة المستقيم.

∴ ٢ س = ٣ (٥ + ٢ ع − ٣ س) − ١ = ع − ٤

∴ ٢ س = ١٥ + ٦ ع − ٩ س − ١ = ع − ٤

∴ ٢ س = ١٤ + ٦ ع − ٩ س = ع − ٤   ∴ ٢ س = ١٤ + ٦ ع − ٩ س

∴ ١١ س − ٦ ع = ١٤

، ١٤ + ٦ ع − ٩ س = ع − ٤   ∴ ٩ س − ٥ ع = ١٨

بحل (١) ، (٢) : ∴ س = −٣٨ ، ع = −٧٢

وبالتعويض فى معادلة المستوى : ∴ ص = −٢٥ ∴ نقطة التقاطع هى (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

حل آخر : من معادلة المستقيم : ٢ س = ٣ ص − ١ = ع − ٤ = ك

∴ س = $\frac{ك}{٢}$ ، ص = $\frac{ك + ١}{٣}$ ، ع = ك + ٤

وبالتعويض فى معادلة المستوى ∴ ٣ $\left(\frac{ك}{٢}\right)$ + $\frac{ك + ١}{٣}$ − ٢ (ك + ٤) = ٥ (بالضرب × ٦)

∴ ٩ ك + ٢ ك + ٢ − ١٢ ك − ٤٨ = ٣٠   ∴ ك = −٧٦

∴ س = $\frac{-٧٦}{٢}$ = −٣٨ ، ص = $\frac{-٧٦ + ١}{٣}$ = −٢٥

، ع = −٧٦ + ٤ = −٧٢

∴ نقطة التقاطع هى (−٣٨ ، −٢٥ ، −٧٢)

> **لاحظ أن**
> إذا كانت «ك» لها قيمة وحيدة، فإن «المستقيم يقطع المستوى»

مثال ٦

أوجد نقطة تقاطع المستقيم : $\overrightarrow{ر}_١$ = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢)

مع المستوى : (٣ ، ٢ ، ٢) . $\overrightarrow{ر}_٢$ = −٢

الحل

معادلة المستقيم هى : $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص - ٤}{٢} = \frac{ع - ٢}{٢}$

، معادلة المستوى هى : ٣ س + ٢ ص + ٢ ع + ٢ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٣}$ (−٢ ص − ٢ ع − ٢)

وبالتعويض فى معادلة المستقيم : ∴ $\frac{-٢ ص - ٢ ع - ٥}{٩} = \frac{ص - ٤}{٢} = \frac{ع - ٢}{٢}$

ص − ٣٦ = −٤ ص − ٤ ع − ١٠   ∴ ١٣ ص + ٤ ع = ٢٦ (١)

ص − ٨ = ٢ ع − ٤   ∴ ص − ع = ٢ (٢)

بحل (١) ، (٢) : ∴ ص = ٢ ، ع = صفر

معادلة المستوى : ∴ س = −٢ ، نقطة التقاطع هى : (−٢ ، ٢ ، ٠)

حل آخر : يتقاطع المستقيم مع المستوى إذا كان $\overrightarrow{ر}_١ = \overrightarrow{ر}_٢$

أى أنه يمكننا التعويض بمعادلة المستقيم فى معادلة المستوى

∴ (٣ ، ٢ ، ٢) . [(١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢)] = −٢

∴ (٣ ، ٢ ، ٢) . (١ ، ٤ ، ٢) + ك [(٣ ، ٢ ، ٢) . (٣ ، ٢ ، ٢)] = −٢

∴ ٣ + ٨ + ٤ + ك (٩ + ٤ + ٤) = −٢   ∴ ك = −١ وبالتعويض فى معادلة المستقيم.

∴ نقطة التقاطع هى (س ، ص ، ع) = (١ ، ٤ ، ٢) − (٣ ، ٢ ، ٢) = (−٢ ، ٢ ، ٠)

مثال ٧

أثبت أن المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ٣ ، −٨) + ك (−٣ ، ١٢ ، ٢)

يوازى المستوى : ٢ س + ص − ٣ ع = ٥

الحل

∵ المعادلات البارامترية للمستقيم هى :

س = ٢ − ٣ ك ، ص = ٣ + ١٢ ك ، ع = −٨ + ٢ ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى نجد أن :

٢ (٢ − ٣ ك) + (٣ + ١٢ ك) − ٣ (−٨ + ٢ ك) = ٥

∴ ٤ − ٦ ك + ٣ + ١٢ ك + ٢٤ − ٦ ك = ٥

∴ ٣١ = ٥ (مستحيل)

∴ لا توجد قيمة لـ (ك) تجعل أى نقطة على المستقيم تقع على المستوى

∴ المستقيم يوازى المستوى.

> **لاحظ أن**
> إذا كانت «ك» ليس لها قيمة، فإن «المستقيم يوازى المستوى»

مثال ٨

أثبت أن المستقيم : $\vec{ر} = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (٣ ، ١ ، -١٤)$

يقع فى المستوى : ٤ س + ٢ ص + ع = ١١

الحل

∵ المعادلات البارامترية للمستقيم هى :

س = ١ + ٣ ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٣ − ١٤ ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى نجد أن :

٤ (١ + ٣ ك) + ٢ (٢ + ك) + (٣ − ١٤ ك) = ١١

∴ ٤ + ١٢ ك + ٤ + ٢ ك + ٣ − ١٤ ك = ١١

∴ ١١ = ١١ متحققه لجميع قيم ك ∴ ك لها عدد لا نهائى من القيم.

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

> **لاحظ أن**
> إذا كانت «ك» لها عدد لا نهائى، فإن «المستقيم يقع فى المستوى».

حل آخر :

∵ النقطة أ (١ ، ٢ ، ٣) ∈ المستقيم. ، ∵ ٤ (١) + ٢ (٢) + (٣) = ١١

∴ النقطة (أ) تحقق معادلة المستوى وبوضع ك = ١

∴ النقطة ب (٤ ، ٣ ، -١١) ∈ المستقيم. ، ∵ ٤ (٤) + ٢ (٣) + (-١١) = ١١

∴ النقطة (ب) تحقق معادلة المستوى.

∴ النقطتين أ ، ب ينتميان للمستقيم وتحققان معادلة المستوى.

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

معادلة المستوى بمعلومية أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقاط ($س_١$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، $ص_١$ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، $ع_١$)

فإن معادلة المستوى هى :

$$\begin{vmatrix} س - س_١ & ص & ع \\ -س_١ & ص_١ & ٠ \\ -س_١ & ٠ & ع_١ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ $ص_١ ع_١ (س - س_١) - (-س_١ ع_١) ص + (-س_١ ص_١) ع = ٠$

∴ $ص_١ ع_١ س - س_١ ص_١ ع_١ + س_١ ع_١ ص + س_١ ص_١ ع = ٠$

∴ $ص_١ ع_١ س + س_١ ع_١ ص + س_١ ص_١ ع = س_١ ص_١ ع_١$

وبالقسمة على $س_١ ص_١ ع_١$

∴ $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$ معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات.

مثال ٩

أوجد معادلة المستوى المار بالنقاط : (٠ ، ٠ ، -٧) ، (٣ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، -٥ ، ٠)

الحل

معادلة المستوى هى $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٥} + \frac{ع}{-٧} = ١$

> **ملاحظة**
> • إذا كانت معادلة المستوى : $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$
> تقطع محاور الإحداثيات فى النقط أ ($س_١$ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، $ص_١$ ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، $ع_١$)
> فإن حجم الهرم و أ ب حـ = $\frac{١}{٦}$ | $س_١ ص_١ ع_١$ |
> **فمثلاً** : إذا قطع المستوى : ٢ س + ٣ ص + ٤ ع = ١٢
> **أى أن** : $\frac{س}{٦} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٣} = ١$
> محاور الإحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ فإن حجم الهرم و أ ب حـ
> = $\frac{١}{٦}$ | ٦ × ٤ × ٣ | = ١٢ وحدة مكعبة.

مثال ١٠

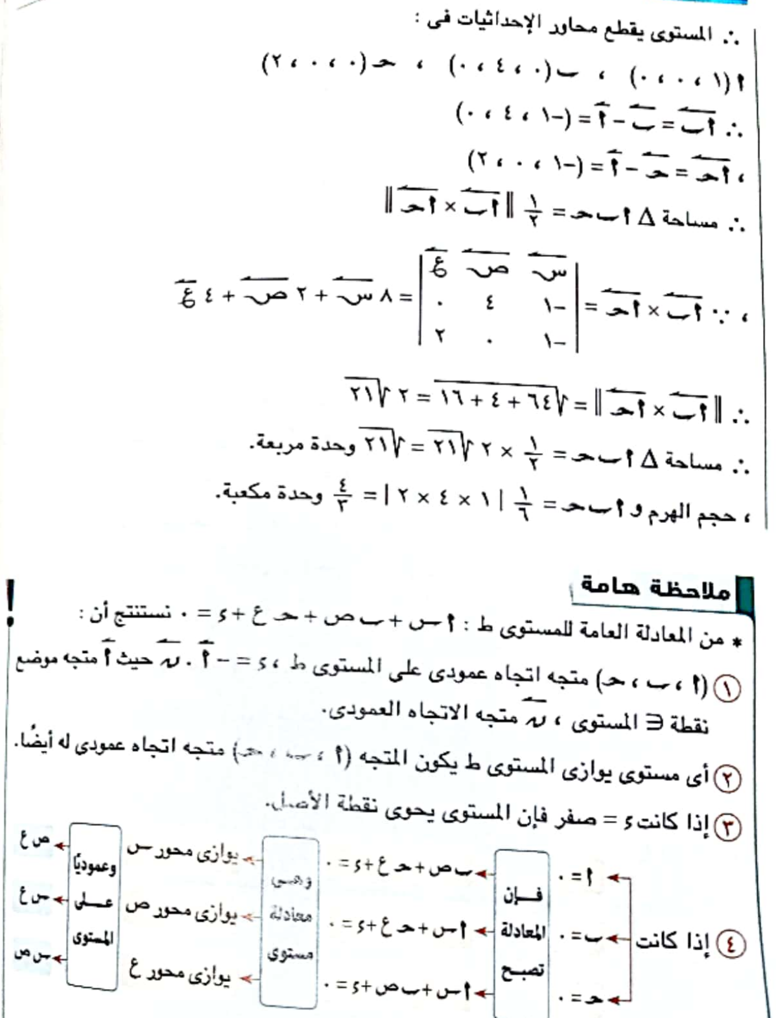
إذا قطع المستوى ٨ س + ٢ ص + ٤ ع = ٨ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقاط أ ، ب ، حـ على الترتيب أوجد مساحة Δ أ ب حـ ثم أوجد حجم الهرم و أ ب حـ

الحل

معادلة المستوى هى :

٨ س + ٢ ص + ٤ ع = ٨ (وبالقسمة على ٨)

∴ $\frac{س}{١} + \frac{ص}{٤} + \frac{ع}{٢} = ١$



الوحدة 2

∴ المستوى يقطع محاور الإحداثيات فى :

أ(١ ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ٤ ، ٠) ، حـ(٠ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، ٤ ، ٠)$

، $\overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ} = (-١ ، ٠ ، ٢)$

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} \|$

، ∵ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٤ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص} + ٤ \overrightarrow{ع}$

∴ $\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} \| = \sqrt{٦٤ + ٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٢١}$

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢} \times ٢\sqrt{٢١} = \sqrt{٢١}$ وحدة مربعة.

، حجم الهرم و أ ب حـ = $\frac{١}{٦} | ١ \times ٤ \times ٢ | = \frac{٤}{٣}$ وحدة مكعبة.

ملاحظة هامة

* من المعادلة العامة للمستوى ط : أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠ نستنتج أن :

① (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى ط ، ء = − $\overrightarrow{أ} . \overrightarrow{ن}$ حيث $\overrightarrow{أ}$ متجه موضع نقطة ∈ المستوى ، $\overrightarrow{ن}$ متجه الاتجاه العمودى.

② أى مستوى يوازى المستوى ط يكون المتجه (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى له أيضًا.

③ إذا كانت ء = صفر فإن المستوى يحوى نقطة الأصل.

④ إذا كانت أ = ٠ فإن المعادلة تصبح ب ص + حـ ع + ء = ٠ وهى معادلة مستوى يوازى محور س وعموديًا على المستوى ص ع
، ب = ٠ فإن المعادلة تصبح أ س + حـ ع + ء = ٠ وهى معادلة مستوى يوازى محور ص وعموديًا على المستوى س ع
، حـ = ٠ فإن المعادلة تصبح أ س + ب ص + ء = ٠ وهى معادلة مستوى يوازى محور ع وعموديًا على المستوى س ص

فمثلًا :

٢ س − ٣ ص = ٦ هى معادلة مستوى يوازى محور ع

⑤ إذا كانت أ = ء = ٠ فإن المعادلة تصبح ب ص + حـ ع = ٠ وهى معادلة مستوى يحوى المحور س وعموديًا على المستوى ص ع
، ب = ء = ٠ فإن المعادلة تصبح أ س + حـ ع = ٠ وهى معادلة مستوى يحوى المحور ص وعموديًا على المستوى س ع
، حـ = ء = ٠ فإن المعادلة تصبح أ س + ب ص = ٠ وهى معادلة مستوى يحوى المحور ع وعموديًا على المستوى س ص

فمثلًا :

٢ س − ٣ ص = ٠ هى معادلة مستوى يحوى محور ع

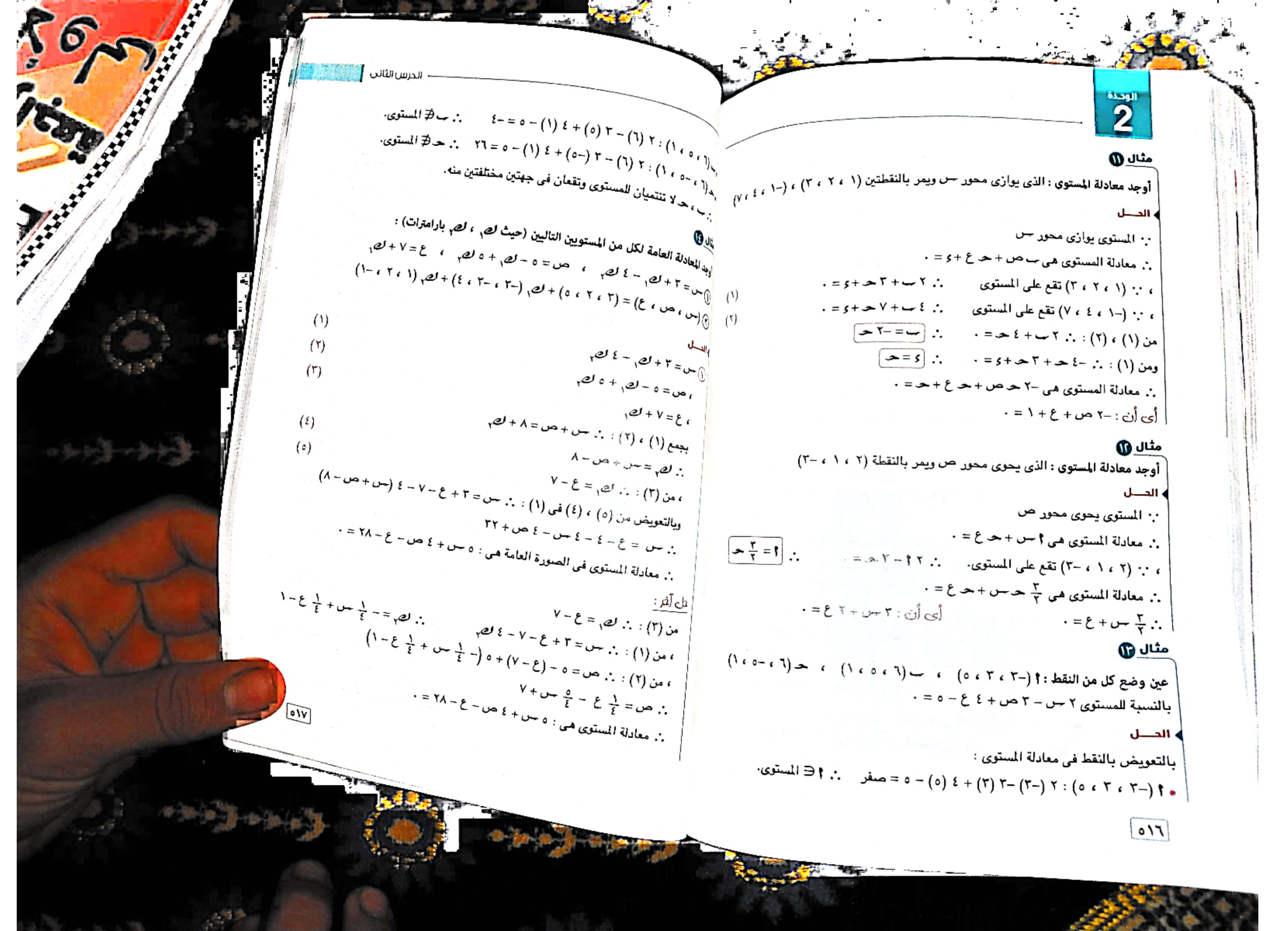
⑥ • معادلة المستوى س ص هى ع = ٠
، معادلة المستوى الذى يوازى المستوى س ص ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) هى ع = $ع_١$
• معادلة المستوى ص ع هى س = ٠
، معادلة المستوى الذى يوازى المستوى ص ع ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) هى س = $س_١$
• معادلة المستوى س ع هى ص = ٠
، معادلة المستوى الذى يوازى المستوى س ع ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) هى ص = $ص_١$

فمثلًا :

س = ٦ هى معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع
، ع = −٤ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ص

⑦ لاحظ الفرق بين :
• ص + ع = ٤ معادلة مستوى يوازى محور س
• س = ب معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع
• ص + ع = ٤ ، س = ب معادلة خط مستقيم (خط تقاطع المستويين السابقين)

⑧ إذا كانت : هـ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، و ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) ، ن ($س_٣$ ، $ص_٣$ ، $ع_٣$) ثلاثة نقاط فى الفراغ وكان التعويض عنهم فى معادلة المستوى كالتالى :
أ $س_١$ + ب $ص_١$ + حـ $ع_١$ + ء = ٠ ، أ $س_٢$ + ب $ص_٢$ + حـ $ع_٢$ + ء > ٠
، أ $س_٣$ + ب $ص_٣$ + حـ $ع_٣$ + ء < ٠
فمعنى ذلك أن : هـ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) تنتمى للمستوى ، و ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) ، ن ($س_٣$ ، $ص_٣$ ، $ع_٣$) لا تنتميان للمستوى وكل منهما يقع فى جهة مختلفة عن الأخرى بالنسبة للمستوى.



الوحدة 2

مثال 11

أوجد معادلة المستوى: الذي يوازي محور س ويمر بالنقطتين (1 ، 2 ، 3) ، (−1 ، 4 ، 7)

الحل

∵ المستوى يوازي محور س

∴ معادلة المستوى هي ب ص + جـ ع + د = 0

∵ (1 ، 2 ، 3) تقع على المستوى ∴ 2 ب + 3 جـ + د = 0 (1)

∵ (−1 ، 4 ، 7) تقع على المستوى ∴ 4 ب + 7 جـ + د = 0 (2)

من (1) ، (2) : ∴ 2 ب + 4 جـ = 0 ∴ ب = −2 جـ

ومن (1) : ∴ −4 جـ + 3 جـ + د = 0 ∴ د = جـ

∴ معادلة المستوى هي −2 جـ ص + جـ ع + جـ = 0

أي أن: −2 ص + ع + 1 = 0

مثال 12

أوجد معادلة المستوى: الذي يحوي محور ص ويمر بالنقطة (2 ، 1 ، −3)

الحل

∵ المستوى يحوي محور ص

∴ معادلة المستوى هي أ س + جـ ع = 0

∵ (2 ، 1 ، −3) تقع على المستوى ∴ 2 أ − 3 جـ = 0 ∴ أ = $\frac{3}{2}$ جـ

∴ معادلة المستوى هي $\frac{3}{2}$ جـ س + جـ ع = 0

∴ $\frac{3}{2}$ س + ع = 0 أي أن: 3 س + 2 ع = 0

مثال 13

عين وضع كل من النقط: أ(−3 ، 3 ، 5) ، ب(6 ، 5 ، 1) ، جـ(6 ، −5 ، 1)

بالنسبة للمستوى 2 س − 3 ص + 4 ع − 5 = 0

الحل

بالتعويض بالنقط في معادلة المستوى:

• أ(−3 ، 3 ، 5) : 2 (−3) −3 (3) + 4 (5) − 5 = صفر ∴ أ ∈ المستوى.

• ب(6 ، 5 ، 1) : 2 (6) − 3 (5) + 4 (1) − 5 = −4 ∴ ب ∉ المستوى.

• جـ(6 ، −5 ، 1) : 2 (6) − 3 (−5) + 4 (1) − 5 = 26 ∴ جـ ∉ المستوى.

∴ ب ، جـ لا تنتميان للمستوى وتقعان في جهتين مختلفتين منه.

مثال 14

أوجد المعادلة العامة لكل من المستويين التاليين (حيث $ل_1$ ، $ل_2$ بارامترات):

① س = 3 + $ل_1$ − 4 $ل_2$ ، ص = 5 − $ل_1$ + 5 $ل_2$ ، ع = 7 + $ل_1$

② (س ، ص ، ع) = (3 ، 2 ، 5) + $ل_1$ (−3 ، −3 ، 4) + $ل_2$ (1 ، 2 ، −1)

الحل

① س = 3 + $ل_1$ − 4 $ل_2$ (1)

، ص = 5 − $ل_1$ + 5 $ل_2$ (2)

، ع = 7 + $ل_1$ (3)

بجمع (1) ، (2) : ∴ س + ص = 8 + $ل_2$ (4)

∴ $ل_2$ = س + ص − 8 (5)

، من (3) : ∴ $ل_1$ = ع − 7

وبالتعويض من (5) ، (4) في (1) : ∴ س = 3 + ع − 7 − 4 (س + ص − 8)

∴ س = ع − 4 − 4 س − 4 ص + 32

∴ معادلة المستوى في الصورة العامة هي: 5 س + 4 ص − ع − 28 = 0

حل آخر:

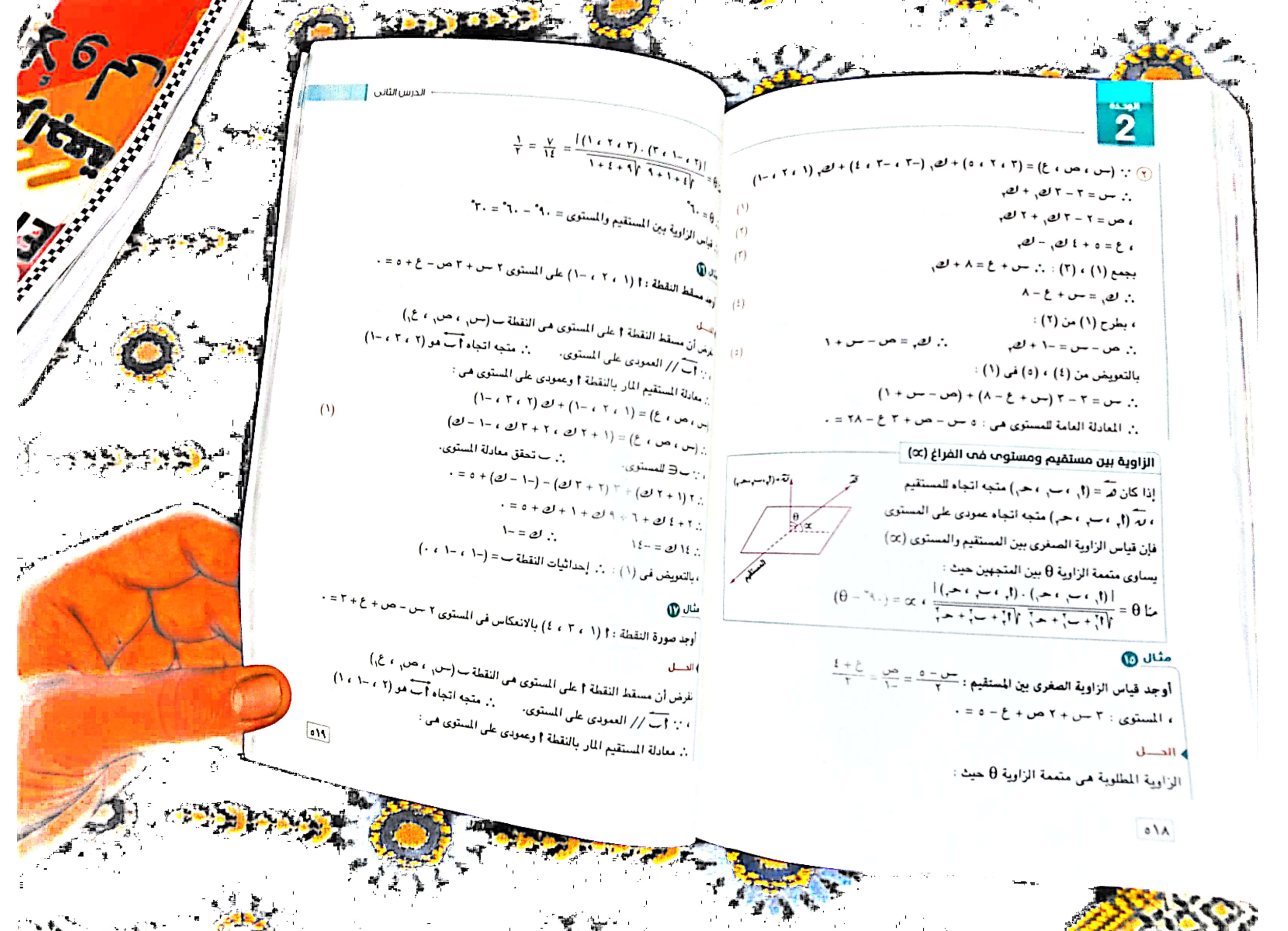
من (3) : ∴ $ل_1$ = ع − 7

، من (1) : ∴ س = 3 + ع − 7 − 4 $ل_2$ ∴ $ل_2$ = −$\frac{1}{4}$ س + $\frac{1}{4}$ ع − 1

، من (2) : ∴ ص = 5 − (ع − 7) + 5 (−$\frac{1}{4}$ س + $\frac{1}{4}$ ع − 1)

∴ ص = $\frac{1}{4}$ ع − $\frac{5}{4}$ س + 7

∴ معادلة المستوى هي: 5 س + 4 ص − ع − 28 = 0



② ∵ (س ، ص ، ع) = (٣ ، ٢ ، ٥) + ك₁ (−٣ ، −٣ ، ٤) + ك₂ (١ ، ٢ ، −١)

∴ س = ٣ − ٣ ك₁ + ك₂ (١)

، ص = ٢ − ٣ ك₁ + ٢ ك₂ (٢)

، ع = ٥ + ٤ ك₁ − ك₂ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ س + ع = ٨ + ك₁

∴ ك₁ = س + ع − ٨ (٤)

، بطرح (١) من (٢) :

∴ ص − س = −١ + ك₂ ∴ ك₂ = ص − س + ١ (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) في (١) :

∴ س = ٣ − ٣ (س + ع − ٨) + (ص − س + ١)

∴ المعادلة العامة للمستوى هي : ٥ س − ص + ٣ ع − ٢٨ = ٠

الزاوية بين مستقيم ومستوى في الفراغ (∝)

إذا كان ى = (أ₁ ، ب₁ ، حـ₁) متجه اتجاه للمستقيم

، ن = (أ₂ ، ب₂ ، حـ₂) متجه اتجاه عمودي على المستوى

فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى (∝)

يساوي متممة الزاوية θ بين المتجهين حيث :

$$جتا\ \theta = \frac{|(أ_1 ، ب_1 ، حـ_1) \cdot (أ_2 ، ب_2 ، حـ_2)|}{\sqrt{أ_1^2 + ب_1^2 + حـ_1^2}\ \sqrt{أ_2^2 + ب_2^2 + حـ_2^2}} ، \propto = (90° - \theta)$$

مثال 15

أوجد قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم : $\frac{س - ٥}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع + ٤}{٢}$

، المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع − ٥ = ٠

الحل

الزاوية المطلوبة هي متممة الزاوية θ حيث :

$$جتا\ \theta = \frac{|(٢ ، -١ ، ٢) \cdot (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩}\ \sqrt{٩ + ٤ + ١}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$$

∴ θ = ٦٠°

∴ قياس الزاوية بين المستقيم والمستوى = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

مثال 16

أوجد مسقط النقطة : أ (١ ، ٢ ، −١) على المستوى ٢ س + ٣ ص − ع + ٥ = ٠

الحل

نفرض أن مسقط النقطة أ على المستوى هي النقطة ب (س₁ ، ص₁ ، ع₁)

∵ أب // العمودي على المستوى. ∴ متجه اتجاه أب هو (٢ ، ٣ ، −١)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ وعمودي على المستوى هي :

(س ، ص ، ع) = (١ ، ٢ ، −١) + ك (٢ ، ٣ ، −١) (١)

∴ (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ ك ، ٢ + ٣ ك ، −١ − ك)

∵ ب ∈ للمستوى. ∴ ب تحقق معادلة المستوى.

∴ ٢ (١ + ٢ ك) + ٣ (٢ + ٣ ك) − (−١ − ك) + ٥ = ٠

∴ ٢ + ٤ ك + ٦ + ٩ ك + ١ + ك + ٥ = ٠

∴ ١٤ ك = −١٤ ∴ ك = −١

، بالتعويض في (١) : ∴ إحداثيات النقطة ب = (−١ ، −١ ، ٠)

مثال 17

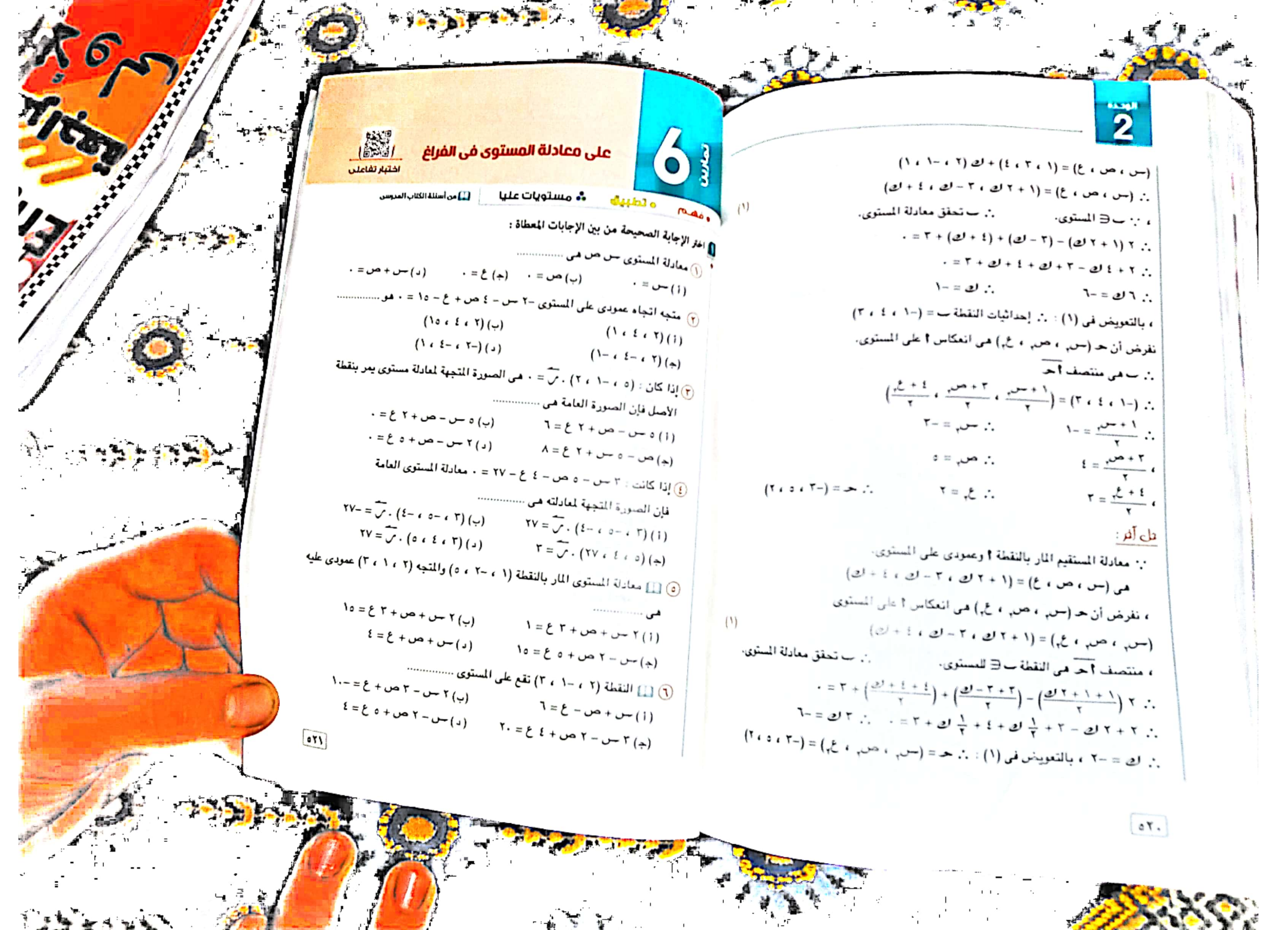
أوجد صورة النقطة : أ (١ ، ٣ ، ٤) بالانعكاس في المستوى ٢ س − ص + ع + ٣ = ٠

الحل

نفرض أن مسقط النقطة أ على المستوى هي النقطة ب (س₁ ، ص₁ ، ع₁)

∵ أب // العمودي على المستوى. ∴ متجه اتجاه أب هو (٢ ، −١ ، ١)

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ وعمودي على المستوى هي :



(س ، ص ، ع) = (١ ، ٣ ، ٤) + ك (٢ ، −١ ، ١)

∴ (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ك ، ٣ − ك ، ٤ + ك) (١)

، ∵ ب ∈ المستوى. ∴ ب تحقق معادلة المستوى.

∴ ٢ (١ + ٢ك) − (٣ − ك) + (٤ + ك) + ٣ = ٠

∴ ٢ + ٤ك − ٣ + ك + ٤ + ك + ٣ = ٠

∴ ٦ك = −٦ ∴ ك = −١

، بالتعويض فى (١) : ∴ إحداثيات النقطة ب = (−١ ، ٤ ، ٣)

نفرض أن حـ (س٢ ، ص٢ ، ع٢) هى انعكاس أ على المستوى.

∴ ب هى منتصف أحـ

∴ (−١ ، ٤ ، ٣) = ((١ + س٢)/٢ ، (٣ + ص٢)/٢ ، (٤ + ع٢)/٢)

∴ (١ + س٢)/٢ = −١ ∴ س٢ = −٣

، (٣ + ص٢)/٢ = ٤ ∴ ص٢ = ٥

، (٤ + ع٢)/٢ = ٣ ∴ ع٢ = ٢ ∴ حـ = (−٣ ، ٥ ، ٢)

حل آخر:

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ وعمودى على المستوى

هى (س ، ص ، ع) = (١ + ٢ك ، ٣ − ك ، ٤ + ك)

، نفرض أن حـ (س٢ ، ص٢ ، ع٢) هى انعكاس أ على المستوى

(س٢ ، ص٢ ، ع٢) = (١ + ٢ك ، ٣ − ك ، ٤ + ك) (١)

، منتصف أحـ هى النقطة ب ∈ للمستوى. ∴ ب تحقق معادلة المستوى.

∴ ٢ ((١ + ١ + ٢ك)/٢) − ((٣ + ٣ − ك)/٢) + ((٤ + ٤ + ك)/٢) + ٣ = ٠

∴ ٢ + ٢ك − ٣ + ½ك + ٤ + ½ك + ٣ = ٠ ∴ ٣ك = −٦

∴ ك = −٢ ، بالتعويض فى (١) : ∴ حـ = (س٢ ، ص٢ ، ع٢) = (−٣ ، ٥ ، ٢)

تمارين 6 على معادلة المستوى فى الفراغ

اختبار تفاعلى

• فهم • تطبيق ∴ مستويات عليا 📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معادلة المستوى س ص هى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (جـ) ع = ٠ (د) س + ص = ٠

② متجه اتجاه عمودى على المستوى ٢س − ٤ص + ع − ١٥ = ٠ هو ....

(أ) (٢ ، ٤ ، ١) (ب) (٢ ، ٤ ، ١٥) (جـ) (٢ ، −٤ ، −١) (د) (−٢ ، −٤ ، ١)

③ إذا كان : (٥ ، −١ ، ٢) · ر⃗ = ٠ هى الصورة المتجهة لمعادلة مستوى يمر بنقطة الأصل فإن الصورة العامة هى ....

(أ) ٥س − ص + ٢ع = ٦ (ب) ٥س − ص + ٢ع = ٠ (جـ) ص − ٥س + ٢ع = ٨ (د) ٢س − ص + ٥ع = ٠

④ إذا كانت : ٣س − ٥ص − ٤ع − ٢٧ = ٠ معادلة المستوى العامة فإن الصورة المتجهة لمعادلته هى ....

(أ) (٣ ، −٥ ، −٤) · ر⃗ = ٢٧ (ب) (٣ ، −٥ ، −٤) · ر⃗ = −٢٧ (جـ) (٥ ، ٤ ، ٢٧) · ر⃗ = ٣ (د) (٣ ، ٤ ، ٥) · ر⃗ = ٢٧

⑤ 📖 معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، −٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى ....

(أ) ٢س + ص + ٣ع = ١ (ب) ٢س + ص + ٣ع = ١٥ (جـ) س − ٢ص + ٥ع = ١٥ (د) س + ص + ع = ٤

⑥ 📖 النقطة (٢ ، −١ ، ٣) تقع على المستوى ....

(أ) س + ص − ع = ٦ (ب) ٢س − ٣ص + ع = −١٠ (جـ) ٣س − ٢ص + ٤ع = ٢٠ (د) س − ٢ص + ٥ع = ٤



● فهم ○ تطبيق ⁂ مستويات عليا

⑦ 📖 أى من النقط الآتية تقع فى المستوى : ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ ؟

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (١ ، ٢ ، ٠)
(جـ) (٠ ، ٢ ، ١) (د) (٣ ، ٢ ، −١)

⑧ 📖 إذا كان : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١) ينتميان للمستوى :
ك س + ص + م ع + ٢ = ٠ فإن : ك + م = ...

(أ) −٧ (ب) −٥ (جـ) −٣ (د) −١

⑨ جيوب تمام الاتجاه للعمودى على المستوى ٣ س + ٤ ص + ع = ١ هى ....

(أ) $\pm\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (ب) ± (٣ ، ٤ ، ١)
(جـ) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$ (د) $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}\right)$

⑩ معادلة المستوى الذى يوازى المستوى ص ع ويمر بالنقطة (١ ، ٢ ، ٥) هى ....

(أ) س = ١ (ب) ص = ٢ (جـ) ع = ٥ (د) ص + ع = ٨

⑪ معادلة المستوى الذى يوازى المستوى س ص ويمر بالنقطة (١ ، ٣ ، ٥) هى ....

(أ) س = ١ (ب) ص = ٣ (جـ) ع = ٥ (د) س + ص = ٤

⑫ 📖 معادلة المستوى المار بنقطة الأصل موازيًا المستوى :
٣ س − ٤ ص + ٥ ع − ٦ = ٠ هى ....

(أ) ٣ س − ٤ ص + ٥ ع = ٠ (ب) ٥ س − ٤ ص + ٣ ع = ٠
(جـ) ٣ س − ٤ ص + ٥ ع = ٢ (د) ٥ س − ٤ ص + ٣ ع = ٤

⑬ ٢ ص + ٣ = ٠ معادلة مستوى ....

(أ) يوازى المستوى (ص ع) (ب) يوازى المستوى (س ع)
(جـ) يوازى المستوى (س ص) (د) غير ذلك.

⑭ يتعين المستوى بـ............

(أ) ٣ نقط مختلفة ليست على استقامة واحدة.
(ب) مستقيم ونقطة خارجة.
(جـ) مستقيمان متقاطعان.
(د) كل ما سبق.

1 📖 أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −٣ ، ١)
والمتجه ن = (١ ، −٢ ، ٣) عمودى على المستوى.

2 📖 أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل
والمتجه ن = س + ٢ ص − ٣ ع عمودى عليه.

3 📖 (دورثان ٢٠١٩) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (−٣ ، ٤ ، ٢)
والمتجه ن = (١ ، −١ ، ٣) عمودى على المستوى.

4 📖 (دورثان ٢٠١٨) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، −١ ، ٤)
والمتجه ن = (٢ ، −٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين :

① هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى ؟
② هل المتجه ى = (٣ ، −٥ ، −٢) يوازى المستوى ؟

5 📖 أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الإحداثيات
س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب.

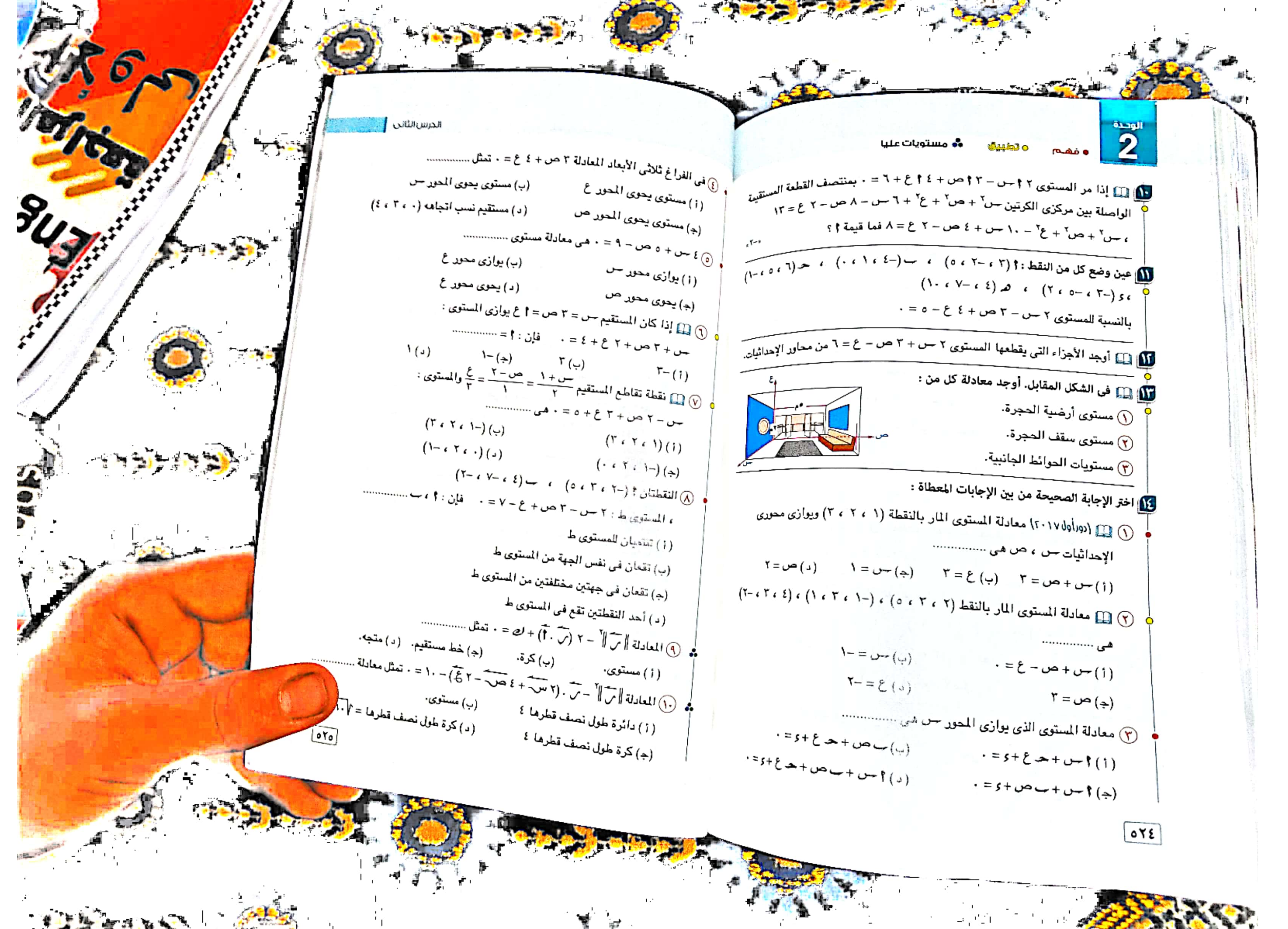
6 📖 (دورأول ٢٠١٩) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط :
(١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٣)

7 أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالثلاث نقط :

① 📖 أ (٢ ، −١ ، ٠) ، ب (−١ ، ٣ ، ٤) ، حـ (٣ ، ٠ ، ٢)
② ل (١ ، ٣ ، ٥) ، م (−١ ، ٢ ، ٤) ، ن (٤ ، ٤ ، ٠)
③ (٣ ، ٠ ، ٤) ، (٢ ، ١ ، ١) ، نقطة الأصل.

8 📖 أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية :

① س = ٣ ② ص = −٢
③ س + ٣ ص = ٥ ④ ٢ س − ص + ٣ ع = ٤



١٠ إذا مر المستوى ٢ أ س – ٣ أ ص + ٤ أ ع + ٦ = ٠ بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى الكرتين $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦ س – ٨ ص – ٢ ع = ١٣$ ، $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ – ١٠ س + ٤ ص – ٢ ع = ٨$ فما قيمة أ ؟

١١ عين وضع كل من النقط : أ (٣ ، –٢ ، ٥) ، ب (–٤ ، ١ ، ٠) ، حـ (٦ ، ٥ ، –١) ، د (–٣ ، –٥ ، ٢) ، هـ (٤ ، –٧ ، ١٠) بالنسبة للمستوى ٢ س – ٣ ص + ٤ ع – ٥ = ٠.

١٢ أوجد الأجزاء التى يقطعها المستوى ٢ س + ٣ ص – ع = ٦ من محاور الإحداثيات.

١٣ فى الشكل المقابل، أوجد معادلة كل من :

١ مستوى أرضية الحجرة.

٢ مستوى سقف الحجرة.

٣ مستويات الحوائط الجانبية.

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ (دور أول ٢٠١٧) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازى محورى الإحداثيات س ، ص هى ....

(أ) س + ص = ٣ (ب) ع = ٣ (جـ) س = ١ (د) ص = ٢

٢ معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (–١ ، ٢ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، –٢) هى ....

(أ) س + ص – ع = ٠ (ب) س = –١

(جـ) ص = ٣ (د) ع = –٢

٣ معادلة المستوى الذى يوازى المحور س هى ....

(أ) أ س + حـ ع + د = ٠ (ب) ب ص + حـ ع + د = ٠

(جـ) أ س + ب ص + د = ٠ (د) أ س + ب ص + حـ ع + د = ٠

٤ فى الفراغ ثلاثى الأبعاد المعادلة ٣ ص + ٤ ع = ٠ تمثل ....

(أ) مستوى يحوى المحور ع (ب) مستوى يحوى المحور س

(جـ) مستوى يحوى المحور ص (د) مستقيم نسب اتجاهه (٠ ، ٣ ، ٤)

٥ ٤ س + ٥ ص – ٩ = ٠ هى معادلة مستوى ....

(أ) يوازى محور س (ب) يوازى محور ع

(جـ) يحوى محور ص (د) يحوى محور ع

٦ إذا كان المستقيم س = ٣ ص = أ ع يوازى المستوى : س + ٣ ص + ٢ ع + ٤ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) –٣ (ب) ٣ (جـ) –١ (د) ١

٧ نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص – ٢}{١} = \frac{ع}{٢}$ والمستوى : س – ٢ ص + ٣ ع + ٥ = ٠ هى ....

(أ) (١ ، ٢ ، ٣) (ب) (–١ ، ٢ ، ٣)

(جـ) (–١ ، ٢ ، ٠) (د) (٠ ، ٢ ، –١)

٨ النقطتان أ (–٢ ، ٣ ، ٥) ، ب (٤ ، –٧ ، –٢) ، المستوى ط : ٢ س – ٣ ص + ع – ٧ = ٠ فإن : أ ، ب ....

(أ) تنتميان للمستوى ط

(ب) تقعان فى نفس الجهة من المستوى ط

(جـ) تقعان فى جهتين مختلفتين من المستوى ط

(د) أحد النقطتين تقع فى المستوى ط

٩ المعادلة $\|\overrightarrow{ر}\|^٢ – ٢ (\overrightarrow{ر} \cdot \overrightarrow{أ}) + ل = ٠$ تمثل ....

(أ) مستوى. (ب) كرة. (جـ) خط مستقيم. (د) متجه.

١٠ المعادلة $\|\overrightarrow{ر}\|^٢ – \overrightarrow{ر} \cdot (٢ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{ص} – ٢ \overrightarrow{ع}) – ١٠ = ٠$ تمثل معادلة ....

(أ) دائرة طول نصف قطرها ٤ (ب) مستوى.

(جـ) كرة طول نصف قطرها ٤ (د) كرة طول نصف قطرها = $\sqrt{١٠}$



الوحدة 2 ● فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

(١١) معادلة المستوى المار بالنقاط (٠ ، ٠ ، −٤) ، (٠ ، ٥ ، ٠) ، (−٢ ، ٠ ، ٠)

هى ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$. (−٢ ، ٠ ، ٠) = [(٠ ، ٠ ، −٤) × (٠ ، ٥ ، ٠)] . (−٢ ، ٠ ، ٠)

(ب) −٢ س + ٥ ص − ٤ ع = ٠

(جـ) أ (س + ٢) + ب (ص − ٥) + حـ (ع + ٤) = ٠

(د) − ١٠ س + ٤ ص − ٥ ع − ٢٠ = ٠

(١٢) المستوى ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ١٢ يقطع من محور س جزءًا طوله ....

(أ) ٣ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى

س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠ هى أ ، ب ، حـ فإن : أ + ب + حـ = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠ (جـ) ٣١ (د) ٤١

(١٤) إذا قطع المستوى $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٢} + \frac{ع}{٢} = ١$ محاور الإحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٤

(١٥) يقطع المستوى محاور الإحداثيات فى أ ، ب ، حـ بحيث أن نقطة تلاقى متوسطات

Δ أ ب حـ هى (٣ ، ٣ ، ٣) فإن معادلة المستوى هى ....

(أ) ٣ س + ٣ ص + ٣ ع = ١ (ب) ٣ س + ٣ ص + ٣ ع = ٣

(جـ) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٣} = ١$ (د) $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٣} = ٣$

(١٦) معادلة المستوى الذى يقطع من الأجزاء الموجبة لمحورى س ، ع جزءين طوليهما

٢ ، ٤ وحدات طول ومن الجزء السالب لمحور الصادات جزء طوله ٣ وحدات طول

هى ....

(أ) ٢ س − ٣ ص + ٤ ع = ١ (ب) ٦ س − ٤ ص + ٣ ع = ٦

(جـ) ٦ س + ٤ ص + ٣ ع = ١٢ (د) ٦ س − ٤ ص + ٣ ع = ١٢

(١٧) إذا قطع المستوى ٢٠ س + ١٥ ص + ١٢ ع = ٦٠ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع

فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب فإن حجم المجسم أ ب حـ و حيث و نقطة الأصل

يساوى .... وحدة مكعبة.

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠

(١٨) معادلة المستوى المار بالنقطة (أ ، ب ، حـ) موازيًا المستوى س + ص + ع = ٠

هى ....

(أ) أ س + ب ص + حـ ع = ١ (ب) س + ص + ع + أ + ب + حـ = ٠

(جـ) س + ص + ع = أ + ب + حـ (د) أ س + ب ص + حـ ع = أ + ب + حـ

(١٩) معادلة المستوى العمودى على المتجه ٢ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$ ويمر بالنقطة

(١ ، ٢ ، ٣) هى ....

(أ) ٢ س + ص + ٣ ع = ٠ (ب) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٣

(جـ) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٤ (د) ٢ س + ص + ٣ ع = ٧

(٢٠) المستوى الذى معادلته : ٢ س − ص = ٠ عموديًا على المستوى ....

(أ) س ص (ب) ص ع (جـ) س ع (د) ص − ٢ س = ٠

(٢١) معادلة المستوى الذى يحتوى نقطة الأصل والمتجه (٠ ، ١ ، −٢) عمودى عليه

هى ....

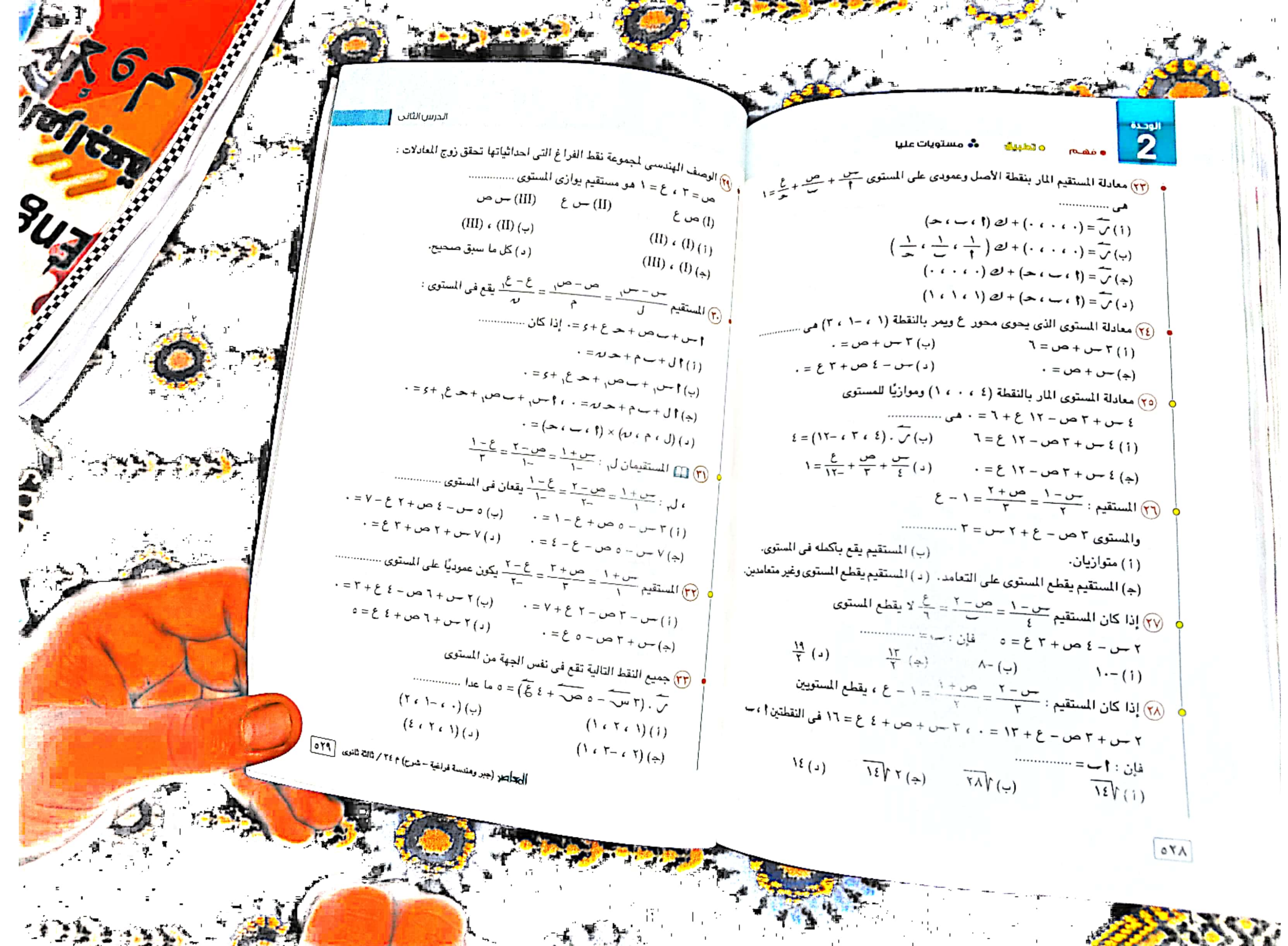
(أ) س = ٢ ص (ب) ص = ٢ ع (جـ) ع = ٢ س (د) ص = ١

(٢٢) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ١ ، ١) عموديًا على المستوى

٢ س + ٣ ص + ع + ٥ = ٠ هى ....

(أ) $\frac{س - ١}{-١} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع - ١}{١}$ (ب) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{١}$

(جـ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{١}$ (د) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$



(٢٣) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودى على المستوى س/أ + ص/ب + ع/ح = ١ هى ....

(أ) ر = (٠ ، ٠ ، ٠) + ك (أ ، ب ، ح)
(ب) ر = (٠ ، ٠ ، ٠) + ك (١/أ ، ١/ب ، ١/ح)
(ج) ر = (أ ، ب ، ح) + ك (٠ ، ٠ ، ٠)
(د) ر = (أ ، ب ، ح) + ك (١ ، ١ ، ١)

(٢٤) معادلة المستوى الذى يحوى محور ع ويمر بالنقطة (١ ، -١ ، ٣) هى ....

(أ) ٣ س + ص = ٦ (ب) ٣ س + ص = ٠
(ج) س + ص = ٠ (د) س − ٤ ص + ٣ ع = ٠

(٢٥) معادلة المستوى المار بالنقطة (٤ ، ٠ ، ١) وموازيًا للمستوى ٤ س + ٣ ص − ١٢ ع + ٦ = ٠ هى ....

(أ) ٤ س + ٣ ص − ١٢ ع = ٦ (ب) ر . (٤ ، ٣ ، −١٢) = ٤
(ج) ٤ س + ٣ ص − ١٢ ع = ٠ (د) س/٤ + ص/٣ + ع/−١٢ = ١

(٢٦) المستقيم : (س − ١)/٢ = (ص + ٢)/٣ = ١ − ع
والمستوى ٣ ص − ع + ٢ س = ٣ ....

(أ) متوازيان. (ب) المستقيم يقع بأكمله فى المستوى.
(ج) المستقيم يقطع المستوى على التعامد. (د) المستقيم يقطع المستوى وغير متعامدين.

(٢٧) إذا كان المستقيم (س − ١)/٤ = (ص − ٢)/ب = ع/٦ لا يقطع المستوى
٢ س − ٤ ص + ٣ ع = ٥ فإن : ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٨ (ج) ١٣/٢ (د) ١٩/٢

(٢٨) إذا كان المستقيم : (س − ٢)/٣ = (ص + ١)/٢ = ١ − ع ، يقطع المستويين
٢ س + ٣ ص − ع + ١٣ = ٠ ، ٢ س + ص + ٤ ع = ١٦ فى النقطتين أ ، ب
فإن : أب = ...

(أ) √١٤ (ب) √٢٨ (ج) ٢ √١٤ (د) ١٤

(٢٩) الوصف الهندسى لمجموعة نقط الفراغ التى احداثياتها تحقق زوج المعادلات :
ص = ٣ ، ع = ١ هو مستقيم يوازى المستوى ....

(I) ص ع (II) س ع (III) س ص
(أ) (I) ، (II) (ب) (II) ، (III)
(ج) (I) ، (III) (د) كل ما سبق صحيح.

(٣٠) المستقيم (س − س١)/ل = (ص − ص١)/م = (ع − ع١)/ن يقع فى المستوى :
أ س + ب ص + ح ع + د = ٠ إذا كان ....

(أ) أ ل + ب م + ح ن = ٠
(ب) أ س١ + ب ص١ + ح ع١ + د = ٠
(ج) أ ل + ب م + ح ن = ٠ ، أ س١ + ب ص١ + ح ع١ + د = ٠
(د) (ل ، م ، ن) × (أ ، ب ، ح) = ٠

(٣١) المستقيمان ل١ : (س + ١)/−١ = (ص − ٢)/−١ = (ع − ١)/٣
، ل٢ : (س + ١)/١ = (ص − ٢)/−٢ = (ع − ١)/−١ يقعان فى المستوى ....

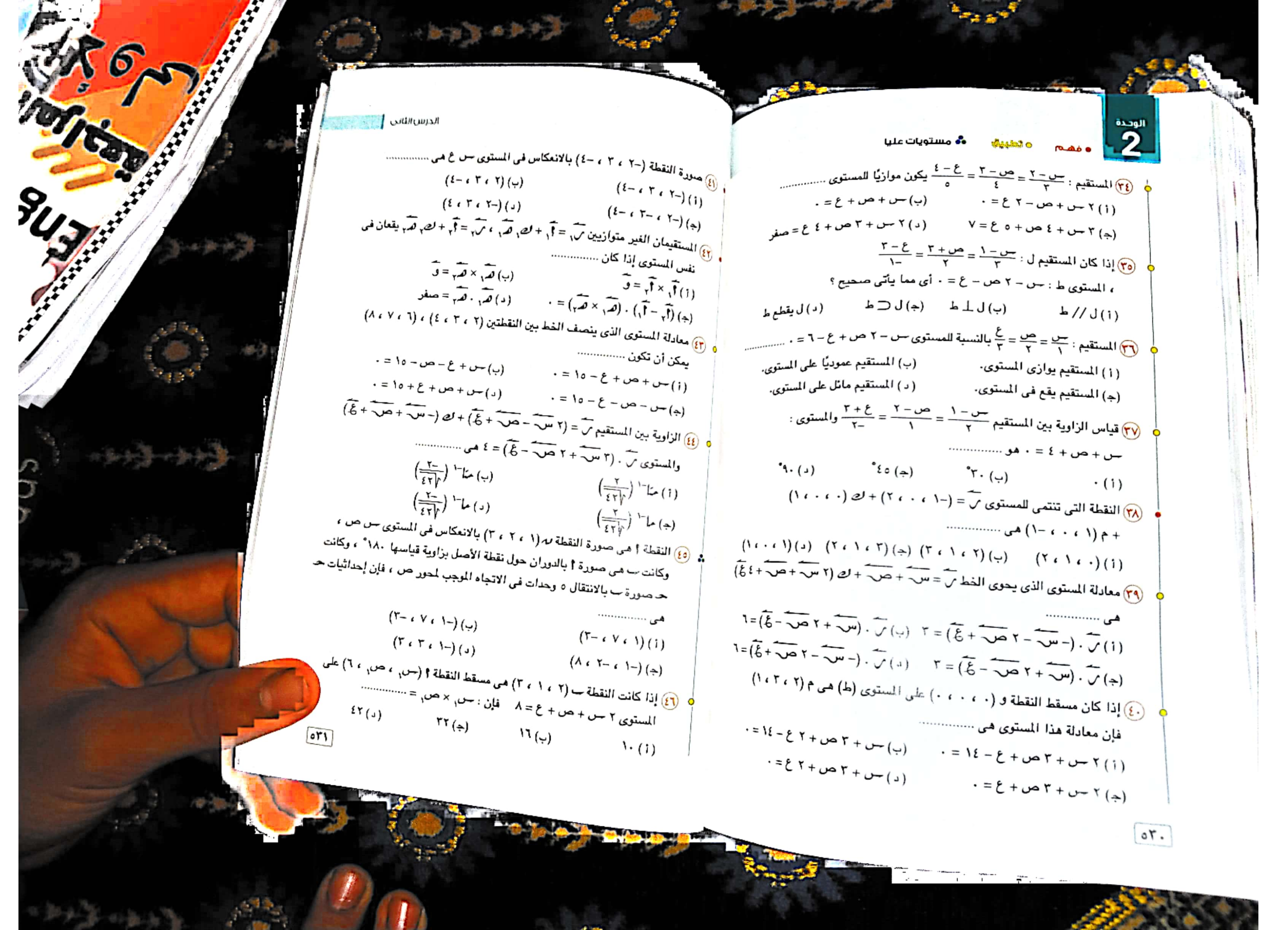
(أ) ٣ س − ٥ ص + ع − ١ = ٠ (ب) ٥ س − ٤ ص + ٢ ع − ٧ = ٠
(ج) ٧ س − ٥ ص − ع − ٤ = ٠ (د) ٧ س + ٢ ص + ٣ ع = ٠

(٣٢) المستقيم (س + ١)/١ = (ص + ٢)/٣ = (ع − ٢)/−٢ يكون عموديًا على المستوى ....

(أ) س − ٣ ص − ٢ ع + ٧ = ٠ (ب) ٢ س + ٦ ص − ٤ ع + ٣ = ٠
(ج) س + ٣ ص − ٥ ع = ٠ (د) ٢ س + ٦ ص + ٤ ع = ٥

(٣٣) جميع النقط التالية تقع فى نفس الجهة من المستوى
ر . (٣ س − ٥ ص + ٤ ع) = ٥ ما عدا ....

(أ) (١ ، ٢ ، ١) (ب) (٠ ، −١ ، ٢)
(ج) (٢ ، −٣ ، ١) (د) (١ ، ٢ ، ٤)



الوحدة 2

• فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

(٣٤) المستقيم: (س − ٢)/٣ = (ص − ٣)/٤ = (ع − ٤)/٥ يكون موازيًا للمستوى ....

(أ) ٢س + ص − ٢ع = ٠ (ب) س + ص + ع = ٠

(ج) ٣س + ٤ص + ٥ع = ٧ (د) ٢س + ٣ص + ٤ع = صفر

(٣٥) إذا كان المستقيم ل: (س − ١)/٣ = (ص + ٣)/٢ = (ع − ٣)/−١

، المستوى ط: س − ٢ص − ع = ٠ أي مما يأتي صحيح؟

(أ) ل // ط (ب) ل ⊥ ط (ج) ل ⊂ ط (د) ل يقطع ط

(٣٦) المستقيم: س/١ = ص/٢ = ع/٣ بالنسبة للمستوى س − ٢ص + ع − ٦ = ٠ ....

(أ) المستقيم يوازي المستوى. (ب) المستقيم عموديًا على المستوى.

(ج) المستقيم يقع في المستوى. (د) المستقيم مائل على المستوى.

(٣٧) قياس الزاوية بين المستقيم (س − ١)/٢ = (ص − ٢)/١ = (ع + ٣)/−٢ والمستوى:

س + ص + ٤ = ٠ هو ....

(أ) ٠ (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٩٠°

(٣٨) النقطة التي تنتمي للمستوى ر = (−١، ٠، ٢) + ك (٠، ٠، ١)

+ م (١، ٠، −١) هي ....

(أ) (٠، ١، ٢) (ب) (٢، ١، ٣) (ج) (٣، ١، ٢) (د) (١، ٠، ١)

(٣٩) معادلة المستوى الذي يحوي الخط ر = س + ص + ك (٢س + ص + ٤ع)

هي ....

(أ) ر . (−س − ٢ص + ع) = ٣ (ب) ر . (س + ٢ص − ع) = ٦

(ج) ر . (س + ٢ص − ع) = ٣ (د) ر . (−س − ٢ص + ع) = ٦

(٤٠) إذا كان مسقط النقطة و (٠، ٠، ٠) على المستوى (ط) هي م (٢، ٣، ١)

فإن معادلة هذا المستوى هي ....

(أ) ٢س + ٣ص + ع − ١٤ = ٠ (ب) س + ٣ص + ٢ع − ١٤ = ٠

(ج) ٢س + ٣ص + ع = ٠ (د) س + ٣ص + ٢ع = ٠

(٤١) صورة النقطة (−٢، ٣، −٤) بالانعكاس في المستوى س ع هي ....

(أ) (−٢، ٣، −٤) (ب) (٢، ٣، −٤)

(ج) (−٢، −٣، −٤) (د) (−٢، ٣، ٤)

(٤٢) المستقيمان الغير متوازيين ر١ = أ١ + ك١ ه١ ، ر٢ = أ٢ + ك٢ ه٢ يقعان في نفس المستوى إذا كان ....

(أ) أ١ × أ٢ = و (ب) ه١ × ه٢ = و

(ج) (أ٢ − أ١) . (ه١ × ه٢) = ٠ (د) ه١ . ه٢ = صفر

(٤٣) معادلة المستوى الذي ينصف الخط بين النقطتين (٢، ٣، ٤) ، (٦، ٧، ٨) يمكن أن تكون ....

(أ) س + ص + ع − ١٥ = ٠ (ب) س + ع − ص − ١٥ = ٠

(ج) س − ص − ع − ١٥ = ٠ (د) س + ص + ع + ١٥ = ٠

(٤٤) الزاوية بين المستقيم ر = (٢س − ص + ع) + ك (−س + ص + ع) والمستوى ر . (٣س + ٢ص − ع) = ٤ هي ....

(أ) جتا⁻¹ (٢/√٤٢) (ب) جتا⁻¹ (−٢/√٤٢)

(ج) جا⁻¹ (٢/√٤٢) (د) جا⁻¹ (−٢/√٤٢)

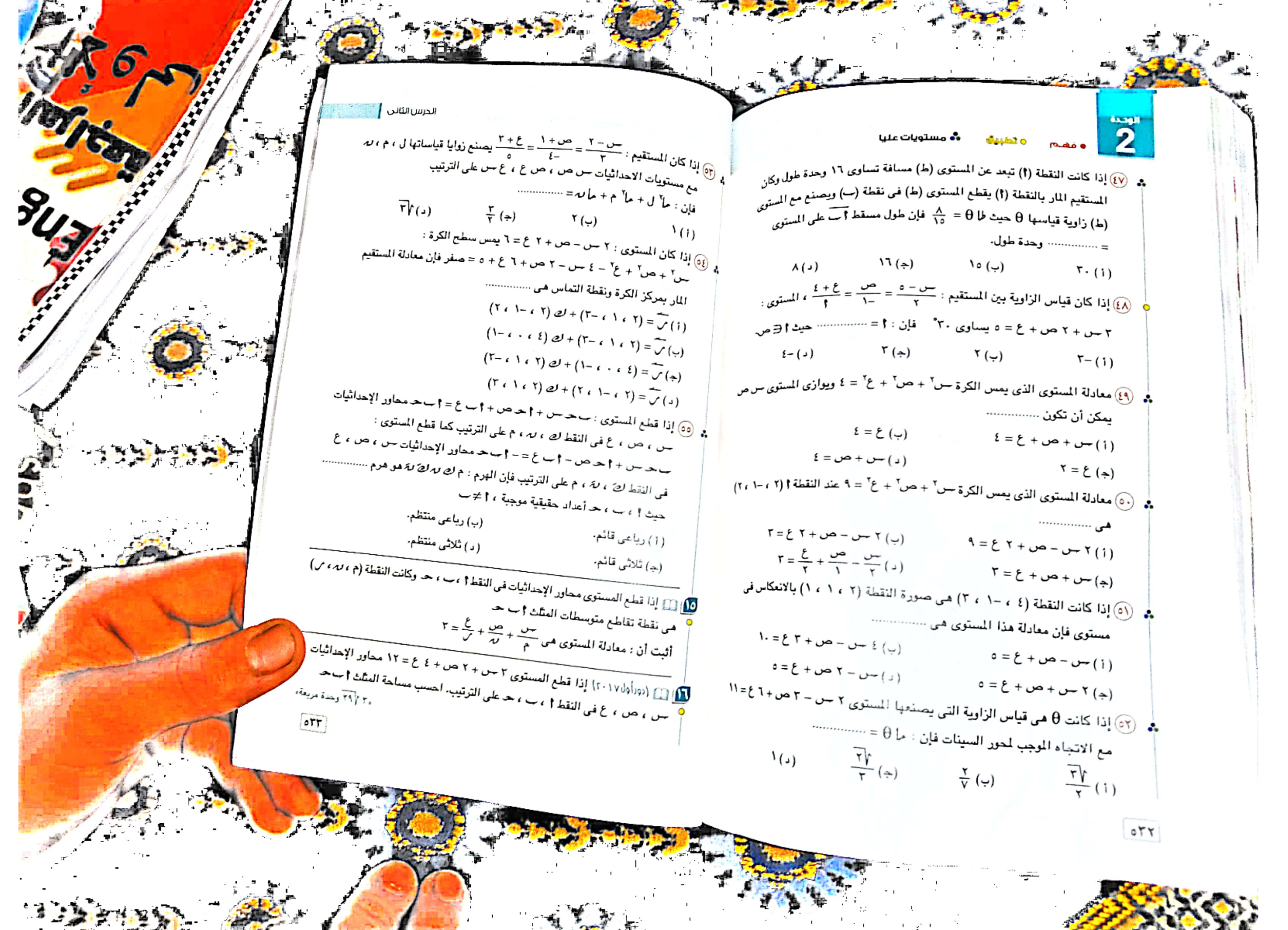
(٤٥) النقطة أ هي صورة النقطة ن (١، ٢، ٣) بالانعكاس في المستوى س ص، وكانت ب هي صورة أ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ١٨٠°، وكانت حـ صورة ب بالانتقال ٥ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور ص، فإن إحداثيات حـ هي ....

(أ) (١، ٧، −٣) (ب) (−١، ٧، −٣)

(ج) (−١، −٢، ٨) (د) (−١، ٣، ٣)

(٤٦) إذا كانت النقطة ب (٢، ١، ٣) هي مسقط النقطة أ (س١، ص١، ٦) على المستوى ٢س + ص + ع = ٨ فإن: س١ × ص١ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (ج) ٣٢ (د) ٤٢



● فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

(٤٧) إذا كانت النقطة (أ) تبعد عن المستوى (ط) مسافة تساوى ١٦ وحدة طول وكان المستقيم المار بالنقطة (أ) يقطع المستوى (ط) فى نقطة (ب) ويصنع مع المستوى (ط) زاوية قياسها θ حيث ظا θ = $\frac{٨}{١٥}$ فإن طول مسقط $\overline{أب}$ على المستوى = ... وحدة طول.

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د) ٨

(٤٨) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيم : $\frac{س - ٥}{٢} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع + ٤}{أ}$ ، المستوى : ٢ س + ٢ ص + ع = ٥ يساوى ٣٠° فإن : أ = ... حيث أ ∈ ص

(أ) −٣ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) −٤

(٤٩) معادلة المستوى الذى يمس الكرة س٢ + ص٢ + ع٢ = ٤ ويوازى المستوى س ص يمكن أن تكون ....

(أ) س + ص + ع = ٤ (ب) ع = ٤

(جـ) ع = ٢ (د) س + ص = ٤

(٥٠) معادلة المستوى الذى يمس الكرة س٢ + ص٢ + ع٢ = ٩ عند النقطة أ (٢ ، −١ ، ٢) هى ....

(أ) ٢ س − ص + ٢ ع = ٩ (ب) ٢ س − ص + ٢ ع = ٣

(جـ) س + ص + ع = ٣ (د) $\frac{س}{٢} - \frac{ص}{١} + \frac{ع}{٢} = ٣$

(٥١) إذا كانت النقطة (٤ ، −١ ، ٣) هى صورة النقطة (٢ ، ١ ، ١) بالانعكاس فى مستوى فإن معادلة هذا المستوى هى ....

(أ) س − ص + ع = ٥ (ب) ٤ س − ص + ٣ ع = ١٠

(جـ) ٢ س + ص + ع = ٥ (د) س − ٢ ص + ع = ٥

(٥٢) إذا كانت θ هى قياس الزاوية التى يصنعها المستوى ٢ س − ٣ ص + ٦ ع = ١١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : ما θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٧}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٣}$ (د) ١

(٥٣) إذا كان المستقيم : $\frac{س - ٢}{٣} = \frac{ص + ١}{-٤} = \frac{ع + ٣}{٥}$ يصنع زوايا قياساتها ل ، م ، ن مع مستويات الاحداثيات س ص ، ص ع ، ع س على الترتيب فإن : حا٢ ل + حا٢ م + حا٢ ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٥٤) إذا كان المستوى : ٢ س − ص + ٢ ع = ٦ يمس سطح الكرة : س٢ + ص٢ + ع٢ − ٤ س − ٢ ص + ٦ ع + ٥ = صفر فإن معادلة المستقيم المار بمركز الكرة ونقطة التماس هى ....

(أ) $\vec{ر}$ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (٢ ، −١ ، ٢)

(ب) $\vec{ر}$ = (٢ ، ١ ، −٣) + ك (٤ ، ٠ ، −١)

(جـ) $\vec{ر}$ = (٤ ، ٠ ، −١) + ك (٢ ، ١ ، −٣)

(د) $\vec{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، ١ ، ٣)

(٥٥) إذا قطع المستوى : ب حـ س + أ حـ ص + أ ب ع = أ ب حـ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط ك ، ن ، م على الترتيب كما قطع المستوى : ب حـ س + أ حـ ص − أ ب ع = − أ ب حـ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط ك َ ، ن َ ، م على الترتيب فإن الهرم : م ك ن ك َ ن َ هو هرم .... حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية موجبة ، أ ≠ ب

(أ) رباعى قائم. (ب) رباعى منتظم.

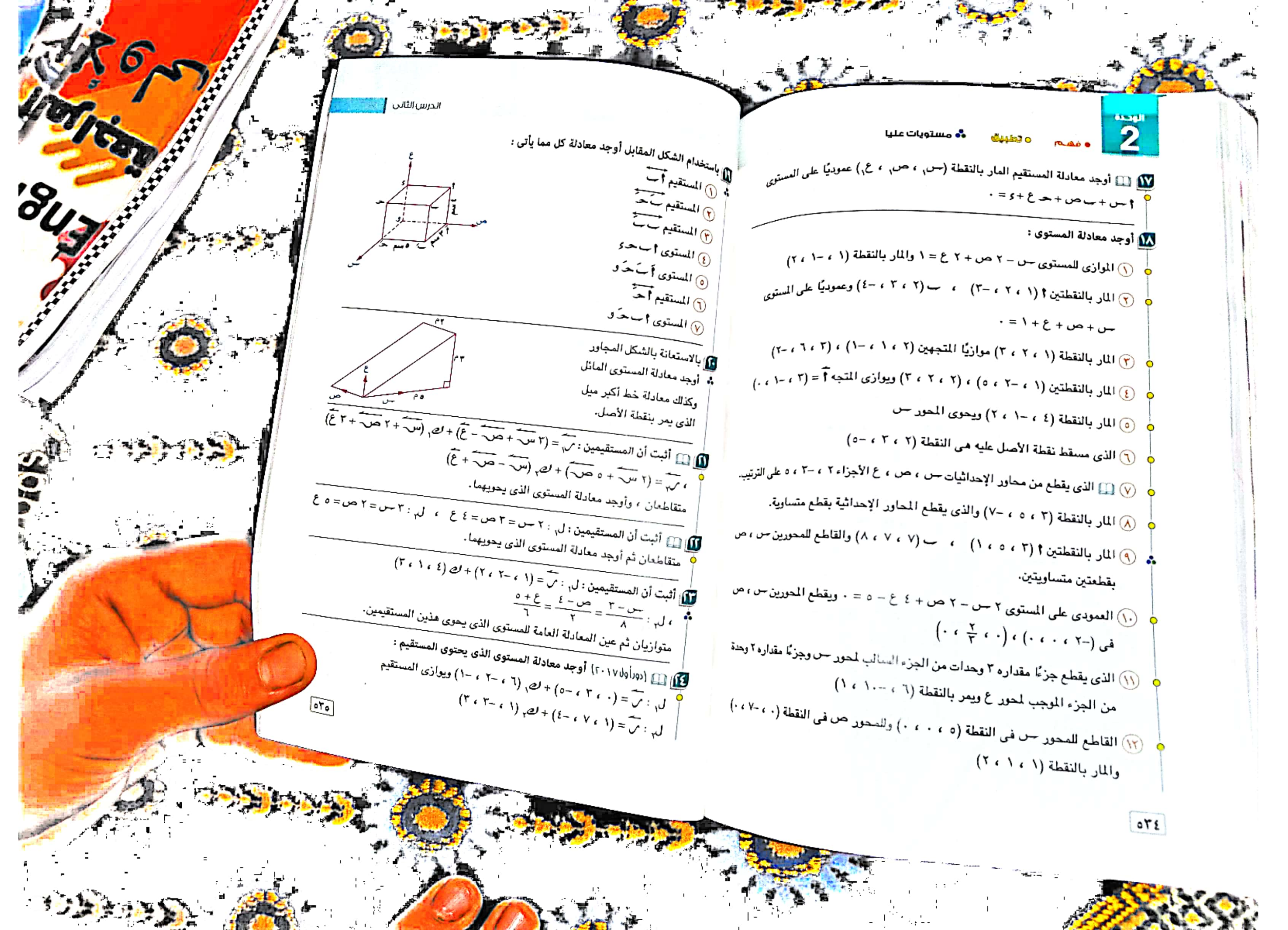
(جـ) ثلاثى قائم. (د) ثلاثى منتظم.

١٥ إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ وكانت النقطة (م ، ن ، ر) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

أثبت أن : معادلة المستوى هى $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{ر} = ٣$

١٦ (دور أول ٢٠١٧) إذا قطع المستوى ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب. احسب مساحة المثلث أ ب حـ

٣ $\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة.



١٧ أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) عموديًا على المستوى
أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

١٨ أوجد معادلة المستوى :

(١) الموازى للمستوى س − ٢ ص + ٢ ع = ١ والمار بالنقطة (١ ، −١ ، ٢)

(٢) المار بالنقطتين أ (١ ، ٢ ، −٣) ، ب (٢ ، ٣ ، −٤) وعموديًا على المستوى
س + ص + ع + ١ = ٠

(٣) المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) موازيًا المتجهين (٢ ، ١ ، −١) ، (٣ ، ٦ ، −٢)

(٤) المار بالنقطتين (١ ، −٢ ، ٥) ، (٢ ، ٢ ، ٣) ويوازى المتجه أ = (٣ ، −١ ، ٠)

(٥) المار بالنقطة (٤ ، −١ ، ٢) ويحوى المحور س

(٦) الذى مسقط نقطة الأصل عليه هى النقطة (٢ ، ٣ ، −٥)

(٧) الذى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٢ ، −٣ ، ٥ على الترتيب.

(٨) المار بالنقطة (٣ ، ٥ ، −٧) والذى يقطع المحاور الإحداثية بقطع متساوية.

(٩) المار بالنقطتين أ (٣ ، ٥ ، ١) ، ب (٧ ، ٧ ، ٨) والقاطع للمحورين س ، ص بقطعتين متساويتين.

(١٠) العمودى على المستوى ٢ س − ٢ ص + ٤ ع − ٥ = ٠ ويقطع المحورين س ، ص فى (−٢ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٠)

(١١) الذى يقطع جزءًا مقداره ٣ وحدات من الجزء السالب لمحور س وجزءًا مقداره ٢ وحدة من الجزء الموجب لمحور ع ويمر بالنقطة (٦ ، −١٠ ، ١)

(١٢) القاطع للمحور س فى النقطة (٥ ، ٠ ، ٠) وللمحور ص فى النقطة (٠ ، −٧ ، ٠) والمار بالنقطة (١ ، ١ ، ٢)

١٩ باستخدام الشكل المقابل أوجد معادلة كل مما يأتى :

(١) المستقيم أ ب
(٢) المستقيم ب حـ
(٣) المستقيم ب ب َ
(٤) المستوى أ ب حـ ء
(٥) المستوى أ ب َ حـ َ و
(٦) المستقيم أ حـ
(٧) المستوى أ ب حـ َ و

٢٠ بالاستعانة بالشكل المجاور أوجد معادلة المستوى المائل وكذلك معادلة خط أكبر ميل الذى يمر بنقطة الأصل.

٢١ أثبت أن المستقيمين : $ر_١$ = (٣ س + ص − ع) + $ك_١$ (س + ٢ ص + ٣ ع) ، $ر_٢$ = (٢ س + ٥ ص) + $ك_٢$ (س − ص + ع) متقاطعان ، وأوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

٢٢ أثبت أن المستقيمين : $ل_١$: ٢ س = ٣ ص = ٤ ع ، $ل_٢$: ٣ س = ٢ ص = ٥ ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

٢٣ أثبت أن المستقيمين : $ل_١$: ر = (١ ، −٢ ، ٢) + ك (٤ ، ١ ، ٣) ، $ل_٢$: $\frac{س − ٣}{٨} = \frac{ص − ٤}{٢} = \frac{ع + ٥}{٦}$ متوازيان ثم عين المعادلة العامة للمستوى الذى يحوى هذين المستقيمين.

٢٤ (دور أول ٢٠١٧) أوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم :
$ل_١$: ر = (٠ ، ٣ ، −٥) + $ك_١$ (٦ ، −٢ ، −١) ويوازى المستقيم
$ل_٢$: ر = (١ ، ٧ ، −٤) + $ك_٢$ (١ ، −٣ ، ٣)



٢٥ أوجد معادلة المستوى الذى يحوى كلاً من المستقيم : $\frac{س + ١}{-٣} = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع + ٢}{١}$
والنقطة (٠ ، ٧ ، -٧)

٢٦ أوجد معادلة المستوى الذى يحوى المستقيم : $س = \frac{ص - ٣}{٢} = \frac{ع - ٥}{٣}$ ويكون عموديًا
على المستوى ٢ س + ٧ ص - ٣ ع = ١

٢٧ أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (-١ ، ٣ ، ٢) ويكون عموديًا على كلٍ من المستويين :
س + ٢ ص + ٣ ع = ٥ ، ٣ س + ٣ ص + ع = ٩

٢٨ أوجد معادلة المستوى المار بنقطة الأصل وعموديًا على كل من المستويين :
س + ٢ ص - ع = ١ ، ٣ س - ٤ ص + ع = ٥

٢٩ أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) فى كل من الحالات الآتية :
(١) يوازى المستوى ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١
(٢) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)
(٣) عمودى على كل من المستويين ٧ س + ص + ٢ ع = ٦ ، ٣ س + ٥ ص - ٦ ع = ٨

٣٠ اكتب المعادلة العامة للمستوى :
$س = ٢ + ٢ ك_١ - ٤ ك_٢$ ، $ص = ٤ - ك_٢$ ، $ع = ٢ + ٢ ك_١$

٣١ أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى الذى معادلته :
$(س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك_١ (-١ ، ٣ ، ٤) + ك_٢ (٦ ، ١ ، -٢)$
حيث $ك_١$ ، $ك_٢$ بارامترات.

٣٢ أثبت أن المستقيم : $\frac{س - ٣}{٥} = \frac{ص + ١}{٥} = \frac{ع + ٤}{٧}$ يقع فى المستوى :
٣ س + ٤ ص - ٥ ع = ٢٥

٣٣ أثبت أن النقطة أ (٢ ، ٣ ، ١) والمستقيم ل :
$\vec{ر} = (٣ \vec{س} + \vec{ص} + ٢ \vec{ع}) + ك (\vec{س} - ٢ \vec{ص} + ٢ \vec{ع})$
يقعان فى المستوى الذى معادلته $\vec{ر} \cdot (٢ \vec{س} - \vec{ع}) = ٣$

٣٤ أثبت أن المستقيم $\vec{ر} = \vec{ع} + ك (٢ \vec{س} + ٣ \vec{ص} + ٤ \vec{ع})$
عمودى على المستوى $س + \frac{٣}{٢} ص + ٢ ع = ٥$

٣٥ أوجد قياس الزاوية بين المستقيم $\vec{ر} = (\vec{س} + ٢ \vec{ص} - \vec{ع}) + ك (\vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع})$
والعمودى على المستوى $\vec{ر} \cdot (٢ \vec{س} - \vec{ص} + \vec{ع}) = ٤$ «٢٨ ١٩°»

٣٦ أوجد قياس الزاوية بين المستقيم $\frac{س + ١}{٣} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع - ٢}{٤}$
والمستوى : ٢ س + ص - ٣ ع + ٤ = ٠ «٢٧ ١١°»

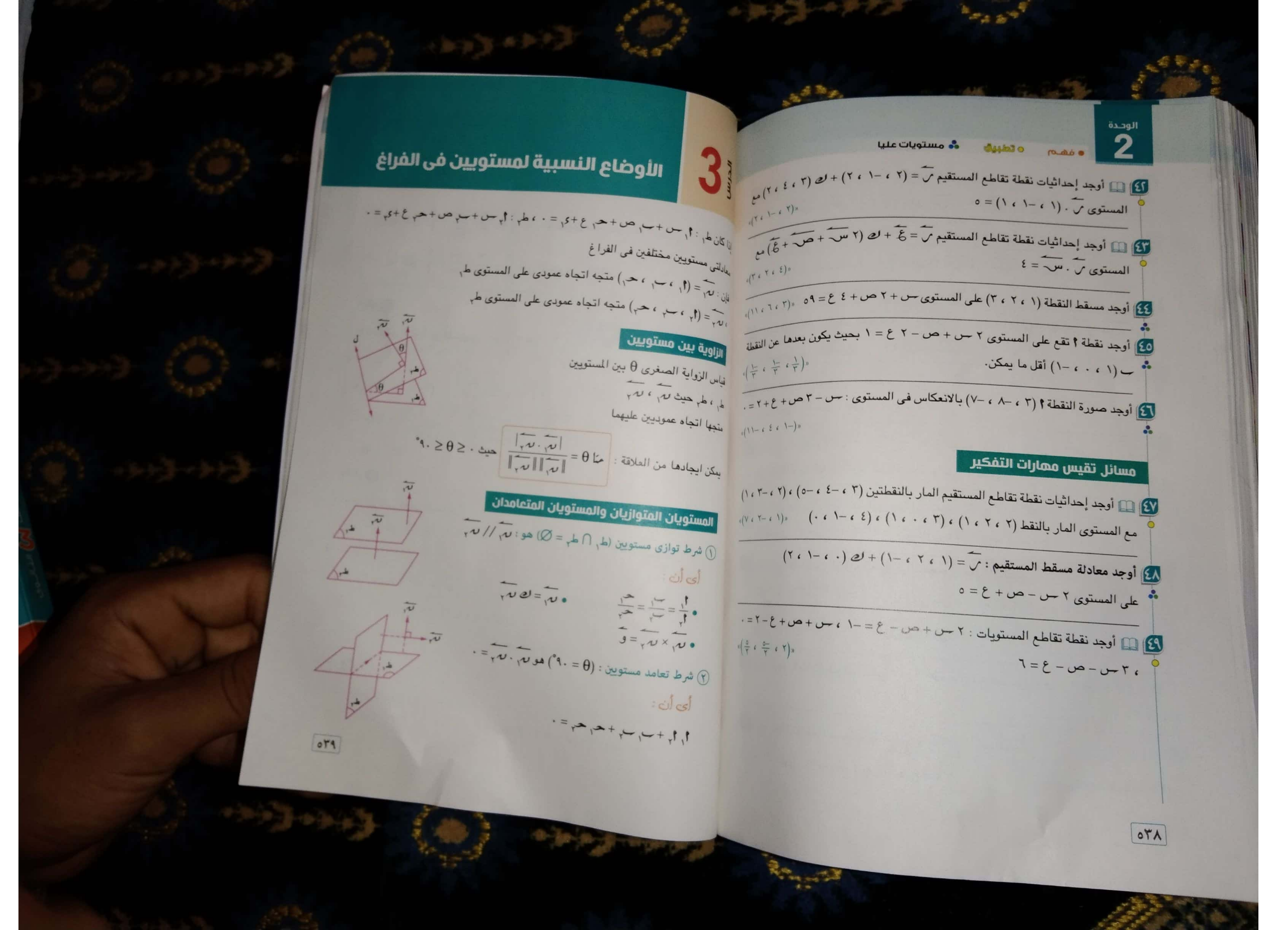
٣٧ إذا كان المستقيم $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى ٣ س + ٢ ص + ع - ٨ = ٠
فى نقطة أوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى. «٣٠°»

٣٨ إذا كان قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع + ٣}{-٢}$
والمستوى : م س + ص + ع = ٠ يساوى ٤٥° أوجد قيمة : م «١٠ أ ٧»

٣٩ إذا كانت θ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين المستقيم :
$\frac{س + ٢}{ك} = \frac{ص - ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{١}$ والمستوى س + ٢ ص + ٣ ع - ٥ = ٠
وكان $جا θ = \frac{٥ \sqrt{٧٠}}{٤٢}$ أوجد قيمة : ك «$\frac{١}{٤}$ ، ٢»

٤٠ أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢ «(٢ ، ٢ ، ٢)»

٤١ أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\frac{س + ٨}{٩} = \frac{ص - ١٠}{-٤} = \frac{ع - ٩}{-٢}$
مع المستوى : ٣ س + ٤ ص + ٥ ع = ٧٦ «(١٢٧ ، -٥٠ ، -٢١)»



٤٢ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = (٢ ، -١ ، ٢) + ك (٣ ، ٤ ، ٢)$ مع المستوى $\overrightarrow{ر} \cdot (١ ، -١ ، ١) = ٥$ «(٢ ، -١ ، ٢)»

٤٣ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ع} + ك (٢ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع})$ مع المستوى $\overrightarrow{ر} \cdot \overrightarrow{س} = ٤$ «(٤ ، ٢ ، ٣)»

٤٤ أوجد مسقط النقطة (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى س + ٢ ص + ٤ ع = ٥٩ «(٣ ، ٦ ، ١١)»

٤٥ أوجد نقطة أ تقع على المستوى ٢ س + ص − ٢ ع = ١ بحيث يكون بعدها عن النقطة ب (١ ، ٠ ، −١) أقل ما يمكن. «($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$)»

٤٦ أوجد صورة النقطة أ (٣ ، −٨ ، −٧) بالانعكاس فى المستوى : س − ٣ ص + ع + ٢ = ٠ «(−١ ، ٤ ، −١١)»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٤٧ أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٤ ، −٥) ، (٢ ، −٣ ، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، ٠ ، ١) ، (٤ ، −١ ، ٠) «(١ ، −٢ ، ٧)»

٤٨ أوجد معادلة مسقط المستقيم : $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٢ ، −١) + ك (٠ ، −١ ، ٢)$ على المستوى ٢ س − ص + ع = ٥

٤٩ أوجد نقطة تقاطع المستويات : ٢ س + ص − ع = −١ ، س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٢ س − ص − ع = ٦ «(٢ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)»

الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ

إذا كان ط١ : أ١ س + ب١ ص + حـ١ ع + ء١ = ٠ ، ط٢ : أ٢ س + ب٢ ص + حـ٢ ع + ء٢ = ٠

معادلتى مستويين مختلفين فى الفراغ

فإن : $\overrightarrow{ن_١}$ = (أ١ ، ب١ ، حـ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى ط١

$\overrightarrow{ن_٢}$ = (أ٢ ، ب٢ ، حـ٢) متجه اتجاه عمودى على المستوى ط٢

الزاوية بين مستويين

قياس الزاوية الصغرى θ بين المستويين ط١ ، ط٢ حيث $\overrightarrow{ن_١}$ ، $\overrightarrow{ن_٢}$ متجها اتجاه عموديين عليهما

يمكن إيجادها من العلاقة : $جتا \theta = \frac{|\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢}|}{\|\overrightarrow{ن_١}\| \|\overrightarrow{ن_٢}\|}$ حيث $٠ \leq \theta \leq ٩٠°$

المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان

① شرط توازى مستويين (ط١ ∩ ط٢ = ∅) هو : $\overrightarrow{ن_١} // \overrightarrow{ن_٢}$

أى أن :

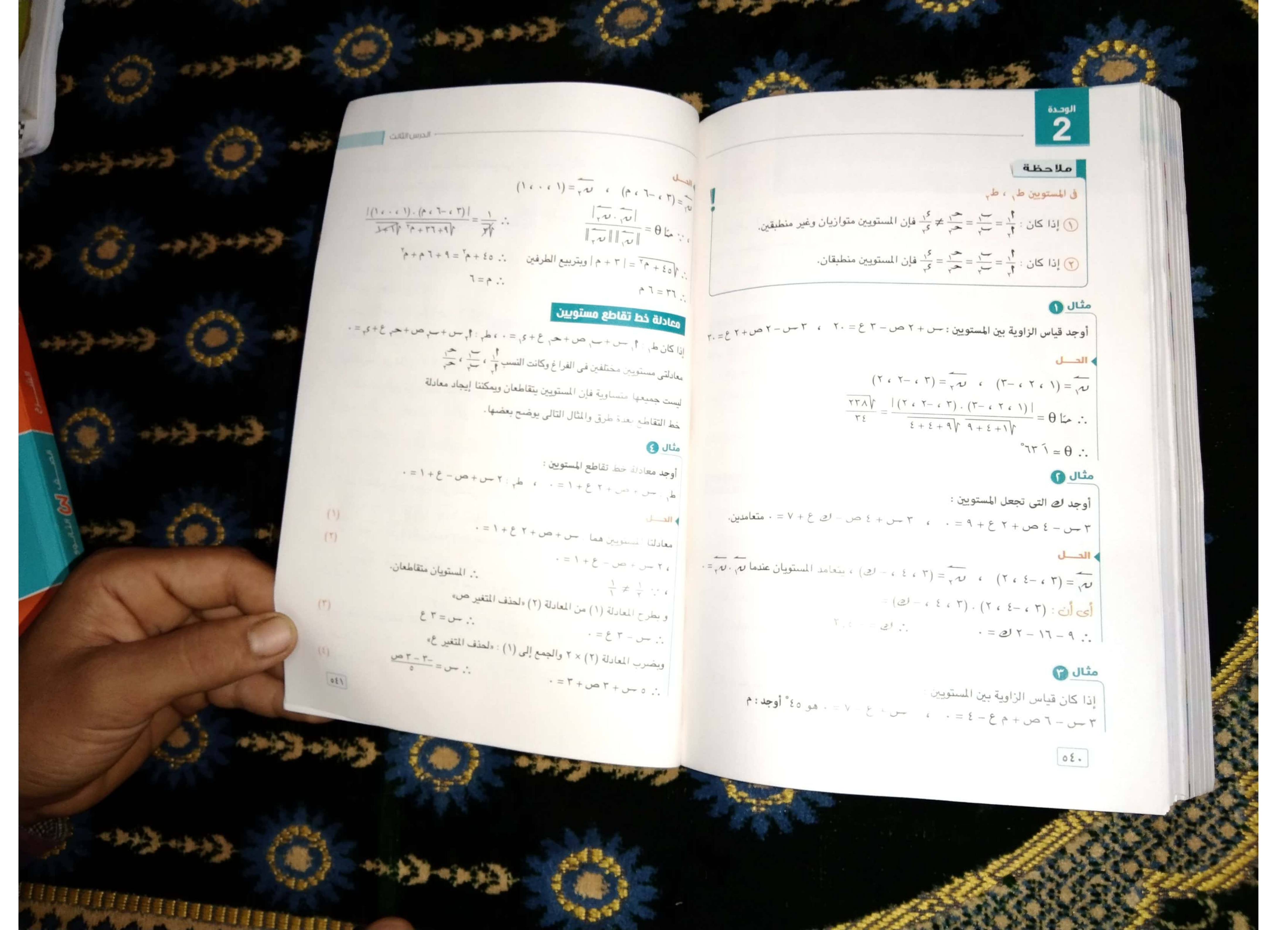
• $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢}$ • $\overrightarrow{ن_١} = ك \overrightarrow{ن_٢}$

• $\overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = و$

② شرط تعامد مستويين : (θ = ٩٠°) هو $\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢} = ٠$

أى أن :

أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + حـ١ حـ٢ = ٠



ملاحظة

في المستويين ط١ ، ط٢

① إذا كان : أ١/أ٢ = ب١/ب٢ = حـ١/حـ٢ ≠ ء١/ء٢ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين.

② إذا كان : أ١/أ٢ = ب١/ب٢ = حـ١/حـ٢ = ء١/ء٢ فإن المستويين منطبقان.

مثال ١

أوجد قياس الزاوية بين المستويين : س + ٢ ص − ٣ ع = ٢٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٢ ع = ٣٠

الحل

ن١ = (١ ، ٢ ، −٣) ، ن٢ = (٣ ، −٢ ، ٢)

∴ حتا θ = |(١ ، ٢ ، −٣) . (٣ ، −٢ ، ٢)| / (√(١ + ٤ + ٩) √(٩ + ٤ + ٤)) = √٢٣٨ / ٣٤

∴ θ ≃ ٦٣ ١َ °

مثال ٢

أوجد ك التي تجعل المستويين :

٣ س − ٤ ص + ٢ ع + ٩ = ٠ ، ٣ س + ٤ ص − ك ع + ٧ = ٠ متعامدين.

الحل

ن١ = (٣ ، −٤ ، ٢) ، ن٢ = (٣ ، ٤ ، −ك) ، يتعامد المستويان عندما ن١ . ن٢ = ٠

أي أن : (٣ ، −٤ ، ٢) . (٣ ، ٤ ، −ك) =

∴ ٩ − ١٦ − ٢ ك = ٠ ∴ ك = −٣.٥

مثال ٣

إذا كان قياس الزاوية بين المستويين :

٣ س − ٦ ص + م ع − ٤ = ٠ ، س + ع − ٧ = ٠ هو ٤٥° أوجد : م

الحل

ن١ = (٣ ، −٦ ، م) ، ن٢ = (١ ، ٠ ، ١)

∵ حتا θ = |ن١ . ن٢| / (‖ن١‖ ‖ن٢‖)

∴ ١/√٢ = |(٣ ، −٦ ، م) . (١ ، ٠ ، ١)| / (√(٩ + ٣٦ + م²) √(١ + ١))

∴ √(٤٥ + م²) = |٣ + م| وبتربيع الطرفين

∴ ٤٥ + م² = ٩ + ٦ م + م²

∴ ٣٦ = ٦ م

∴ م = ٦

معادلة خط تقاطع مستويين

إذا كان ط١ : أ١ س + ب١ ص + حـ١ ع + ء١ = ٠ ، ط٢ : أ٢ س + ب٢ ص + حـ٢ ع + ء٢ = ٠

معادلتي مستويين مختلفين في الفراغ وكانت النسب أ١/أ٢ ، ب١/ب٢ ، حـ١/حـ٢

ليست جميعها متساوية فإن المستويين يتقاطعان ويمكننا إيجاد معادلة

خط التقاطع بعدة طرق والمثال التالي يوضح بعضها.

مثال ٤

أوجد معادلة خط تقاطع المستويين :

ط١ : س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ ، ط٢ : ٢ س + ص − ع + ١ = ٠

الحل

معادلتا المستويين هما : س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ (١)

، ٢ س + ص − ع + ١ = ٠ (٢)

، ∵ ١/٢ ≠ ١/١ ∴ المستويان متقاطعان.

و بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) «لحذف المتغير ص»

∴ س − ٣ ع = ٠ ∴ س = ٣ ع (٣)

ويضرب المعادلة (٢) × ٢ والجمع إلى (١) : «لحذف المتغير ع»

∴ ٥ س + ٣ ص + ٣ = ٠ ∴ س = (−٣ − ٣ ص) / ٥ (٤)



من (٣) ، (٤) : ∴ معادلة خط التقاطع هي $\text{س} = \frac{-٣ - ٣\text{ص}}{٥} = ٣\text{ع}$

أي أن : $\frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ص} + ١}{\frac{-٥}{٣}} = \frac{\text{ع}}{\frac{١}{٣}}$

أي أن : $\frac{\text{س}}{-٣} = \frac{\text{ص} + ١}{٥} = \frac{\text{ع}}{-١}$ «الصورة الإحداثية»

حل آخر :

$\text{س} + \text{ص} + ٢\text{ع} + ١ = ٠$ (١)

$٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} + ١ = ٠$ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ $\text{س} - ٣\text{ع} = ٠$

وبفرض $\boxed{\text{ع} = \text{ك}}$ ∴ $\boxed{\text{س} = ٣\text{ك}}$

وبالتعويض في (١) : ∴ $٣\text{ك} + \text{ص} + ٢\text{ك} + ١ = ٠$ ∴ $\boxed{\text{ص} = -١ - ٥\text{ك}}$

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هي :

$\text{س} = ٣\text{ك}$ ، $\text{ص} = -١ - ٥\text{ك}$ ، $\text{ع} = \text{ك}$

∴ $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص} + ١}{-٥} = \frac{\text{ع}}{١}$ أي أن : $\frac{\text{س}}{-٣} = \frac{\text{ص} + ١}{٥} = \frac{\text{ع}}{-١}$

حل ثالث :

∵ خط التقاطع يكون عموديًا على متجهي الاتجاه العموديين على المستويين $(\overrightarrow{\text{ن}_١} ، \overrightarrow{\text{ن}_٢})$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ن}_١} = (١ ، ١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (٢ ، ١ ، -١)$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}} = (\overrightarrow{\text{ن}_١} \times \overrightarrow{\text{ن}_٢})$ يكون متجه اتجاه لخط التقاطع.

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} = -٣\overrightarrow{\text{س}} + ٥\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$

ولإيجاد نقطة تنتمي لخط التقاطع نضع $\text{س} = ٢$ «أو أي رقم آخر» في معادلتي المستويين

∴ $\text{ص} + ٢\text{ع} = -٣$ (١)

، $\text{ص} - \text{ع} = -٥$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

$\text{ع} = \frac{٢}{٣}$ ، $\text{ص} = \frac{-١٣}{٣}$

∴ النقطة $(٢ ، \frac{-١٣}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ تقع على خط التقاطع

∴ الصورة المتجهة لخط التقاطع هي :

$\overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، \frac{-١٣}{٣} ، \frac{٢}{٣}) + \text{ك}(-٣ ، ٥ ، -١)$

∴ $\frac{\text{س} - ٢}{-٣} = \frac{\text{ص} + \frac{١٣}{٣}}{٥} = \frac{\text{ع} - \frac{٢}{٣}}{-١}$

لاحظ أن

يمكن إيجاد نقطتين على خط التقاطع ومنها يمكن إيجاد متجه اتجاه خط التقاطع.

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

إذا كانت : $\text{ك}(\text{س}_١ ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١) \notin$ المستوى ط

حيث ط : $\text{ا س} + \text{ب ص} + \text{حـ ع} + \text{د} = ٠$

الذي فيه $\overrightarrow{\text{ن}} = (\text{ا} ، \text{ب} ، \text{حـ})$ متجه اتجاه عمودي ،

$\text{ق}(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$ أي نقطة تقع على المستوى ط

فإن طول العمود المرسوم من النقطة ك إلى المستوى ط ونرمز له بالرمز ل

هو طول مسقط المتجه $\overrightarrow{\text{ق ك}}$ في اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ أي أن : $\boxed{\text{ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ق ك}} \cdot \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}}$

∵ $\overrightarrow{\text{ق ك}} = \overrightarrow{\text{ك}} - \overrightarrow{\text{ق}} = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١) - (\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$

$= (\text{س}_١ - \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ ، \text{ع}_١ - \text{ع}_٢)$

∴ $\text{ل} = \frac{|(\text{س}_١ - \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ ، \text{ع}_١ - \text{ع}_٢) \cdot (\text{ا} ، \text{ب} ، \text{حـ})|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$

∴ $\text{ل} = \frac{|\text{ا}(\text{س}_١ - \text{س}_٢) + \text{ب}(\text{ص}_١ - \text{ص}_٢) + \text{حـ}(\text{ع}_١ - \text{ع}_٢)|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$

∴ $\text{ل} = \frac{|\text{ا س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{حـ ع}_١ - (\text{ا س}_٢ + \text{ب ص}_٢ + \text{حـ ع}_٢)|}{\sqrt{\text{ا}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$



، ∵ و (س٠ ، ص٠ ، ع٠) ∈ المستوى ط

∴ أ س٠ + ب ص٠ + جـ ع٠ = − د (من معادلة المستوى)

$$∴ ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$

وتسمى الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى.

مثال ٥

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١) إلى المستوى الذى معادلته :

① س + ٢ ص − ٢ ع + ٥ = ٠ ② ر . (١ ، ٢ ، −١) = ٢

الحل

① ∵ معادلة المستوى س + ٢ ص − ٢ ع + ٥ = ٠ ، النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١)

$$∴ طول العمود = \frac{|٣ + ٢ (٥) − ٢ (١) + ٥|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \frac{|١٦|}{٣} = ٥ \frac{١}{٣}$$ وحدة طول.

② ن = (١ ، ٢ ، −١) هو متجه اتجاه عمودى على المستوى ولإيجاد نقطة ب ∈ المستوى نضع أى قيمتين لـ س ، ص مثلًا ونحسب قيمة ع المناظرة فى معادلة المستوى

فمثلاً نضع س = ١ ، ص = ٢

∴ (١ ، ٢ ، ع) . (١ ، ٢ ، −١) = ٢

∴ ١ + ٤ − ع = ٢

∴ ع = ٣

∴ النقطة ب (١ ، ٢ ، ٣) ∈ المستوى

∴ ب أ = (٣ ، ٥ ، ١) − (١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٣ ، −٢)

$$∴ طول العمود ل = \frac{|ب أ . ن|}{\|ن\|} = \frac{|(٢ ، ٣ ، −٢) . (١ ، ٢ ، −١)|}{\sqrt{١ + ٤ + ١}}$$

$$= \frac{|٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٦}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$$ وحدة طول.

لاحظ أن
يمكن وضع قيمتين لـ س ، ع وحساب قيمة ص من معادلة المستوى أو وضع قيمتين لـ ع ، ص وحساب قيمة س من معادلة المستوى.

حل آخر :
يمكن الحل أيضًا عن طريق إيجاد المعادلة العامة للمستوى واستخدام الصورة الإحداثية لطول العمود كالتالى :

∵ ر . (١ ، ٢ ، −١) = ٢ ∴ س + ٢ ص − ع − ٢ = ٠

∵ النقطة أ (٣ ، ٥ ، ١)

$$∴ طول العمود ل = \frac{|٣ + ٢ (٥) − (١) − ٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ١}} = \frac{|١٠|}{\sqrt{٦}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$$ وحدة طول.

المسافة بين مستويين متوازيين

لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين فى الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.

مثال ٦

أثبت أن المستويين ط١ : س − ٢ ص − ٢ ع − ١٢ = ٠ ، ط٢ : ر . (−٣ ، ٦ ، ٦) = ٩ متوازيان وأوجد البعد بينهما.

الحل

بالنسبة للمستوى الأول ن١ = (١ ، −٢ ، −٢)

، بالنسبة للمستوى الثانى ن٢ = (−٣ ، ٦ ، ٦)

$$∵ \frac{١}{−٣} = \frac{−٢}{٦} = \frac{−٢}{٦}$$ ∴ المستويان متوازيان.

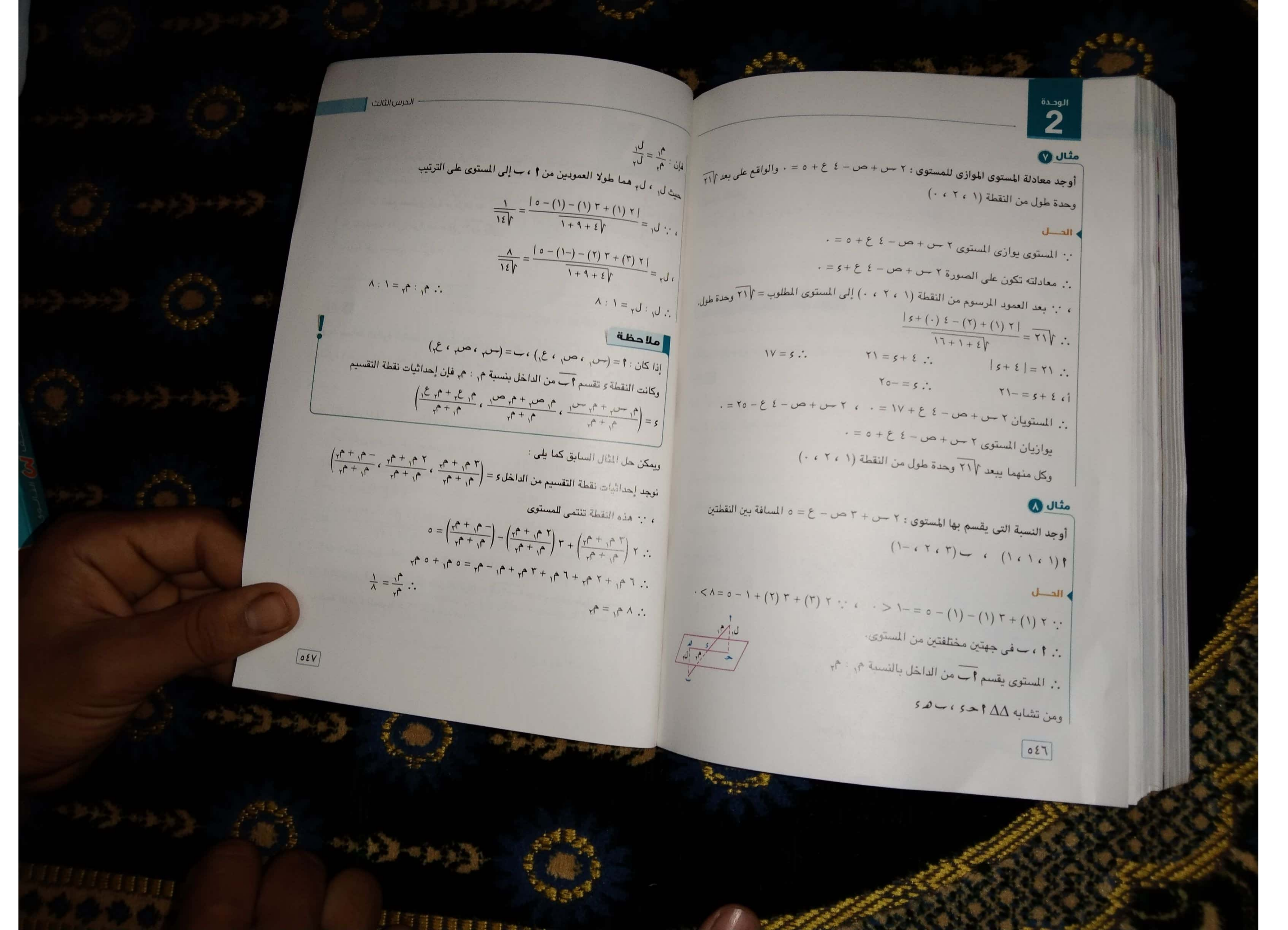
وبوضع س = −١ ، ص = −٢ فى معادلة المستوى ط٢

∴ (−١ ، −٢ ، ع) . (−٣ ، ٦ ، ٦) = ٩ ∴ ٣ − ١٢ + ٦ ع = ٩

∴ ع = ٣ ∴ النقطة (−١ ، −٢ ، ٣) ∈ المستوى ط٢

∴ البعد بين المستويين = طول العمود من (−١ ، −٢ ، ٣) إلى ط١

$$∴ ل = \frac{|−١ − ٢ (−٢) − ٢ (٣) − ١٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = ٥$$ وحدة طول.



مثال ٧

أوجد معادلة المستوى الموازى للمستوى : ٢ س + ص − ٤ ع + ٥ = ٠ والواقع على بعد $\sqrt{21}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، ٠)

الحل

∵ المستوى يوازى المستوى ٢ س + ص − ٤ ع + ٥ = ٠

∴ معادلته تكون على الصورة ٢ س + ص − ٤ ع + ء = ٠

، ∵ بعد العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٢ ، ٠) إلى المستوى المطلوب = $\sqrt{21}$ وحدة طول

∴ $\sqrt{21} = \frac{|2(1) + (2) - 4(0) + ء|}{\sqrt{4 + 1 + 16}}$

∴ ٢١ = |٤ + ء| ∴ ٤ + ء = ٢١ ∴ ء = ١٧

أ، ٤ + ء = −٢١ ∴ ء = −٢٥

∴ المستويان ٢ س + ص − ٤ ع + ١٧ = ٠ ، ٢ س + ص − ٤ ع − ٢٥ = ٠

يوازيان المستوى ٢ س + ص − ٤ ع + ٥ = ٠

وكل منهما يبعد $\sqrt{21}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، ٠)

مثال ٨

أوجد النسبة التى يقسم بها المستوى : ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ المسافة بين النقطتين

أ (١ ، ١ ، ١) ، ب (٣ ، ٢ ، −١)

الحل

∵ ٢ (١) + ٣ (١) − (١) − ٥ = −١ < ٠ ، ∵ ٢ (٣) + ٣ (٢) + ١ − ٥ = ٨ > ٠

∴ أ ، ب فى جهتين مختلفتين من المستوى.

∴ المستوى يقسم $\overline{أب}$ من الداخل بالنسبة $م_1 : م_2$

ومن تشابه ΔΔ أ حـ ء ، ب هـ ء

فإن : $\frac{م_1}{م_2} = \frac{ل_1}{ل_2}$

حيث $ل_1$ ، $ل_2$ هما طولا العمودين من أ ، ب إلى المستوى على الترتيب

، ∵ $ل_1 = \frac{|2(1) + 3(1) - (1) - 5|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

، $ل_2 = \frac{|2(3) + 3(2) - (-1) - 5|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$

∴ $ل_1 : ل_2 = 1 : 8$ ∴ $م_1 : م_2 = 1 : 8$

ملاحظة

إذا كان : أ = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ب = ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$)

وكانت النقطة ء تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $م_1 : م_2$ فإن إحداثيات نقطة التقسيم

ء = $\left(\frac{م_1 س_2 + م_2 س_1}{م_1 + م_2} ، \frac{م_1 ص_2 + م_2 ص_1}{م_1 + م_2} ، \frac{م_1 ع_2 + م_2 ع_1}{م_1 + م_2}\right)$

ويمكن حل المثال السابق كما يلى :

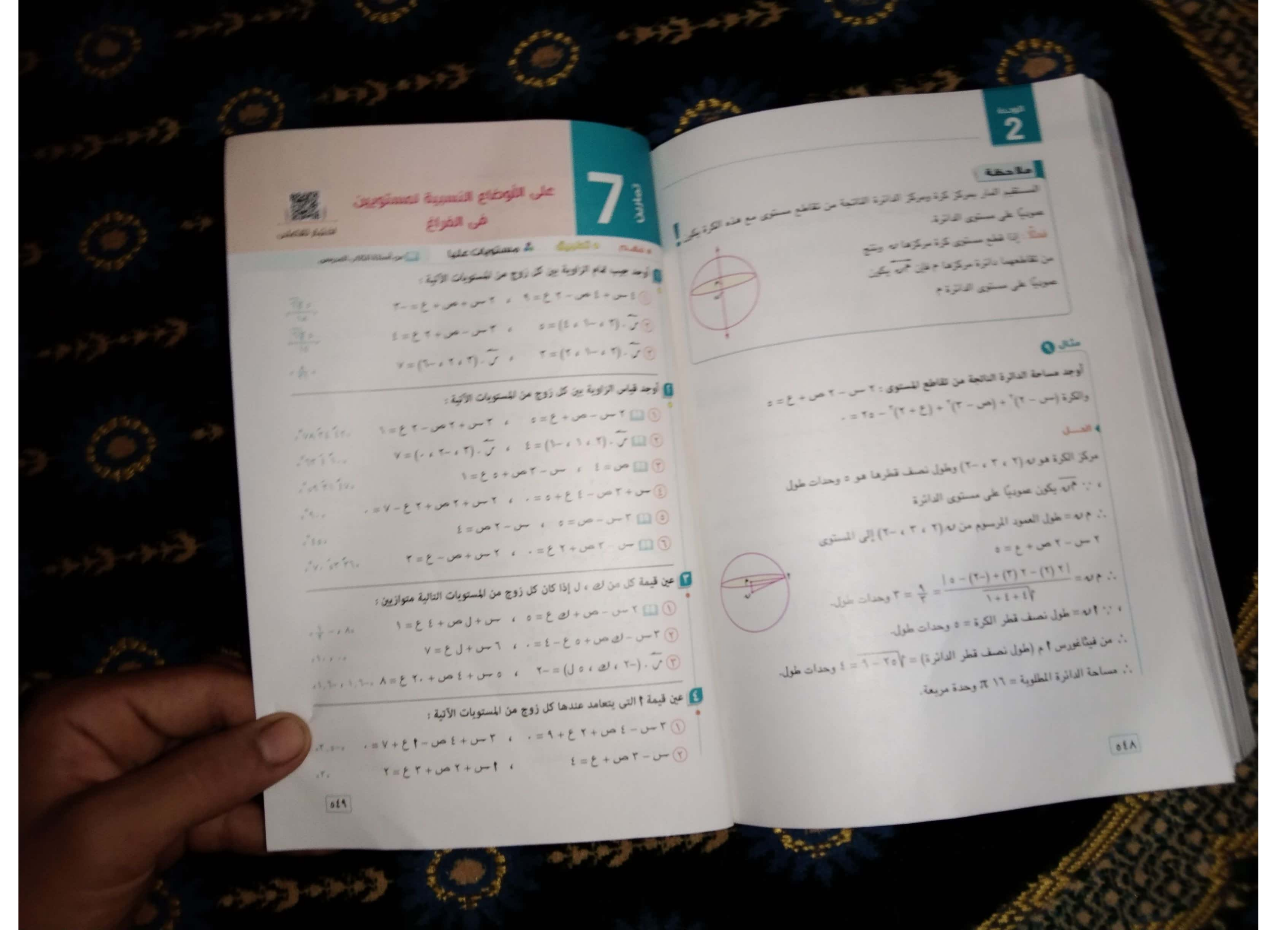
نوجد إحداثيات نقطة التقسيم من الداخل ء = $\left(\frac{3م_1 + م_2}{م_1 + م_2} ، \frac{2م_1 + م_2}{م_1 + م_2} ، \frac{-م_1 + م_2}{م_1 + م_2}\right)$

، ∵ هذه النقطة تنتمى للمستوى

∴ $2\left(\frac{3م_1 + م_2}{م_1 + م_2}\right) + 3\left(\frac{2م_1 + م_2}{م_1 + م_2}\right) - \left(\frac{-م_1 + م_2}{م_1 + م_2}\right) = 5$

∴ $6م_1 + 2م_2 + 6م_1 + 3م_2 + م_1 - م_2 = 5م_1 + 5م_2$

∴ $8م_1 = م_2$ ∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{1}{8}$



ملاحظة

المستقيم المار بمركز كرة وبمركز الدائرة الناتجة من تقاطع مستوى مع هذه الكرة يكون عموديًا على مستوى الدائرة.

مثلًا: إذا قطع مستوى كرة مركزها ن ونتج من تقاطعهما دائرة مركزها م فإن $\overline{م ن}$ يكون عموديًا على مستوى الدائرة م

مثال 9

أوجد مساحة الدائرة الناتجة من تقاطع المستوى: ٢ س − ٢ ص + ع = ٥

والكرة (س − ٢)^٢ + (ص − ٣)^٢ + (ع + ٢)^٢ − ٢٥ = ٠

الحل

مركز الكرة هو ن (٢ ، ٣ ، −٢) وطول نصف قطرها هو ٥ وحدات طول

∵ $\overline{م ن}$ يكون عموديًا على مستوى الدائرة

∴ م ن = طول العمود المرسوم من ن (٢ ، ٣ ، −٢) إلى المستوى ٢ س − ٢ ص + ع = ٥

∴ م ن = |٢ (٢) − ٢ (٣) + (−٢) − ٥| ÷ √(٤ + ٤ + ١) = ٩ ÷ ٣ = ٣ وحدات طول.

∵ أ ن = طول نصف قطر الكرة = ٥ وحدات طول.

∴ من فيثاغورس أ م (طول نصف قطر الدائرة) = √(٢٥ − ٩) = ٤ وحدات طول.

∴ مساحة الدائرة المطلوبة = ١٦ π وحدة مربعة.

تمارين 7 على الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ

تذكر • تطبيق • مستويات عليا • من أسئلة الكتاب المدرسي

1 أوجد جيب تمام الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

(1) ٤ س + ٤ ص − ٢ ع = ٩ ، ٢ س + ص + ع = −٣

(2) ن . (٣ ، −١ ، ٤) = ٥ ، ٢ س − ص + ٢ ع = ٤

(3) ن . (٣ ، −١ ، ٢) = ٣ ، ن . (٣ ، ٢ ، −٣) = ٧

2 أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية:

(1) ٢ س − ص + ع = ٥ ، ٢ س + ٢ ص − ٢ ع = ١

(2) ن . (٢ ، ١ ، −١) = ٤ ، ن . (٣ ، −٢ ، ٠) = ٧

(3) ص = ٤ ، س − ٢ ص + ٥ ع = ١

(4) س + ٣ ص − ٤ ع + ٥ = ٠ ، ٢ س + ٢ ص + ٢ ع − ٧ = ٠

(5) ٣ س − ص = ٥ ، س − ٢ ص = ٤

(6) س − ٣ ص + ٢ ع = ٠ ، ٢ س + ص − ع = ٣

3 عين قيمة كل من ك ، ل إذا كان كل زوج من المستويات التالية متوازيين:

(1) ٢ س − ص + ك ع = ٥ ، س + ل ص + ٤ ع = ١

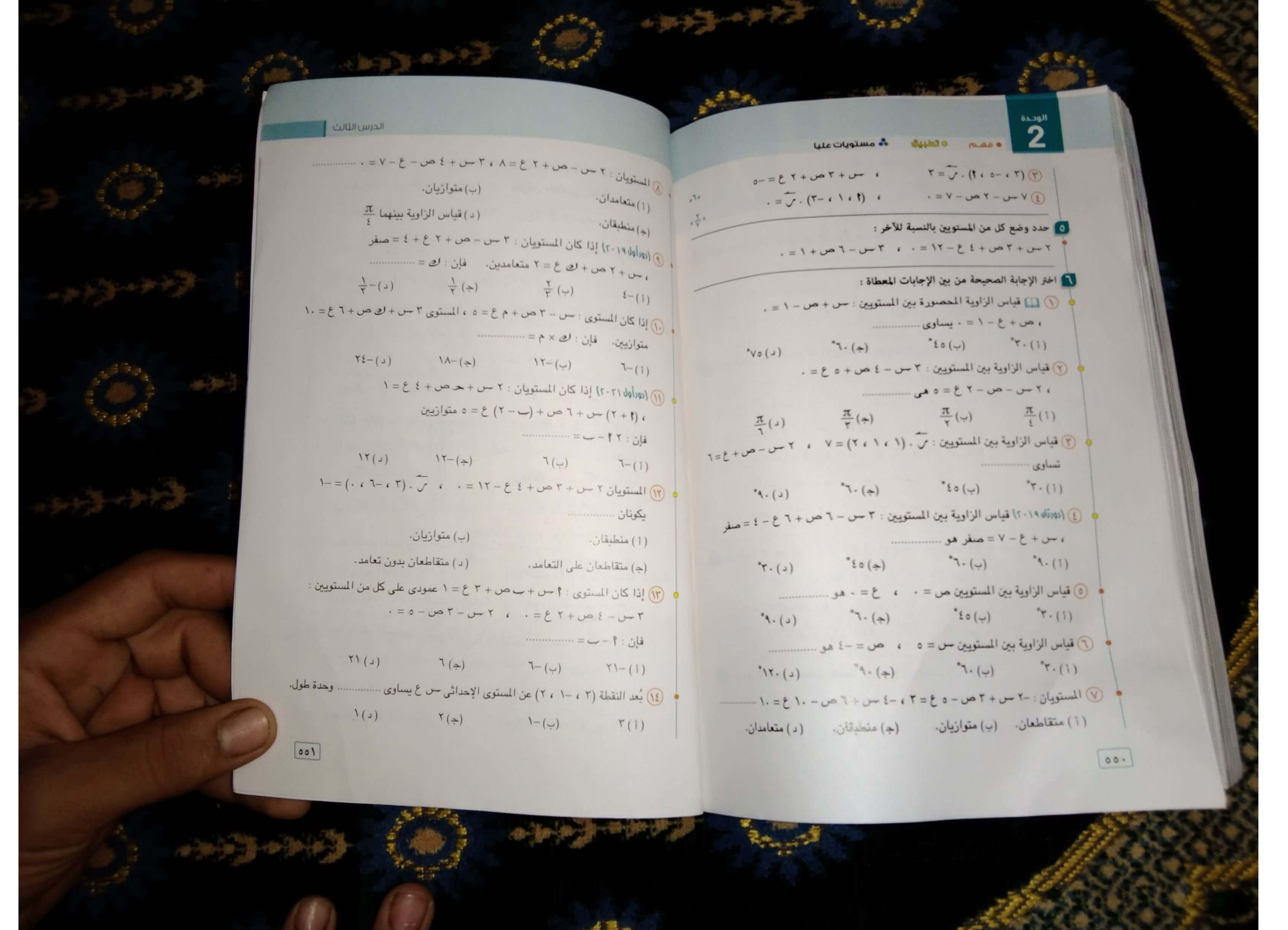
(2) ٣ س − ك ص + ٥ ع − ٤ = ٠ ، ٦ س + ل ع = ٧

(3) ن . (−٢ ، ك ، ٥ ل) = −٢ ، ٥ س + ٤ ص + ٢٠ ع = ٨

4 عين قيمة أ التي يتعامد عندها كل زوج من المستويات الآتية:

(1) ٣ س − ٤ ص + ٢ ع + ٩ = ٠ ، ٢ س + ٤ ص − أ ع + ٧ = ٠

(2) س − ٣ ص + ع = ٤ ، أ س + ٢ ص + ٣ ع = ٢



(٣) (٣ ، −٥ ، ٢) . ر = ٣ ، س + ٣ ص + ٢ ع = −٥

(٤) ٧ س − ٢ ص − ٧ = ٠ ، (٢ ، ١ ، −٣) . ر = ٠

٥ حدد وضع كل من المستويين بالنسبة للآخر :

٢ س + ٣ ص + ٤ ع − ١٢ = ٠ ، ٣ س − ٦ ص + ١ = ٠

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين : س + ص − ١ = ٠ ، ص + ع − ١ = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

(٢) قياس الزاوية بين المستويين : ٣ س − ٤ ص + ٥ ع = ٠ ، ٢ س − ص − ٢ ع = ٥ هى ....

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

(٣) قياس الزاوية بين المستويين : ر . (١ ، ١ ، ٢) = ٧ ، ٢ س − ص + ع = ٦ تساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٤) (دور ثان ٢٠١٩) قياس الزاوية بين المستويين : ٣ س − ٦ ص + ٦ ع − ٤ = صفر ، س + ع − ٧ = صفر هو ....

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٣٠°

(٥) قياس الزاوية بين المستويين ص = ٠ ، ع = ٠ هو ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٦) قياس الزاوية بين المستويين س = ٥ ، ص = −٤ هو ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٧) المستويان : −٢ س + ٣ ص − ٥ ع = ٣ ، −٤ س + ٦ ص − ١٠ ع = ١٠ ....

(أ) متقاطعان. (ب) متوازيان. (جـ) منطبقان. (د) متعامدان.

(٨) المستويان : ٢ س − ص + ٢ ع = ٨ ، ٣ س + ٤ ص − ع − ٧ = ٠ ....

(أ) متعامدان. (ب) متوازيان.

(جـ) منطبقان. (د) قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{4}$

(٩) (دور أول ٢٠١٩) إذا كان المستويان : ٣ س − ص + ٢ ع + ٤ = صفر ، س + ٢ ص + ك ع = ٢ متعامدين. فإن : ك = ...

(أ) −٤ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) −$\frac{١}{٢}$

(١٠) إذا كان المستوى : س − ٣ ص + م ع = ٥ ، المستوى ٣ س + ك ص + ٦ ع = ١٠ متوازيين. فإن : ك × م = ...

(أ) −٦ (ب) −١٢ (جـ) −١٨ (د) −٢٤

(١١) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان المستويان : ٢ س + حـ ص + ٤ ع = ١ ، (أ + ٢) س + ٦ ص + (ب − ٢) ع = ٥ متوازيين فإن : ٢ أ − ب = ...

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) −١٢ (د) ١٢

(١٢) المستويان ٢ س + ٣ ص + ٤ ع − ١٢ = ٠ ، ر . (٣ ، −٦ ، ٠) = −١ يكونان ....

(أ) منطبقان. (ب) متوازيان.

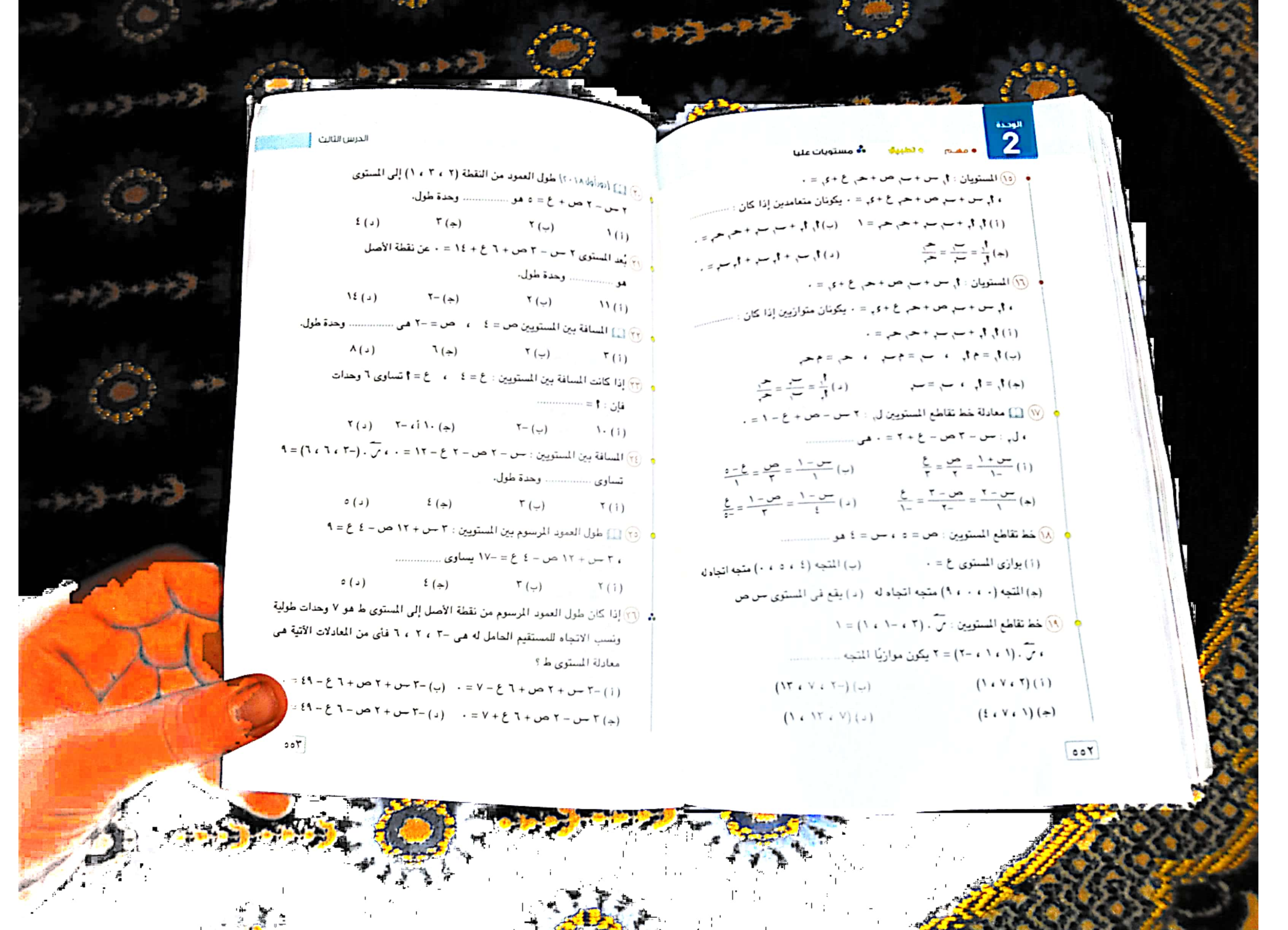
(جـ) متقاطعان على التعامد. (د) متقاطعان بدون تعامد.

(١٣) إذا كان المستوى : أ س + ب ص + ٣ ع = ١ عمودى على كل من المستويين : ٣ س − ٤ ص + ٢ ع = ٠ ، ٢ س − ٣ ص − ٥ = ٠ فإن : أ − ب = ...

(أ) −٢١ (ب) −٦ (جـ) ٦ (د) ٢١

(١٤) بُعد النقطة (٣ ، −١ ، ٢) عن المستوى الإحداثى س ع يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) ١



(١٥) المستويان : أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ ع + د$_1$ = ٠

، أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ ع + د$_2$ = ٠ يكونان متعامدين إذا كان : ....

(أ) أ$_1$ أ$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + حـ$_1$ حـ$_2$ = ١ (ب) أ$_1$ أ$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + حـ$_1$ حـ$_2$ = ٠

(جـ) $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{حـ_1}{حـ_2}$ (د) أ$_1$ ب$_1$ + أ$_2$ ب$_2$ + أ$_3$ ب$_3$ = ٠

(١٦) المستويان : أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ ع + د$_1$ = ٠

، أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ ع + د$_2$ = ٠ يكونان متوازيين إذا كان : ....

(أ) أ$_1$ أ$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + حـ$_1$ حـ$_2$ = ٠

(ب) أ$_1$ = م أ$_2$ ، ب$_1$ = م ب$_2$ ، حـ$_1$ = م حـ$_2$

(جـ) أ$_1$ = أ$_2$ ، ب$_1$ = ب$_2$ (د) $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{حـ_1}{حـ_2}$

(١٧) معادلة خط تقاطع المستويين ل$_1$: ٢ س − ص + ع − ١ = ٠

، ل$_2$: س − ٣ ص − ع + ٢ = ٠ هي ....

(أ) $\frac{س + ١}{-١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$ (ب) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع - ٥}{١}$

(جـ) $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص - ٣}{-٢} = \frac{ع}{-١}$ (د) $\frac{س - ١}{٤} = \frac{ص - ١}{٣} = \frac{ع}{-٥}$

(١٨) خط تقاطع المستويين : ص = ٥ ، س = ٤ هو ....

(أ) يوازى المستوى ع = ٠ (ب) المتجه (٤ ، ٥ ، ٠) متجه اتجاه له

(جـ) المتجه (٠ ، ٠ ، ٩) متجه اتجاه له (د) يقع فى المستوى س ص

(١٩) خط تقاطع المستويين : $\overline{ر}$. (٣ ، −١ ، ١) = ١

، $\overline{ر}$. (١ ، ١ ، −٢) = ٢ يكون موازيًا المتجه ....

(أ) (٢ ، ٧ ، ١) (ب) (−٢ ، ٧ ، ١٣)

(جـ) (١ ، ٧ ، ٤) (د) (٧ ، ١٢ ، ١)

(٢٠) (دور أول ٢٠١٨) طول العمود من النقطة (٢ ، ٣ ، ١) إلى المستوى

٢ س − ٢ ص + ع = ٥ هو .... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢١) بُعد المستوى ٢ س − ٣ ص + ٦ ع + ١٤ = ٠ عن نقطة الأصل

هو .... وحدة طول.

(أ) ١١ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ١٤

(٢٢) المسافة بين المستويين ص = ٤ ، ص = −٢ هى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٣) إذا كانت المسافة بين المستويين : ع = ٤ ، ع = أ تساوى ٦ وحدات

فإن : أ = ...

(أ) ١٠ (ب) −٢ (جـ) ١٠ أ، −٢ (د) ٢

(٢٤) المسافة بين المستويين : س − ٢ ص − ٢ ع − ١٢ = ٠ ، $\overline{ر}$. (−٣ ، ٦ ، ٦) = ٩

تساوى .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٥) طول العمود المرسوم بين المستويين : ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = ٩

، ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = −١٧ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

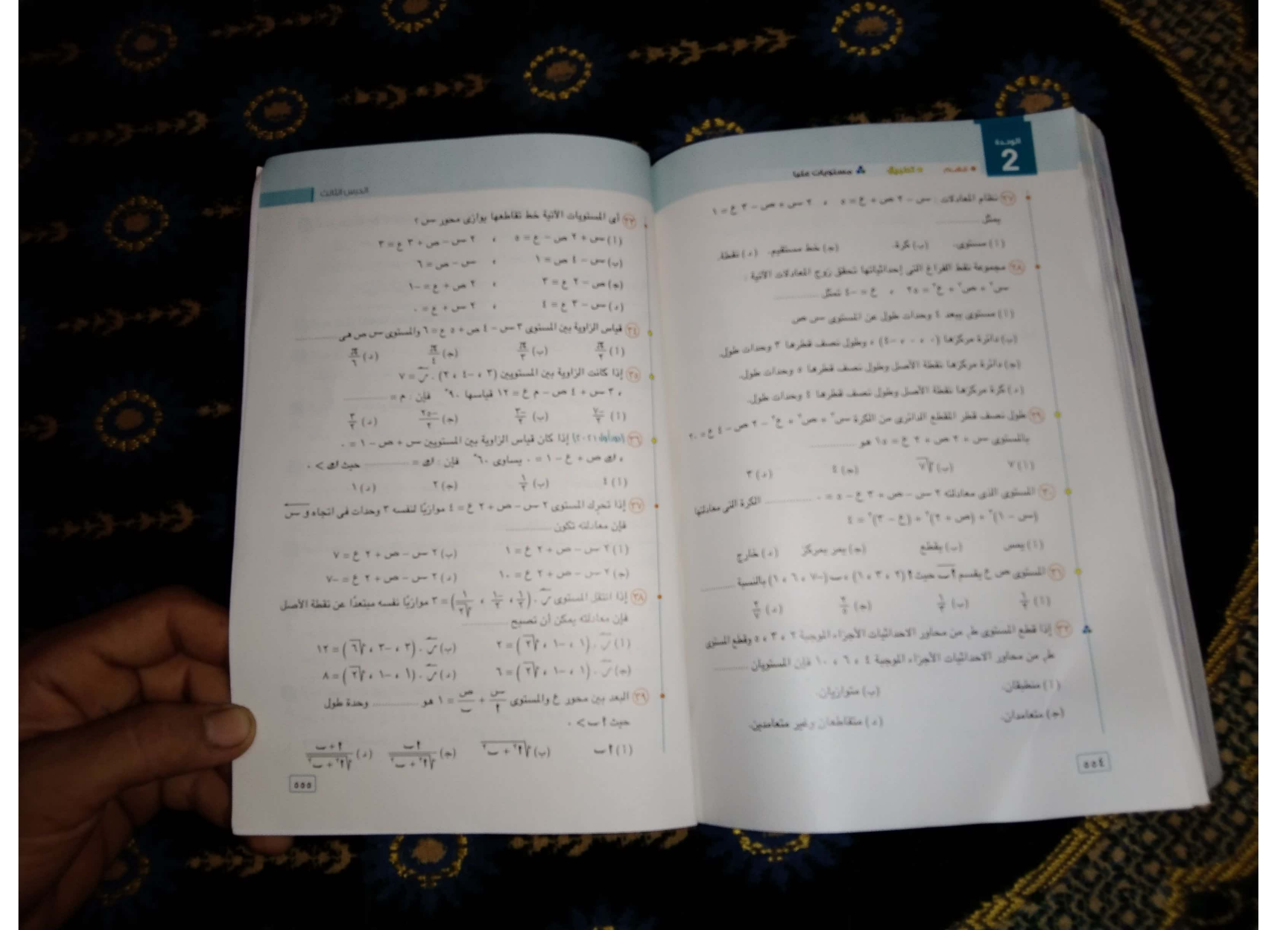
(٢٦) إذا كان طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستوى ط هو ٧ وحدات طولية

ونسب الاتجاه للمستقيم الحامل له هى −٣ ، ٢ ، ٦ فأى من المعادلات الآتية هى

معادلة المستوى ط ؟

(أ) −٣ س + ٢ ص + ٦ ع − ٧ = ٠ (ب) −٣ س + ٢ ص + ٦ ع − ٤٩ = ٠

(جـ) ٣ س − ٢ ص + ٦ ع + ٧ = ٠ (د) −٣ س + ٢ ص − ٦ ع − ٤٩ = ٠



(٢٧) نظام المعادلات: س − ٢ ص + ع = ٥ ، ٢ س + ص − ٣ ع = ١ يمثل ....

(أ) مستوى. (ب) كرة. (ج) خط مستقيم. (د) نقطة.

(٢٨) مجموعة نقط الفراغ التي إحداثياتها تحقق زوج المعادلات الآتية:
س^{2} + ص^{2} + ع^{2} = ٢٥ ، ع = −٤ تمثل ....

(أ) مستوى يبعد ٤ وحدات طول عن المستوى س ص

(ب) دائرة مركزها (٠ ، ٠ ، −٤) ، وطول نصف قطرها ٣ وحدات طول.

(ج) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول.

(د) كرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات طول.

(٢٩) طول نصف قطر المقطع الدائري من الكرة س^{2} + ص^{2} + ع^{2} − ٢ ص − ٤ ع = ٢٠ بالمستوى س + ٢ ص + ٢ ع = ١٥ هو ....

(أ) ٧ (ب) $\sqrt{7}$ (ج) ٤ (د) ٣

(٣٠) المستوى الذي معادلته ٢ س − ص + ٢ ع − ٥ = ٠ .... الكرة التي معادلتها
(س − ١)^{2} + (ص + ٢)^{2} + (ع − ٣)^{2} = ٤

(أ) يمس (ب) يقطع (ج) يمر بمركز (د) خارج

(٣١) المستوى ص ع يقسم $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ٣ ، ١) ، ب (−٧ ، ٦ ، ١) بالنسبة ....

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٧}$

(٣٢) إذا قطع المستوى ط$_{1}$ من محاور الاحداثيات الأجزاء الموجبة ٢ ، ٣ ، ٥ وقطع المستوى ط$_{2}$ من محاور الاحداثيات الأجزاء الموجبة ٤ ، ٦ ، ١٠ فإن المستويان ....

(أ) منطبقان. (ب) متوازيان.

(ج) متعامدان. (د) متقاطعان وغير متعامدين.

(٣٣) أي المستويات الآتية خط تقاطعها يوازي محور س ؟

(أ) س + ٢ ص − ع = ٥ ، ٢ س − ص + ٣ ع = ٣

(ب) س − ٤ ص = ١ ، س − ص = ٦

(ج) ص − ٢ ع = ٣ ، ٢ ص + ع = −١

(د) س − ٣ ع = ٤ ، ٢ س + ع = ٠

(٣٤) قياس الزاوية بين المستوى ٢ س − ٤ ص + ٥ ع = ٦ والمستوى س ص هي ....

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

(٣٥) إذا كانت الزاوية بين المستويين (٣ ، −٤ ، ٢) · $\overrightarrow{ر}$ = ٧ ، ٣ س + ٤ ص − م ع = ١٢ قياسها ٦٠° فإن: م = ...

(أ) $\frac{-٧}{٢}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (ج) $\frac{-٢٥}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٣٦) (دور أول ٢٠٢١) إذا كان قياس الزاوية بين المستويين س + ص − ١ = ٠ ، ك ص + ع − ١ = ٠ يساوي ٦٠° فإن: ك = ... حيث ك > ٠

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٢ (د) ١

(٣٧) إذا تحرك المستوى ٢ س − ص + ٢ ع = ٤ موازيًا لنفسه ٣ وحدات في اتجاه $\overrightarrow{و س}$ فإن معادلته تكون ....

(أ) ٢ س − ص + ٢ ع = ١ (ب) ٢ س − ص + ٢ ع = ٧

(ج) ٢ س − ص + ٢ ع = ١٠ (د) ٢ س − ص + ٢ ع = −٧

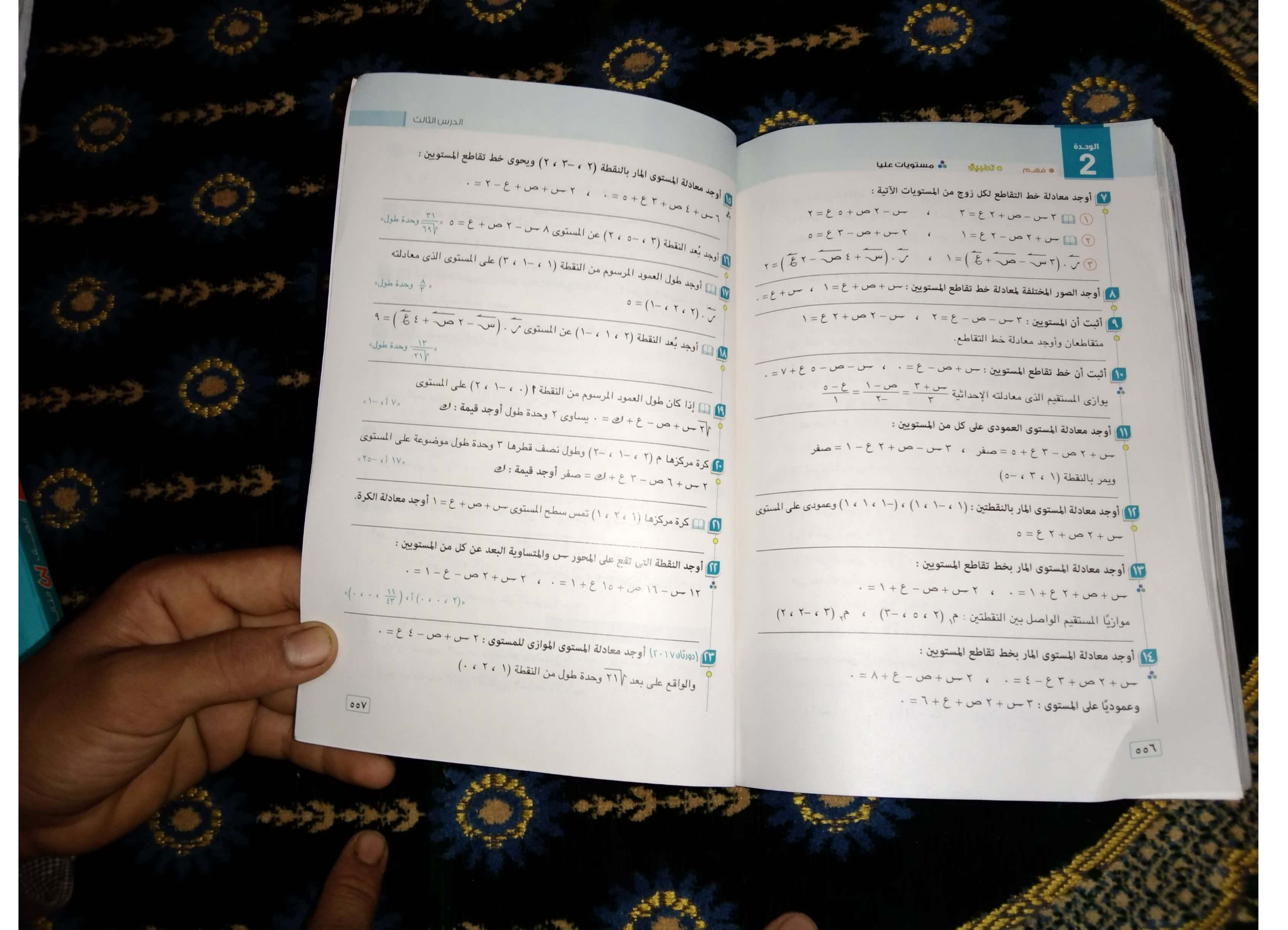
(٣٨) إذا انتقل المستوى $\overrightarrow{ر}$ · $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ = ٣ موازيًا نفسه مبتعدًا عن نقطة الأصل فإن معادلته يمكن أن تصبح ....

(أ) $\overrightarrow{ر}$ · (١ ، −١ ، $\sqrt{٢}$) = ٢ (ب) $\overrightarrow{ر}$ · (٣ ، −٣ ، $\sqrt{٦}$) = ١٢

(ج) $\overrightarrow{ر}$ · (١ ، −١ ، $\sqrt{٢}$) = ٦ (د) $\overrightarrow{ر}$ · (١ ، −١ ، $\sqrt{٢}$) = ٨

(٣٩) البعد بين محور ع والمستوى $\frac{س}{أ}$ + $\frac{ص}{ب}$ = ١ هو .... وحدة طول حيث أ ب > ٠

(أ) أ ب (ب) $\sqrt{أ^{2} + ب^{2}}$ (ج) $\frac{أ ب}{\sqrt{أ^{2} + ب^{2}}}$ (د) $\frac{أ + ب}{\sqrt{أ^{2} + ب^{2}}}$



• فهم ○ تطبيق ∴ مستويات عليا

7 أوجد معادلة خط التقاطع لكل زوج من المستويات الآتية :

① ٣ س − ص + ٢ ع = ٣ ، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢

② س + ٢ ص − ٢ ع = ١ ، ٢ س + ص − ٣ ع = ٥

③ $\vec{ر}$. (٣ $\vec{س}$ − $\vec{ص}$ + $\vec{ع}$) = ١ ، $\vec{ر}$. ($\vec{س}$ + ٤ $\vec{ص}$ − ٢ $\vec{ع}$) = ٢

8 أوجد الصور المختلفة لمعادلة خط تقاطع المستويين : س + ص + ع = ١ ، س + ع = ٠

9 أثبت أن المستويين : ٣ س − ص − ع = ٢ ، س − ٢ ص + ٢ ع = ١ متقاطعان وأوجد معادلة خط التقاطع.

10 أثبت أن خط تقاطع المستويين : س + ص − ع = ٠ ، س − ص − ٥ ع + ٧ = ٠ يوازى المستقيم الذى معادلته الإحداثية $\frac{س + ٣}{٣} = \frac{ص - ١}{-٢} = \frac{ع - ٥}{١}$

11 أوجد معادلة المستوى العمودى على كل من المستويين : س + ٢ ص − ٣ ع + ٥ = صفر ، ٣ س − ص + ٢ ع − ١ = صفر ويمر بالنقطة (١ ، ٣ ، −٥)

12 أوجد معادلة المستوى المار بالنقطتين : (١ ، −١ ، ١) ، (−١ ، ١ ، ١) وعمودى على المستوى س + ٢ ص + ٢ ع = ٥

13 أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين : س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ ، ٢ س + ص − ع + ١ = ٠ موازيًا المستقيم الواصل بين النقطتين : م١ (٢ ، ٥ ، −٣) ، م٢ (٣ ، −٢ ، ٢)

14 أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين : س + ٢ ص + ٣ ع − ٤ = ٠ ، ٢ س + ص − ع + ٨ = ٠ وعموديًا على المستوى : ٣ س + ٢ ص + ع + ٦ = ٠

15 أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −٣ ، ٢) ويحوى خط تقاطع المستويين : ٦ س + ٤ ص + ٣ ع + ٥ = ٠ ، ٢ س + ص + ع − ٢ = ٠

16 أوجد بُعد النقطة (٣ ، −٥ ، ٢) عن المستوى ٨ س − ٢ ص + ع = ٥ «$\frac{٣١}{\sqrt{٦٩}}$ وحدة طول»

17 أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، −١ ، ٣) على المستوى الذى معادلته $\vec{ر}$. (٢ ، ٢ ، −١) = ٥ «$\frac{٨}{٣}$ وحدة طول»

18 أوجد بُعد النقطة (٢ ، ١ ، −١) عن المستوى $\vec{ر}$. ($\vec{س}$ − ٢ $\vec{ص}$ + ٤ $\vec{ع}$) = ٩ «$\frac{١٣}{\sqrt{٢١}}$ وحدة طول»

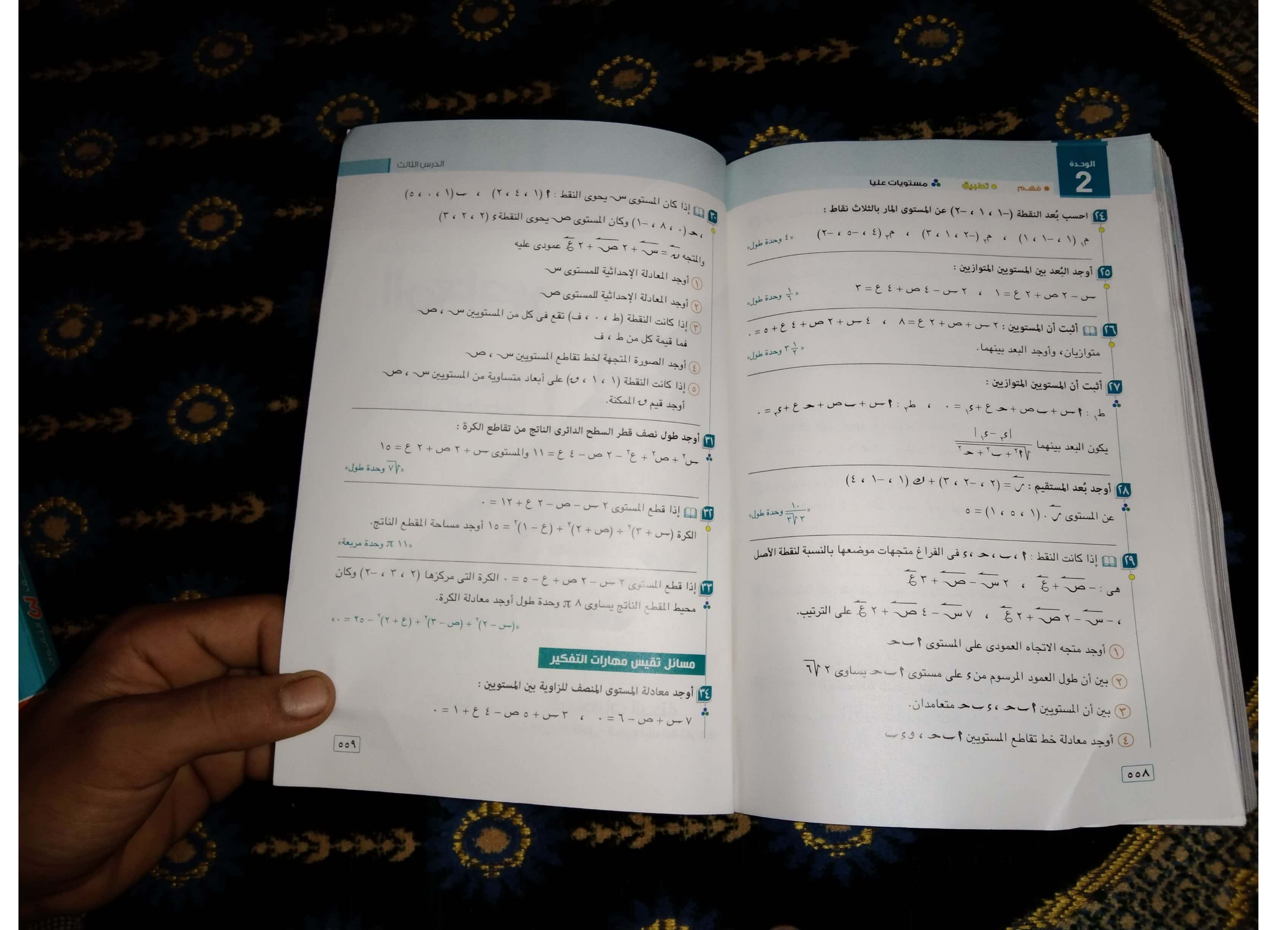
19 إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، −١ ، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}$ س + ص − ع + ك = ٠ يساوى ٢ وحدة طول أوجد قيمة : ك «٧ أ، −١»

20 كرة مركزها م (٢ ، −١ ، −٢) وطول نصف قطرها ٣ وحدة طول موضوعة على المستوى ٢ س + ٦ ص − ٣ ع + ك = صفر أوجد قيمة : ك «١٧ أ، −٢٥»

21 كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة.

22 أوجد النقطة التى تقع على المحور س والمتساوية البعد عن كل من المستويين : ١٢ س − ١٦ ص + ١٥ ع + ١ = ٠ ، ٢ س + ٢ ص − ع − ١ = ٠ «(٢ ، ٠ ، ٠) أ، ($\frac{١١}{٤٣}$ ، ٠ ، ٠)»

23 (دور ثان ٢٠١٧) أوجد معادلة المستوى الموازى للمستوى : ٢ س + ص − ٤ ع = ٠ والواقع على بعد $\sqrt{٢١}$ وحدة طول من النقطة (١ ، ٢ ، ٠)



٢٤ احسب بُعد النقطة (–١ ، ١ ، –٢) عن المستوى المار بالثلاث نقاط :

م١ (١ ، –١ ، ١) ، م٢ (–٢ ، ١ ، ٣) ، م٣ (٤ ، –٥ ، –٢) «٤ وحدة طول»

٢٥ أوجد البُعد بين المستويين المتوازيين :

س – ٢ ص + ٢ ع = ١ ، ٢ س – ٤ ص + ٤ ع = ٣ «$\frac{١}{٦}$ وحدة طول»

٢٦ أثبت أن المستويين : ٢ س + ص + ٢ ع = ٨ ، ٤ س + ٢ ص + ٤ ع + ٥ = ٠

متوازيان، وأوجد البعد بينهما. «$٢\frac{١}{٢}$ وحدة طول»

٢٧ أثبت أن المستويين المتوازيين :

ط١ : أ س + ب ص + حـ ع + ء١ = ٠ ، ط٢ : أ س + ب ص + حـ ع + ء٢ = ٠

يكون البعد بينهما $\frac{|ء_١ - ء_٢|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

٢٨ أوجد بُعد المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، –٢ ، ٣) + ك (١ ، –١ ، ٤)

عن المستوى $\overrightarrow{ر}$. (١ ، ٥ ، ١) = ٥ «$\frac{١٠}{٣\sqrt{٣}}$ وحدة طول»

٢٩ إذا كانت النقط : أ ، ب ، حـ ، ء فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل

هى : – $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ ، ٢ $\overrightarrow{س}$ – $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$

، – $\overrightarrow{س}$ – ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٢ $\overrightarrow{ع}$ ، ٧ $\overrightarrow{س}$ – ٤ $\overrightarrow{ص}$ + ٢ $\overrightarrow{ع}$ على الترتيب.

(١) أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

(٢) بين أن طول العمود المرسوم من ء على مستوى أ ب حـ يساوى ٢ $\sqrt{٦}$

(٣) بين أن المستويين أ ب حـ ، ء ب حـ متعامدان.

(٤) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب حـ ، ء ب حـ

٣٠ إذا كان المستوى س يحوى النقط : أ (١ ، ٤ ، ٢) ، ب (١ ، ٠ ، ٥)

، حـ (٠ ، ٨ ، –١) وكان المستوى ص يحوى النقطة ء (٢ ، ٢ ، ٣)

والمتجه ن = $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٢ $\overrightarrow{ع}$ عمودى عليه

(١) أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى س

(٢) أوجد المعادلة الإحداثية للمستوى ص

(٣) إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين س ، ص

فما قيمة كل من ط ، ف

(٤) أوجد الصورة المتجهة لخط تقاطع المستويين س ، ص

(٥) إذا كانت النقطة (١ ، ١ ، ن) على أبعاد متساوية من المستويين س ، ص

أوجد قيم ن الممكنة.

٣١ أوجد طول نصف قطر السطح الدائرى الناتج من تقاطع الكرة :

س٢ + ص٢ + ع٢ – ٢ ص – ٤ ع = ١١ والمستوى س + ٢ ص + ٢ ع = ١٥ «$\sqrt{٧}$ وحدة طول»

٣٢ إذا قطع المستوى ٢ س – ص – ٢ ع + ١٢ = ٠

الكرة (س + ٣)٢ + (ص + ٢)٢ + (ع – ١)٢ = ١٥ أوجد مساحة المقطع الناتج. «١١ π وحدة مربعة»

٣٣ إذا قطع المستوى ٢ س – ٢ ص + ع – ٥ = ٠ الكرة التى مركزها (٢ ، ٣ ، –٢) وكان

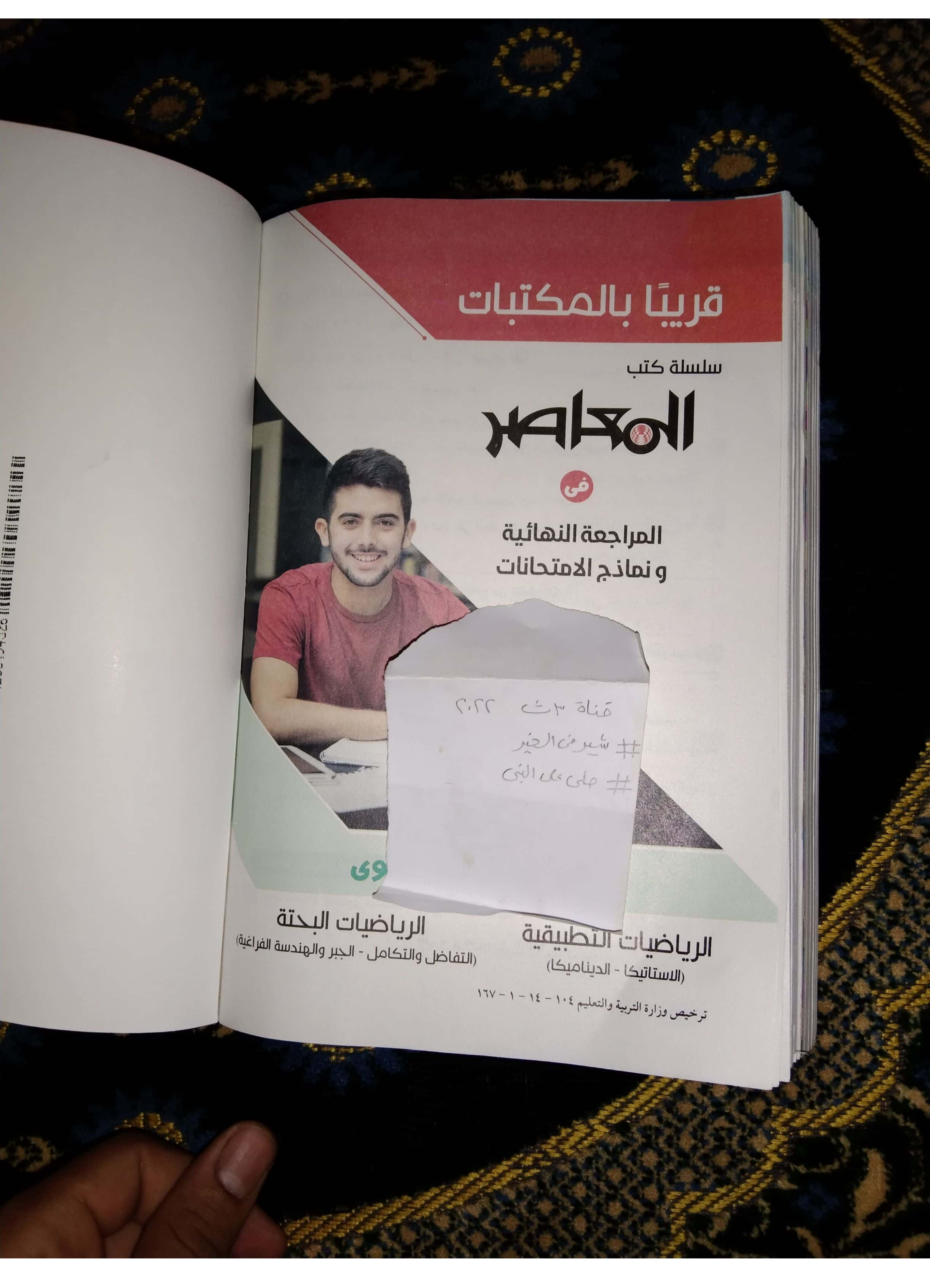
محيط المقطع الناتج يساوى ٨ π وحدة طول أوجد معادلة الكرة.

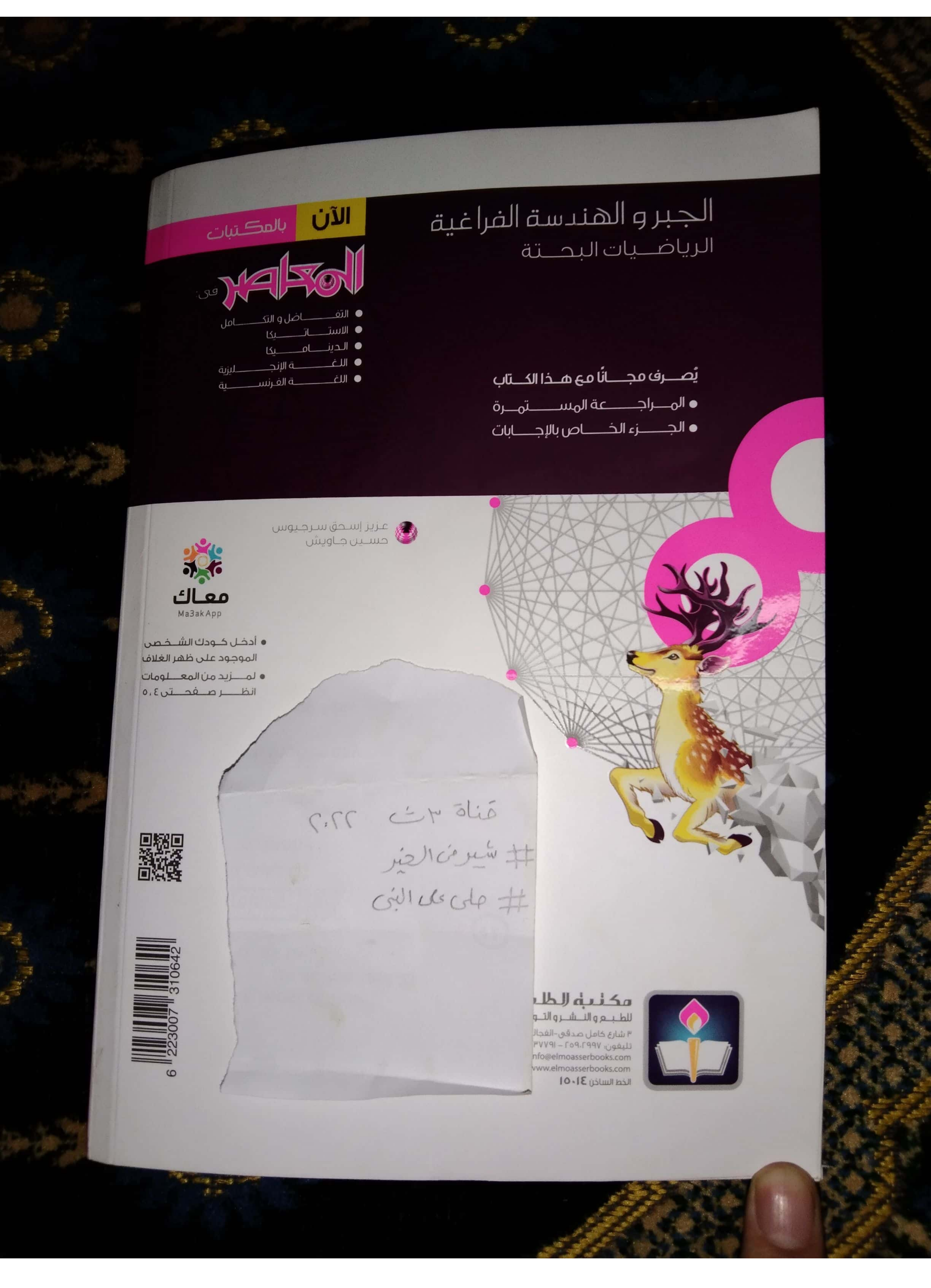
«(س – ٢)٢ + (ص – ٣)٢ + (ع + ٢)٢ – ٢٥ = ٠»

مسائل تقيس مهارات التفكير

٣٤ أوجد معادلة المستوى المنصف للزاوية بين المستويين :

٧ س + ص – ٦ = ٠ ، ٣ س + ٥ ص – ٤ ع + ١ = ٠


قريبًا بالمكتبات
سلسلة كتب
المعاصر
فى
المراجعة النهائية
و نماذج الامتحانات
قناة م ث ٢٠٢٢
شير من الخير
صلى على النبى
الرياضيات التطبيقية
(الاستاتيكا - الديناميكا)
الرياضيات البحتة
(التفاضل والتكامل - الجبر والهندسة الفراغية)
ترخيص وزارة التربية والتعليم ١٠٤ - ١٤ - ١ - ١٦٧


الجبر و الهندسة الفراغية
الرياضيات البحتة
الآن
بالمكتبات
المعاصر في:
التفاضل و التكامل
الاستاتيكا
الديناميكا
اللغة الإنجليزية
اللغة الفرنسية
يُصرف مجانًا مع هذا الكتاب
المراجعة المستمرة
الجزء الخاص بالإجابات
عزيز إسحق سرجيوس
حسين جاويش
معاك
Ma3ak App
أدخل كودك الشخص الموجود على ظهر الغلاف
لمزيد من المعلومات انظر صفحتي ٥٠٤
قناة ٣ث ٢٠٢٢
شير من الخير
صلى على النبي
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤
6 223007 310642